ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

9

DERS KİTABI

Yazar

Aydın İRMAK

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 18.04.2019 tarihli ve 8 sayılı (ekli listenin 100. sırasında) kurul kararıyla 2019 - 2020 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

ATA YAYINCILIK

ATA DERS KİTAPLARI YAYINCILIK, MATB., İNŞ., TARIM HAYV.
SAN. VE TİC. LTD. ŞTİ.
Örnek Mahallesi Örnek Caddesi No.: 75 Altındağ/ANKARA
tel: (0 312) 341 23 85 - 384 52 58 - 342 41 83 - 342 41 84 - 384 52 00

Dil Uzmanı

Mehmet ÖZKAN

Görsel Tasarımcı

Burcu GÜRCAN

Baskı

Özgün Matbaacılık San. Tic. AŞ - Ankara, 2023

ISBN

978-605-261-534-8

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

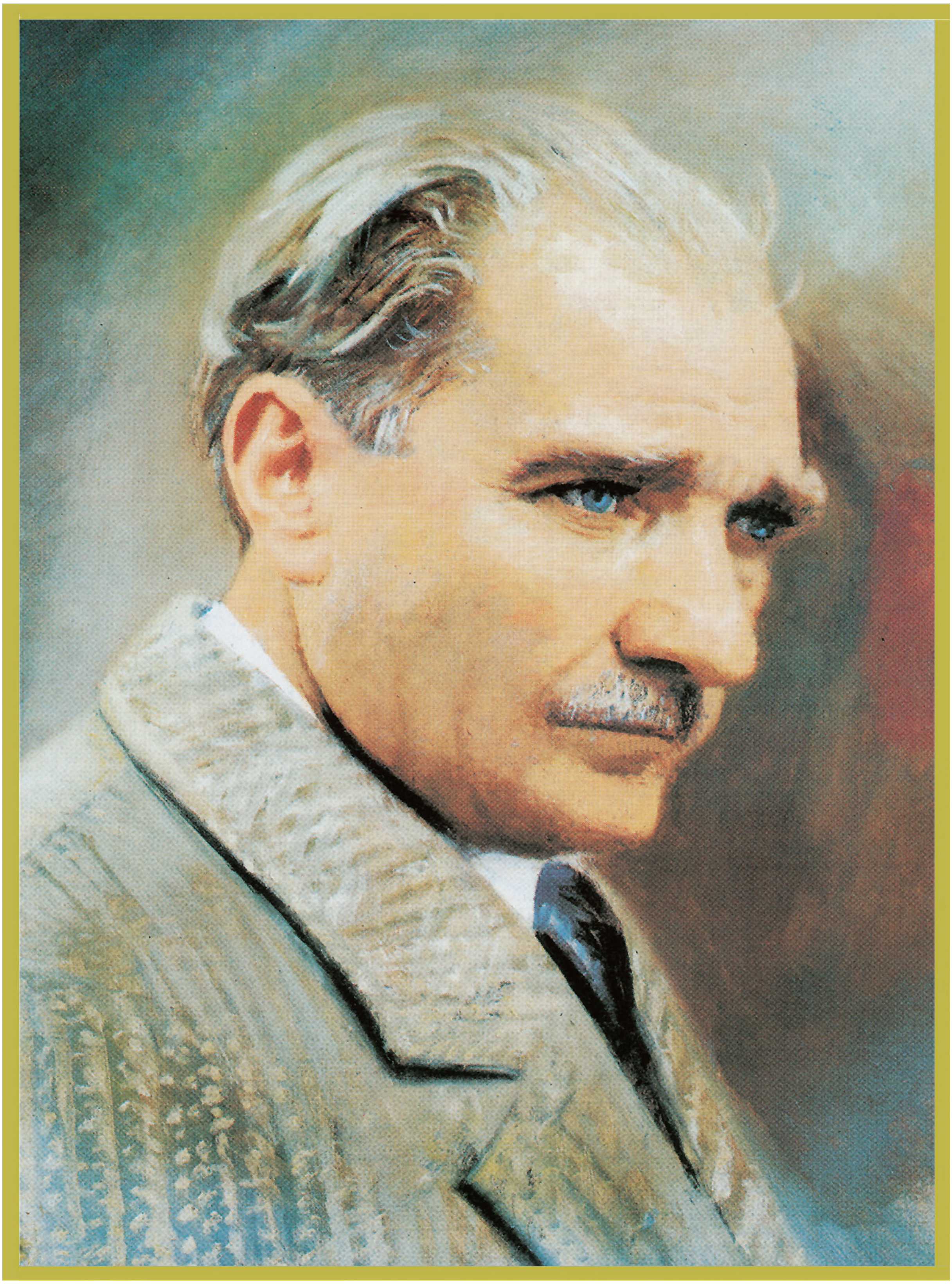
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

KİTABIMIZI TANIYALIM

Öğrenme alanının verildiği bölümdür.

Üniteye ait karekod.

Alt öğrenme alanının verildiği bölümdür.

İşlenecek konunun verildiği bölümdür.

Alt öğrenme alanı ile ilgili sembol ve gösterimlerin verildiği bölümdür.

Alt öğrenme alanı ile ilgili terimler ve kavramların verildiği bölümdür.

SAYILAR VE CEBİR

1. BÖLÜM

MANTIK

Konular

1.1. Önermeler ve Bileşik Önermeler

Sembol ve Gösterimler

p, p′ (veya ~ p),

≡, ∀, ∃, ∨, ∧, $\underline{\vee}$, ⇒, ⇔

Terimler ve Kavramlar

Önerme

Bileşik önerme

Alt öğrenme alanı ile ilgili motivasyonun verildiği bölümdür.

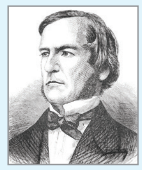
1. MANTIK

Mantık, anlamlı düşünme ve akıl yürütme sanatıdır. İnsanın serbest düşünmesine ve düşündüklerini açıkça ifade etmesine yardımcı olur. Her insan için düşünme çok önemlidir. Ancak daha da önemlisi bu düşüncenin doğrulardan yola çıkılması, bilinen ve kanıtlanan kaynaklardan elde edilmesidir. Bu yüzden matematik ve mantık çok yakın birer akrabadır.

Alt öğrenme alanı ile ilgili çalışmalar yapan bilim insanlarının verildiği bölümdür.

George Boole (Corç Buul)

İngiliz matematikçisi, mantıkçısı ve eğitimcisi olan George Boole, günümüzde Boole Cebiri olarak anılan modern simgesel mantığın kurulmasına katkıda bulunmuş ve mantık cebirini geliştirmiştir.



George Boole (Corç Buul) 1815 – 1864 (Temsilî)

Boole Cebiri, önermeler ya da nesneler arasındaki ilişkileri betimleyen simgesel bir mantık sistemidir. Değişken olarak adi cebirdeki gibi sayısal niceliklerin değil, doğruluk değerlerinin yani bir mantıksal önermenin doğruluk ya da yanlışlığının kullanıldığı durumlarda geçerlidir. Boole Cebiri'nin önemli bir üstünlüğü olan bu özellik, doğruluk değeri "1" ya da yanlışlık değeri "0" olabilen önermelerle işlem yapılmasına olanak sağlar. İki mantıksal önerme VE (simgesi ∧) ya da VEYA (simgesi ∨) mantıksal bağlaçlarından biri ile bağlanarak bir bileşik önerme oluşturulabilir. Böylece elde edilen bileşik önermenin doğruluk değeri, birbirine bağlanmış olan iki önermenin ayrı ayrı doğruluk değerleriyle kullanılan bağlacın türüne bağlıdır.

(Genel ağdan alınmıştır.)

İşlenecek kazanım ve sırasıyla alt öğrenme alan numarası, işlenecek konu numarası ve kazanım numarasının verildiği bölümdür.

1.1. ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

1.1.1. Önerme

Kazanıma ait bilgilerin verildiği bölümdür.

Bilgi

Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadelere önerme denir.

Önermeler genellikle p, q, r ve s gibi küçük harflerle gösterilir.

Kazanımla ilgili örneklerin verildiği bölümdür.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerden hangilerinin birer önerme olduğunu bulalım ve bu önermelerin doğru olup olmadıklarını inceleyelim.

a) Bir yıl 12 aydır.

b) Türkiye'nin başkenti Ankara'dır.

c) Tek doğal sayılar 2 ile tam bölünür.

ç) 12 bir asal sayıdır.

d) Nereye gidiyorsun?

e) Okula gidelim.

Örneklerin çözümlerinin verildiği bölümdür.

Çözüm

Verilenleri incelediğimizde a, b, c ve ç maddelerindeki ifadelerin doğru ya da yanlış bir hüküm bildirdiğini; d ve e maddelerindeki ifadelerin doğru ya da yanlış bir hüküm bildirmediğini görürüz. Bu durumda a, b, c ve ç maddelerindeki ifadeler birer önermeyken, d ve e maddelerindeki ifadeler önerme değildir.

Öğrencilerin öğrendiklerini pekiştirmeleri için soruların verildiği bölümdür.

PEKİŞTİRME SORULARI

Alt öğrenme alanı ile ilgili değerlendirme sorularının verildiği bölümdür.

1. BÖLÜM ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

Sembol	Anlamı	Sembol	Anlamı
p	p önermesi	$>$	Büyüktür
p', $\sim p$	p önermesinin değili	$\geq$	Büyüktür veya eşittir
$\equiv$	Denktir	$[a, b]$	a b kapalı aralığı
$\exists$	Bazı, en az bir	$(a, b]$	a'dan açık b den kapalı aralık
$\forall$	her	$[a, b)$	a'dan kapalı b den açık aralık
$\wedge$	ve	(a, b)	a b açık aralığı
$\vee$	veya	$(-\infty, \infty)$	Sayı doğrusu
$\Rightarrow$	ise	$\lvert x \rvert$	x'in mutlak değeri
$\Leftrightarrow$	ancak ve ancak	x^n	x'in n. kuvveti
$\underline{\vee}$	ya da	$\sqrt[n]{x^m}$	n. dereceden kök x'in m. kuvveti
$\in$	Elemanıdır	$x^{\frac{m}{n}}$	x'in $\left(\frac{m}{n}\right)$. kuvveti
$\notin$	Elemanı değil	%	Yüzde
$\varnothing$, { }	Boş küme	$\frac{a}{b}$	a'nın b'ye oranı (oran)
$\subset$, $\subseteq$	Alt küme	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	Orantı
$\supset$, $\supseteq$	Kapsar	EKOK	En küçük ortak kat
$\not\subset$	Alt küme değil	EBOB	En büyük ortak bölen
s(A)	A kümesinin eleman sayısı	$\overset{\triangle}{ABC}$	ABC üçgeni
$\cup$	Birleşim	$\widehat{ABC}$	ABC açısı
$\cap$	Kesişim	$m(\widehat{ABC})$	ABC açısının ölçüsü
$A - B$, $A \setminus B$	A fark B	[AB]	AB doğru parçası
A'	A kümesinin tümleyeni	$\lvert AB \rvert$	AB doğru parçasının uzunluğu
A x B	A kartezyen çarpım B	$\cong$	Eşlik
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi	$\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$	ABC üçgeni eştir DEF üçgeni
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi	n_A	A açısının açıortayı
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi	V_a	a kenarının kenarortayı
$\mathbb{Q}'$	İrrasyonel sayılar kümesi	G	Ağırlık merkezi
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi	h_a	a kenarının yüksekliği
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi	$\sim$	Benzerlik
$\mathbb{Q}^+$	Pozitif rasyonel sayılar kümesi	$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$	ABC üçgeni benzerdir DEF üçgeni
$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçek sayılar kümesi	sinx	x açısının sinüsü
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayılar kümesi	cosx	x açısının kosinüsü
$\mathbb{Q}^-$	Negatif rasyonel sayılar kümesi	tanx	x açısının tanjantı
$\mathbb{R}^-$	Negatif gerçek sayılar kümesi	cotx	x açısının kotanjantı
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Gerçek sayıların kartezyen çarpım kümesi	$A(\overset{\triangle}{ABC})$	ABC üçgeninin alanı
$\mathbb{R}^2$	Kartezyen koordinat sistemi	$\overline{X}$	Aritmetik ortalama
$<$	Küçüktür	S	Standart sapma
$\leq$	Küçüktür veya eşittir	$\approx$	Yaklaşık

SAYILAR VE CEBİR

1. BÖLÜM

MANTIK

Konular

1.1. Önermeler ve Bileşik Önermeler

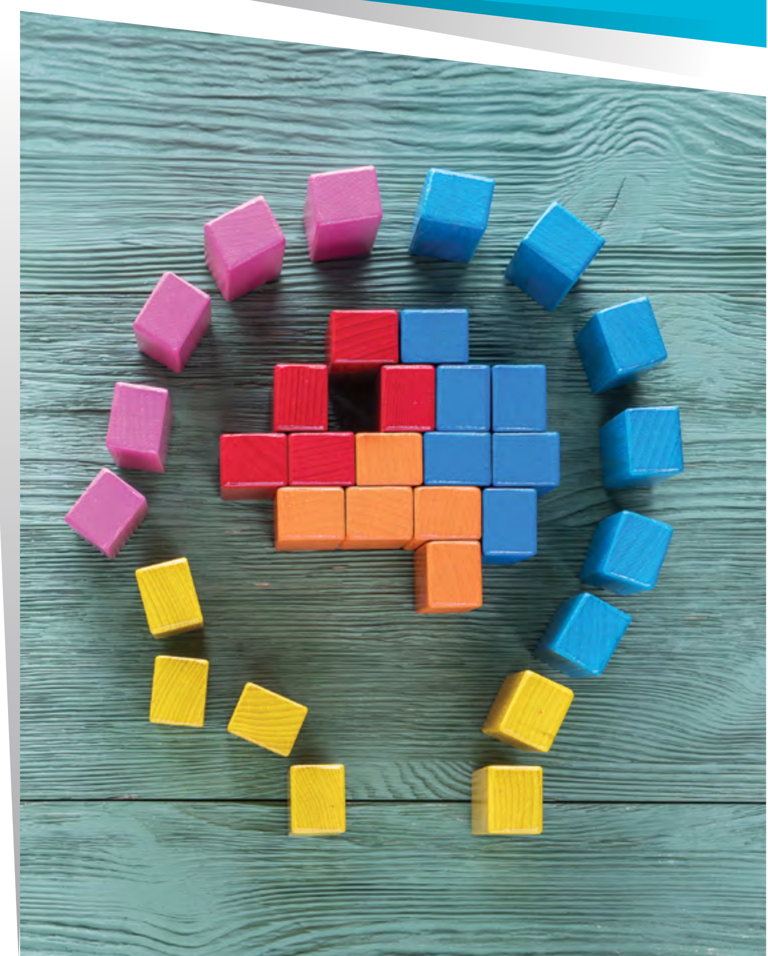
Sembol ve Gösterimler

p , p′ (veya ~ p),

$\equiv$, $\forall$, $\exists$, $\vee$, $\wedge$, $\underline{\vee}$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

Terimler ve Kavramlar

Önerme
Bileşik önerme
Önermenin değili
Ve bağlacı
Veya bağlacı
Ya da bağlacı
De Morgan kuralları
Koşullu önerme
Koşullu önermenin tersi
Koşullu önermenin karşıtı
Koşullu önermenin karşıt tersi
İki yönlü koşullu önerme (gerek ve yeter şart)
Açık önerme
Her
Bazı
Tanım
Aksiyom
Teorem
İspat
Hipotez
Hüküm



1. MANTIK

Mantık, Antik Çağ'da doğru düşüncenin yasalarını inceleyen bir felsefe disiplini olarak doğmuş, yakın zamanlarda matematiğin bir uzantısı olarak görülmüş, giderek konuşma dilinin anlaşılmasında kullanılan bir araç hâlini almış, günümüzde ise yapay zekâ çalışmalarında vazgeçilmez bir yere sahip olmuş, bağımsız bir inceleme alanıdır.

Bir bilim olarak mantığın özelliği; içeriksiz, yapay, yani formel (biçimsel) bir dil olmasıdır. Böyle bir dil, tıpkı matematik gibi nesnel bir özelliğe sahiptir. Nesnel bir dil, çıkarım işleminin denetlenebilir olmasına olanak verir.

Mantıksal çıkarım, önerme seviyesinde başlar. Mantık açısından önerme; özne, yüklem ve bağlaçtan oluşan, dolayısıyla doğruluk değeri taşıyan bir yargı demektir. Mantıksal çıkarımın konusu, önermeler arasındaki ilişkidir. Mantık, önermeler arası çıkarım ilişkilerinin nesnel olarak ifade edilebilmesine ve denetlenebilmesine olanak veren bir bilimdir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Gottfried Wilhelm Leibniz (Gotfred Vılyım Laypniz)

Usavurma (Bilinen ya da doğru olarak kabul edilen belli önermelerden başka önermeler çıkarma) sürecini, konuşulan dilden bağımsız kılarak ona matematiksel bir yapı kazandırmaya çalışan ilk kişi Alman matematikçi Leibniz'dir (Laypniz).

Leipzig'de doğan Gottfried Wilhelm Leibniz, yaşamının büyük bir bölümünü Hanover Sarayı'nın civarında, içlerinden biri sonrada George I. adıyla İngiltere kralı olan düklerin emrinde geçirdi. İlgi alanları felsefe, tarih, din, dil bilim, biyoloji, jeoloji, matematik, diplomasi ve buluş sanatını kapsıyordu.

Çin felsefesiyle ilgilendi. Bilgi edinebileceği, icatlar yapabileceği ve evrenin vazgeçilmez bütünlüğünü anlamasını sağlayacak evrensel bir yöntem arayışı, hayatının asıl amacıydı. Bu arayışlar onun matematikte buluşlar yapmasını sağladı ve onu permütasyon, kombinasyon ve simgesel mantığa götürdü.

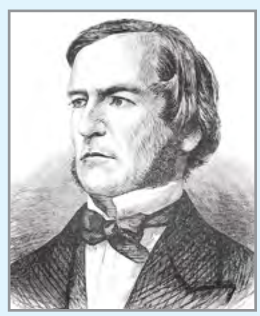
Gottfried Wilhelm Leibniz (Gotfred Vılyım Laypniz) 1646 – 1716 (Temsilî)

(Kısa Matematik Tarihi)

George Boole (Corç Buul)

İngiliz matematikçisi, mantıkçısı ve eğitimcisi olan George Boole, günümüzde Boole Cebiri olarak anılan modern simgesel mantığın kurulmasına katkıda bulunmuş ve mantık cebirini geliştirmiştir.

Boole Cebiri, önermeler ya da nesneler arasındaki ilişkileri betimleyen simgesel bir mantık sistemidir. Değişken olarak adi cebirdeki gibi sayısal niceliklerin değil, doğruluk değerlerinin yani bir mantıksal önermenin doğruluk ya da yanlışlığının kullanıldığı durumlarda geçerlidir. Boole Cebiri'nin önemli bir üstünlüğü olan bu özellik, doğruluk değeri "1" ya da yanlışlık değeri "0" olabilen önermelerle işlem yapılmasına olanak sağlar. İki mantıksal önerme VE (simgesi $\wedge$) ya da VEYA (simgesi $\vee$) mantıksal bağlaçlarından biri ile bağlanarak bir bileşik önerme oluşturulabilir. Böylece elde edilen bileşik önermenin doğruluk değeri, birbirine bağlanmış olan iki önermenin ayrı ayrı doğruluk değerleriyle kullanılan bağlacın türüne bağlıdır.



George Boole (Corç Buul) 1815 – 1864 (Temsilî)

(Genel ağdan alınmıştır.)

1.1. ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

1.1.1. Önerme

Bilgi

Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadelere **önerme** denir.

Önermeler genellikle p, q, r ve s gibi küçük harflerle gösterilir.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerden hangilerinin birer önerme olduğunu bulalım ve bu önermelerin doğru olup olmadıklarını inceleyelim.

a) Bir yıl 12 aydır.
b) Türkiye'nin başkenti Ankara'dır.
c) Tek doğal sayılar 2 ile tam bölünür.
ç) 12 bir asal sayıdır.
d) Nereye gidiyorsun?
e) Okula gidelim.

Çözüm

Verilenleri incelediğimizde a, b, c ve ç maddelerindeki ifadelerin doğru ya da yanlış bir hüküm bildirdiğini; d ve e maddelerindeki ifadelerin doğru ya da yanlış bir hüküm bildirmediğini görürüz. Bu durumda a, b, c ve ç maddelerindeki ifadeler birer önermeyken, d ve e maddelerindeki ifadeler önerme değildir.

a ve b maddelerindeki ifadeler doğru hüküm bildirdikleri için birer doğru önerme, c ve ç maddelerindeki ifadeler yanlış hüküm bildirdikleri için birer yanlış önermedir.

Bilgi

Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasına o önermenin **doğruluk değeri** denir.

Bir önerme doğru ise doğruluk değeri "1" veya "D" ile yanlış ise "0" veya "Y" ile gösterilir. Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya **doğruluk tablosu** denir.

Bir p önermesi doğru ise bunu "$p \equiv 1$" biçiminde gösterir, "p denktir 1" diye okuruz. p önermesi yanlış ise bunu "$p \equiv 0$" biçiminde gösterir, "p denktir 0" diye okuruz.

p
1
0

Doğruluk tablosu

Örnek

Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

p : "Kedi dört ayaklı bir hayvandır."

q : "Bir yıl 4 mevsimdir."

r : "$3 + 2 = 7$"

s : "Bütün asal sayılar tektir."

Çözüm

p ve q önermeleri doğru, r ve s önermeleri yanlıştır. Bu durumda önermelerin doğruluk değerleri

$p \equiv 1$, $q \equiv 1$, $r \equiv 0$, $s \equiv 0$ biçiminde bulunur.

Örnek

a) Bir önerme için

b) İki önerme için

c) Üç önerme için

doğruluk tabloları oluşturalım.

Çözüm

a) Bir p önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

p
D
Y

p
1
0

Bir önerme için iki farklı doğruluk durumu söz konusudur.

$2^{1} = 2$ Önerme sayısı

b) p ve q önermelerinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

p	q
D	D
D	Y
Y	D
Y	Y

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

İki önerme için dört farklı doğruluk durumu söz konusudur.

$2^{2} = 4$ Önerme sayısı

c) p, q, r önermelerinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

p	q	r
D	D	D
D	D	Y
D	Y	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Üç önerme için 8 farklı doğruluk durumu söz konusudur.

$2^{3} = 8$ Önerme sayısı

Bilgi

n farklı önerme için 2^n tane farklı doğruluk durumu vardır.

Örnek

6 farklı önerme için kaç farklı doğruluk durumu olduğunu bulalım.

Çözüm

6 farklı önerme için $2^6 = 64$ farklı doğruluk durumu vardır.

Örnek

Kaç farklı önerme için 32 farklı doğruluk durumu olduğunu bulalım.

Çözüm

$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ olduğundan 5 farklı önerme için 32 farklı doğruluk durumu vardır.

Bilgi

Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye **denk önermeler** denir.

p ve q önermeleri denk ise "$p \equiv q$" biçiminde, denk değil ise "$p \not\equiv q$" biçiminde gösterilir.

Örnek

Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulalım. Bu önermelerden birbirine denk olanları belirleyelim.

p : "4 bir çift sayıdır."

q : "Dünya, Güneş'in etrafında döner."

r : "Kedi, kanatlı bir hayvandır."

s : "Dikdörtgenin bütün kenar uzunlukları eşittir."

Çözüm

p ve q önermelerinin doğruluk değerleri 1, r ve s önermelerinin doğruluk değerleri 0'dır.

Bu durumda

$p \equiv q \equiv 1, \quad r \equiv s \equiv 0$ olur.

Bilgi

Bir önermenin hükmünün değiştirilmesiyle elde edilen önermeye o önermenin **değili (olumsuzu)** denir. Bir p önermesinin değili "p'" veya "$\sim p$" ile gösterilir.

$p \equiv 1$ ise $p' \equiv 0$, $p \equiv 0$ ise $p' \equiv 1$ olur.

Bir önermenin değilinin değili önermenin kendisidir.

$(p')' \equiv p$

p	p'	$(p')'$
1	0	1
0	1	0

Örnek

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulalım. Bulduğumuz önermelerin doğruluk değerlerini belirleyelim.

p : "$7 + 3 = 10$"

q : "Bir hafta 7 gündür."

r : "Haziran ayı 30 gün değildir."

s : "Çift sayılar 2 ile tam bölünmez."

Çözüm

p' : "$7 + 3 \neq 10$" p önermesi doğru ve p' önermesi yanlıştır. $p \equiv 1$, $p' \equiv 0$

q' : "Bir hafta 7 gün değildir."

q önermesi doğru ve q' önermesi yanlıştır. $q \equiv 1$, $q' \equiv 0$

r' : "Haziran ayı 30 gündür." r önermesi yanlış ve r' önermesi doğrudur. $r \equiv 0$, $r' \equiv 1$

s' : "Çift sayılar 2 ile tam bölünür." s önermesi yanlış ve s' önermesi doğrudur. $s \equiv 0$, $s' \equiv 1$

Örnek

Aşağıdaki tabloda bazı semboller ve değilleri verilmiştir.

Sembol	Değili
"=" eşittir.	"≠" eşit değildir.
">" büyüktür.	"≤" küçük veya eşittir.
"≥" büyük veya eşittir.	"<" küçüktür.
"<" küçüktür.	"≥" büyük veya eşittir.
"≤" küçük veya eşittir.	">" büyüktür.

Buna göre p: "4 < 6" önermesinin değilini bulalım.

Çözüm

Önermenin değili p′ : "4 ≥ 6" biçiminde olur.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden hangisi veya hangileri önermedir? Önerme olanların doğruluk değerlerini bulunuz.

a) 7 bir asal sayıdır.

b) En küçük pozitif tam sayı 2'dir.

c) Sinemaya gidelim.

ç) Kaz dört ayaklı bir hayvandır.

d) Arabayı getirdin mi?

2. Aşağıda verilen önermelerden birbirine denk olanları belirleyiniz.

p : "4 > 3"

q : "Dörtgenin iç açı ölçüleri toplamı 180°dir."

r : "Bütün tam sayıların karesi pozitif tam sayıdır."

s : "Asal sayılar pozitif tam sayıdır."

3. Aşağıda verilen önermelerin değillerini bulunuz.

p : "Köpek evcil hayvandır."

q : "648 sayısı 2 ile tam bölünür."

r : "Türkiye 7 coğrafi bölgeden oluşur."

s : "–7 + 5 < 10 – 8"

t : "7'nin karesi 49'dur."

v : "Ay bir gezegendir."

4. 8 farklı önerme için kaç farklı doğruluk durumu vardır?

A) 16 B) 32 C) 64 D) 128 E) 256

5. n – 3 tane farklı önerme için 128 farklı doğruluk durumu olduğuna göre n kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

6. Aşağıdaki ifadelerden hangisi "Mart ayında 30 gün vardır." önermesinin değilidir?

A) Mart ayında 30 gün olabilir.

B) Mart ayında 30 gün yoktur.

C) Mart ayında 30 gün olmayabilir.

D) Mart ayında 31 günden daha az gün vardır.

E) Mart ayında 30 günden daha az gün vardır.

7. $p' \equiv q' \equiv r' \equiv s$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $p \equiv r$ B) $q' \equiv s'$ C) $p \equiv s'$

D) $r \equiv s'$ E) $q \equiv r$

1.1.2. Bileşik Önermeler

Bilgi

En az iki önermenin “ve”, “veya”, “ya da”, “ise”, “ancak ve ancak” gibi bağlaçlarla birbirine bağlanmasıyla elde edilen yeni önermeye **bileşik önerme** denir.

Örnek

p : “Barış, İstanbul’a uçakla gider.”
q : “Barış, İstanbul’a trenle gider.”
n : “3 bir doğal sayıdır.”
r : “3 sıfırdan büyüktür.”
s : “Hilal müzik dersini seçti.”
t : “Hilal görsel sanatlar dersini seçti.”
u : “Ahmet Anıtkabir’dedir.”
v : “Ahmet Ankara’dadır.”
y : “Halil 15 Temmuz Şehitler Anıtı’ndadır.”
z : “Halil İstanbul’dadır.”

Buna göre;

a) p ile q b) n ile r c) s ile t ç) u ile v d) y ile z

önermelerini kullanarak uygun bağlaçlar yardımıyla yeni önermeler elde edelim.

Çözüm

a) Barış İstanbul’a uçak veya trenle gider.
b 3 bir doğal sayıdır ve sıfırdan büyüktür.
c) Hilal müzik ya da görsel sanatlar dersini seçti.
ç) Ahmet Anıtkabir’de ise Ankara’dadır.
d) Halil 15 Temmuz Şehitler Anıtı’ndadır ancak ve ancak Halil İstanbul’dadır.

“ ve ” Bağlacı

Örnek

Babası Ercan’dan “Elma ve armut getir.” şeklinde bir istekte bulunmuştur.
Buna göre hangi durumda Ercan’ın babasının isteği yerine gelmiştir? İnceleyelim.

Çözüm

Ercan elma ve armut getirdiyse babasının isteği yerine gelmiştir.
Ercan elma getirdi, armut getirmediyse babasının isteği yerine gelmemiştir.
Ercan elma getirmedi, armut getirdiyse babasının isteği yerine gelmemiştir.
Ercan elma ve armuttan hiçbirini getirmediyse babasının isteği yerine gelmemiştir.

Bilgi

“ve” bağlacı “$\wedge$” sembolü ile gösterilir. p ile q önermeleri “ve” bağlacı ile “$p \wedge q$” biçiminde gösterilir, “p ve q” diye okunur.

“$p \wedge q$” bileşik önermesinin doğruluk değeri, p ile q önermelerinin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

“$p \wedge q$” bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibi oluşturulur.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Örnek

p : “2 bir asal sayıdır.”

q : “3 < 4”

önermeleri için $p \wedge q$ bileşik önermesini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

Bileşik önerme, $p \wedge q$: “2 bir asal sayıdır ve 3 < 4’tür.” şeklinde yazılır.

$p \equiv 1$, $q \equiv 1$ olduğundan $p \wedge q \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$(0 \wedge 1)' \wedge 1$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$(0 \wedge 1)' \wedge 1 \equiv 0' \wedge 1 \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$p \wedge 0$, $p \wedge 1$, $p \wedge p'$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerini, doğruluk tablosu yaparak bulalım.

Çözüm

p	p'	1	0	$p \wedge 0$	$p \wedge 1$	$p \wedge p'$
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0

$$p \wedge 0 \equiv p \wedge p' \equiv 0$$

$$p \wedge 1 \equiv p$$

Bilgi

$p \wedge p' \equiv 0$, $p \wedge 1 \equiv p$, $p \wedge 0 \equiv 0$ olur.

Örnek

$(p \wedge p') \wedge (p \wedge 1)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$(p \wedge p') \wedge (p \wedge 1) \equiv 0 \wedge p \equiv 0$ olarak elde edilir.

“veya” Bağlacı

Örnek

Ayşe evden okula tren veya dolmuşla gidecektir. Ancak Ayşe tren ve dolmuşun çalışıp çalışmadığını bilmemektedir. Ayşe’nin hangi durumda okula gidebileceğini inceleyelim.

Çözüm

Tren ve dolmuşun her ikisi de çalışıyorsa Ayşe okula gidebilir. Tren çalışıyor, dolmuş çalışmıyorsa Ayşe okula gidebilir. Tren çalışmıyor, dolmuş çalışıyorsa Ayşe okula gidebilir. Tren ve dolmuştan her ikisi de çalışmıyorsa Ayşe okula gidemez.

Bilgi

“veya” bağlacı “∨” sembolü ile gösterilir. p ile q önermeleri “veya” bağlacı ile “$p \vee q$” biçiminde gösterilir, “p veya q” diye okunur.

“$p \vee q$” bileşik önermesinin doğruluk değeri, p ile q önermelerinin her ikisi de yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

“$p \vee q$” bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibi oluşturulur.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Örnek

p : “$5 < 2$”

q : “İki tek doğal sayının toplamı tek doğal sayıdır.”

önermeleri için $p \vee q$ bileşik önermesini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

Bileşik önerme,

$p \vee q$: “$5 < 2$ veya iki tek doğal sayının toplamı tek doğal sayıdır.” şeklinde yazılır.

$p \equiv 0$, $q \equiv 0$ olduğundan $p \vee q \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$ olarak elde edilir.

Örnek

Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) $(1 \vee 0') \vee 1$ b) $(1 \vee 1') \vee 0$

Çözüm

a) $(1 \vee 0') \vee 1 \equiv (1 \vee 1) \vee 1 \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$

b) $(1 \vee 1') \vee 0 \equiv (1 \vee 0) \vee 0 \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$p \vee 0$, $p \vee 1$, $p \vee p'$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerini, doğruluk tablosu yaparak bulalım.

Çözüm

p	p′	1	0	$p \vee 0$	$p \vee 1$	$p \vee p'$
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1

$p \vee 1 \equiv p \vee p' \equiv 1$

$p \vee 0 \equiv p$

Bilgi

$p \vee 0 \equiv p$, $p \vee 1 \equiv 1$, $p \vee p' \equiv 1$ olur.

Örnek

$(p \vee p') \wedge (p \vee 1)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$(p \vee p') \wedge (p \vee 1) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) $(1 \vee 1') \vee (0 \wedge 1)$

b) $(1 \wedge 1') \vee 0$

Çözüm

a) $(1 \vee 1') \vee (0 \wedge 1) \equiv (1 \vee 0) \vee (0 \wedge 1) \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$

b) $(1 \wedge 1') \vee 0 \equiv (1 \wedge 0) \vee 0 \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$ olarak elde edilir.

"ve", "veya" Bağlaçları ile Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

1) Her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	$p \wedge p$	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

$p \wedge p \equiv p \vee p \equiv p$

Bilgi

$p \wedge p \equiv p$, "$\wedge$"nin tek kuvvet özelliği vardır.

$p \vee p \equiv p$, "$\vee$"nın tek kuvvet özelliği vardır.

2) Her p , q önermeleri için $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $\quad$ $p \vee q \equiv q \vee p$

Bilgi

$p \wedge q \equiv q \wedge p$, "$\wedge$"nin değişme özelliği vardır.

$p \vee q \equiv q \vee p$, "$\vee$"nın değişme özelliği vardır.

3) Her p, q ve r önermeleri için $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

Bilgi

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$, "$\wedge$"nin birleşme özelliği vardır.

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, "$\vee$"nın birleşme özelliği vardır.

4) Her p, q ve r önermeleri için $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

Bilgi

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, "$\wedge$"nin "$\vee$" üzerine soldan dağılma özelliği vardır.

$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, "$\wedge$"nin "$\vee$" üzerine sağdan dağılma özelliği vardır.

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, "$\vee$"nın "$\wedge$" üzerine soldan dağılma özelliği vardır.

$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, "$\vee$"nın "$\wedge$" üzerine sağdan dağılma özelliği vardır.

Örnek

$(p \vee q) \vee p'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$(p \vee q) \vee p' \equiv (p \vee p') \vee q \equiv 1 \vee q \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$p \wedge q \equiv 0$, $p \wedge r \equiv 0$ olduğuna göre $p \wedge (q \vee r)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($\wedge$'nin $\vee$ üzerine soldan dağılma özelliği)

$\equiv 0 \vee 0$

$\equiv 0$ olarak bulunur.

"ya da" Bağlacı

Örnek

Merkez Anadolu Lisesinde biri bayan diğeri erkek olmak üzere sadece iki öğretmen, okulu temsilen bir toplantıya katılacaktır. Okul idaresi bayan öğretmen olarak Eda Hanım'ı görevlendirmiştir. Erkek öğretmen olarak da Mesut Bey ya da Kemal Bey'den birinin toplantıya katılmasını istemektedir.

Buna göre hangi durumda iki öğretmenin toplantıya katılabileceğini inceleyelim.

Çözüm

Eda Hanım'ın yanında hem Mesut Bey hem de Kemal Bey seçilirse toplantıya katılamazlar.
Eda Hanım'ın yanında yalnız Mesut Bey seçilirse toplantıya katılabilirler.
Eda Hanım'ın yanında yalnız Kemal Bey seçilirse toplantıya katılabilirler.
Eda Hanım'ın yanında hem Mesut Bey hem de Kemal Bey seçilmemişse toplantıya katılamazlar.

Bilgi

"ya da" bağlacı "$\underline{\vee}$" sembolü ile gösterilir. p ve q önermeleri "$\underline{\vee}$" bağlacı ile "$p \underline{\vee} q$" biçiminde gösterilir, "p ya da q" diye okunur.

"$p \underline{\vee} q$" bileşik önermesinin doğruluk değeri, önermelerden biri doğru biri yanlış iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

$p \underline{\vee} q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibi oluşturulur.

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Örnek

p : “11 asal sayıdır.”

q : “En büyük rakam 11’dir.”

önermeleri için $p \underline{\vee} q$ bileşik önermesini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

Bileşik önerme, $p \underline{\vee} q$: “11 asal sayıdır ya da en büyük rakam 11’dir.” şeklinde yazılır.

$p \equiv 1$, $q \equiv 0$ olduğundan $p \underline{\vee} q \equiv 1 \underline{\vee} 0 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$(0 \underline{\vee} 0') \underline{\vee} 1'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$(0 \underline{\vee} 0') \underline{\vee} 1' \equiv (0 \underline{\vee} 1) \underline{\vee} 0 \equiv 1 \underline{\vee} 0 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$p \underline{\vee} p$, $p \underline{\vee} p'$, $p \underline{\vee} 1$, $p \underline{\vee} 0$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerini doğruluk tablosu yaparak bulalım.

Çözüm

p	p'	1	0	$p \underline{\vee} p$	$p \underline{\vee} p'$	$p \underline{\vee} 1$	$p \underline{\vee} 0$
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0

$p \underline{\vee} p \equiv 0$

$p \underline{\vee} p' \equiv 1$

$p \underline{\vee} 1 \equiv p'$

$p \underline{\vee} 0 \equiv p$

Bilgi

$p \underline{\vee} p \equiv 0$, $p \underline{\vee} p' \equiv 1$, $p \underline{\vee} 1 \equiv p'$, $p \underline{\vee} 0 \equiv p$

Örnek

$(p \underline{\vee} 1) \underline{\vee} (p \underline{\vee} 0)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$(p \underline{\vee} 1) \underline{\vee} (p \underline{\vee} 0) \equiv p' \underline{\vee} p$

$\equiv 1$ olarak elde edilir.

" ya da " Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

1) Her p, q önermeleri için $p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	$p \underline{\vee} q$	$q \underline{\vee} p$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$

Bilgi

$p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$, "$\underline{\vee}$"nın değişme özelliği vardır.

2) Her p, q, r önermeleri için $(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \equiv p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	r	$p \underline{\vee} q$	$q \underline{\vee} r$	$(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r$	$p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \equiv p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$

Bilgi

$(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \equiv p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$, "$\underline{\vee}$"nın birleşme özelliği vardır.

Örnek

Aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) $(p \underline{\vee} 1) \wedge (p \underline{\vee} p)$

b) $(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} (p' \underline{\vee} q')$

Çözüm

a) $(p \underline{\vee} 1) \wedge (p \underline{\vee} p) \equiv p' \wedge 0 \equiv 0$

b) $(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} (p' \underline{\vee} q') \equiv (p \underline{\vee} p') \underline{\vee} (q \underline{\vee} q') \equiv 1 \underline{\vee} 1 \equiv 0$ olarak bulunur.

De Morgan Kuralları

Örnek

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$, $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

Çözüm

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ $\quad$ $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

Bilgi

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ denklikleri

Augustus de Morgan (Ogus dö Morgan) tarafından bulunduğu için

"De Morgan Kuralları" olarak bilinmektedir.

Augustus de Morgan
(Ogus dö Morgan)
1806 – 1871

Örnek

$[(1 \wedge 0') \vee (1 \vee 0)]'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$[(1 \wedge 0') \vee (1 \vee 0)]' \equiv [(1 \wedge 1) \vee (1 \vee 0)]' \equiv (1 \vee 1)' \equiv 1' \equiv 0$ olarak elde edilir.

Örnek

$p' \wedge (q \vee r)' \equiv 1$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm

$p' \wedge (q \vee r)' \equiv 1$ $\quad$ $p' \equiv 1$ ise $p \equiv 0$

$p' \equiv 1, (q \vee r)' \equiv 1$ $\quad$ $q' \wedge r' \equiv 1$ ise $q \equiv 0, r \equiv 0$ olarak elde edilir.

$q' \equiv 1$ $\quad$ $r' \equiv 1$

Örnek

$(p \vee 1)\ \underline{\vee}\ [(p \wedge q) \vee (p \wedge q')]$ bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$(p \vee 1)\ \underline{\vee}\ [\underbrace{(p \wedge q) \vee (p \wedge q')}_{p \wedge (q \vee q')}] \equiv 1\ \underline{\vee}\ [p \wedge (q \vee q')]$$

$$\equiv 1\ \underline{\vee}\ (p \wedge 1) \equiv 1\ \underline{\vee}\ p \equiv p'$$ olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına “D”, yanlış olanların başına “Y” yazınız.

(.......) $\vee$’nın değişme özelliği vardır.

(.......) $\underline{\vee}$’nın birleşme özelliği vardır.

(.......) $\wedge$’nin tek kuvvet özelliği vardır.

(.......) $\vee$’nın $\underline{\vee}$ üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

2. I. $\vee$ ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk değeri önermelerin her ikisi de yanlış iken yanlıştır.

II. $\underline{\vee}$ ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk değeri, önermelerin her ikisi de doğru ise doğrudur.

III. $\wedge$ ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk değeri, önermelerin her ikisi de doğru iken doğrudur.

IV. $\vee$’nın $\wedge$ üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

V. $\underline{\vee}$’nın tek kuvvet özelliği vardır.

Yukarıda verilen ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $p \equiv 1,\ q \equiv 0,\ r \equiv 1$

olduğuna göre aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$ b) $p \wedge (q \vee r)'$

c) $(q' \underline{\vee} r)'$ ç) $p \underline{\vee} (q \wedge r)'$

4. $[(p' \underline{\vee} p) \wedge (q \underline{\vee} 1)] \wedge q$

bileşik önermesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) p B) q C) 0 D) q′ E) 1

5. $[(0 \underline{\vee} 1') \vee (0' \vee 1)]'$

bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

6. $[(q \vee 1') \underline{\vee} (p \wedge p')]'$

bileşik önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) p B) p′ C) q D) q′ E) 0

7. $p \vee (q \wedge r)' \equiv 0$

olduğuna göre p, q, r önermelerinin doğruluk değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0, 1, 1 B) 0, 0, 0 C) 1, 1, 0 D) 1, 1, 1 E) 1, 0, 1

8. p : “7 bir çift sayıdır.”

q : “Bir tek sayının 3 katının 1 fazlası tek sayıdır.”

r : $11 < 13$

önermeleri veriliyor.

Buna göre aşağıda istenen bileşik önermeleri yazıp doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $p \vee q$ b) $p \vee (q \wedge r')$

c) $q \underline{\vee} r$ ç) $p \wedge (q' \wedge r)$

d) $(p \vee q)'$ e) $q \underline{\vee} r$

f) $p \underline{\vee} (q' \vee r)$ g) $p \vee (q \underline{\vee} r)$

h) $p' \underline{\vee} q'$ ı) $(q \wedge r)'$

9. Aşağıdaki ifadelerden hangisi “1”e denktir?

A) $p \vee p$ B) $p \wedge p$ C) $p \underline{\vee} p$ D) $p \vee 0$ E) $p \vee 1$

1.1.3. Koşullu Önerme ve İki Yönlü Koşullu Önerme

Koşullu Önerme

Örnek

Lise öğrencisi olan Mustafa okul temsilciliğine adaylığını koymak istemektedir. Bunun için Mustafa seçim konuşmalarında “Eğer seçilirsem okul girişine engelli rampası yaptıracağım.” sözünü vermiştir. Buna göre Mustafa’nın hangi durumlarda sözünü tuttuğunu inceleyelim.

Çözüm

Mustafa temsilci seçilir ve engelli rampasını yaptırırsa sözünü tutmuş olur.

Mustafa temsilci seçilir ve engelli rampasını yaptırmaz ise sözünü tutmamış olur.

Mustafa temsilci seçilemez ve engelli rampasını yaptırırsa sözünü tutmuş olur.

Mustafa, temsilci seçilemez ve engelli rampasını yaptırmazsa Mustafa’ya sözünü tutmamıştır diyemeyiz. Mustafa’nın sözünü tutabileceğini kabul etmeliyiz.

Bilgi

“ise” bağlacı “$\Rightarrow$” sembolü ile gösterilir. p ile q önermeleri “ise” bağlacı ile “$p \Rightarrow q$” biçiminde gösterilir, “p ise q” diye okunur.

“$p \Rightarrow q$” bileşik önermesinin doğruluk değeri, birinci önermenin doğru ikinci önermenin yanlış olması durumunda yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

“$p \Rightarrow q$” bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibi oluşturulur.

Bu bileşik önermeye koşullu önerme denir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Örnek

p : “4 bir asal sayıdır.”

q : “27, 9’un katıdır.”

önermeleri için $p \Rightarrow q$ bileşik önermesini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

Bileşik önerme, $p \Rightarrow q$: “4 bir asal sayı ise 27, 9’un katıdır.” şeklinde yazılır.

$p \equiv 0$, $q \equiv 1$ olduğundan $p \Rightarrow q \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ olmak üzere aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) $p \Rightarrow (q \vee r)$ b) $p' \Rightarrow (q \veebar r)$ c) $p \Rightarrow (q' \wedge r')$

Çözüm

a) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 1 \Rightarrow (0 \vee 0) \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$

b) $p' \Rightarrow (q \veebar r) \equiv 1' \Rightarrow (0 \veebar 0) \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$

c) $p \Rightarrow (q' \wedge r') \equiv 1 \Rightarrow (0' \wedge 0') \equiv 1 \Rightarrow (1 \wedge 1) \equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$p \Rightarrow q$ ve $p' \vee q$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerini doğruluk tablosu yaparak bulalım.

Çözüm

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

Bilgi

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ olur.

Örnek

$p \Rightarrow (p \vee q)$ bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$p \Rightarrow (p \vee q) \equiv p' \vee (p \vee q) \equiv (p' \vee p) \vee q \equiv 1 \vee q \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$(q' \Rightarrow p)' \wedge (q \vee 0)$ bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$(q' \Rightarrow p)' \wedge (q \vee 0) \equiv (q \vee p)' \wedge q \equiv (q' \wedge p') \wedge q \equiv (q' \wedge q) \wedge p' \equiv 0 \wedge p' \equiv 0$ olarak elde edilir.

Örnek

$p \Rightarrow p'$, $p' \Rightarrow p$, $p \Rightarrow 0$, $0 \Rightarrow p$, $p \Rightarrow 1$, $1 \Rightarrow p$, $p \Rightarrow p$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerini doğruluk tablosu yaparak bulalım.

Çözüm

p	p'	0	1	$p \Rightarrow p'$	$p' \Rightarrow p$	$p \Rightarrow 0$	$0 \Rightarrow p$	$p \Rightarrow 1$	$1 \Rightarrow p$	$p \Rightarrow p$
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1

$p \Rightarrow p' \equiv p \Rightarrow 0 \equiv p'$

$p \Rightarrow 1 \equiv 0 \Rightarrow p \equiv p \Rightarrow p \equiv 1$

$p' \Rightarrow p \equiv 1 \Rightarrow p \equiv p$

Bilgi

$p \Rightarrow p' \equiv p'$, $p \Rightarrow 0 \equiv p'$, $p' \Rightarrow p \equiv p$, $1 \Rightarrow p \equiv p$, $p \Rightarrow 1 \equiv 1$, $0 \Rightarrow p \equiv 1$, $p \Rightarrow p \equiv 1$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen bileşik önermeleri en sade biçimde yazalım.

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p'$ b) $(p \Rightarrow 0) \wedge p$ c) $[(1 \Rightarrow p)' \Rightarrow 0] \underline{\vee} p$

Çözüm

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p' \equiv (p' \vee q)' \vee p' \equiv (p \wedge q') \vee p' \equiv (p \vee p') \wedge (q' \vee p') = 1 \wedge (q' \vee p') = q' \vee p'$

b) $(p \Rightarrow 0) \wedge p \equiv p' \wedge p \equiv 0$

c) $[(1 \Rightarrow p)' \Rightarrow 0] \underline{\vee} p \equiv (p' \Rightarrow 0) \underline{\vee} p \equiv [(p')' \vee 0] \underline{\vee} p \equiv (p \vee 0) \underline{\vee} p \equiv p \underline{\vee} p \equiv 0$

olarak elde edilir.

Örnek

$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv 0$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm

$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv 0$ ise $r \equiv 0$ ve $p \wedge q \equiv 1$ olur.

$p \wedge q \equiv 1 \Rightarrow p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ elde edilir.

Örnek

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin değilini bulalım.

Çözüm

$(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$ olarak elde edilir.

Örnek

p : "Kader okuldan mezun oldu."

q : "Kader diplomasını almıştır."

Yukarıdaki önermeleri kullanarak $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p' \Rightarrow q'$ ve $q' \Rightarrow p'$ bileşik önermelerini oluşturalım.

Çözüm

$p \Rightarrow q$: "Kader okuldan mezun oldu ise diplomasını almıştır."

$q \Rightarrow p$: "Kader diplomasını almış ise okuldan mezun olmuştur."

$p' \Rightarrow q'$: "Kader okuldan mezun olmamış ise diplomasını almamıştır."

$q' \Rightarrow p'$: "Kader diplomasını almamış ise okuldan mezun olmamıştır."

Bilgi

$q \Rightarrow p$ bileşik önermesine $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin **karşıtı,**

$p' \Rightarrow q'$ bileşik önermesine $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin **tersi,**

$q' \Rightarrow p'$ bileşik önermesine $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin **karşıt tersi** denir.

Örnek

$p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p' \Rightarrow q'$ ve $q' \Rightarrow p'$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerini doğruluk tablosu yaparak bulalım.

Çözüm

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p' \Rightarrow q'$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

$q \Rightarrow p \equiv p' \Rightarrow q'$

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$

Bilgi

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ $p \Rightarrow q$ bileşik önermesi ile karşıt tersi birbirine denktir.

$q \Rightarrow p \equiv p' \Rightarrow q'$ bileşik önermesinin karşıtı ile tersi birbirine denktir.

Örnek

$(x = 3) \Rightarrow (2x + 1 = 7)$ koşullu önermesinin karşıtını, tersini ve karşıt tersini yazalım.

Çözüm

Karşıtı : $(2x + 1 = 7) \Rightarrow (x = 3)$

Tersi : $(x \neq 3) \Rightarrow (2x + 1 \neq 7)$

Karşıt tersi : $(2x + 1 \neq 7) \Rightarrow (x \neq 3)$

Örnek

Aşağıdaki bileşik önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını inceleyelim.

a) $p \Rightarrow q$: “Hava yağmurlu ise yerler ıslaktır.”

b) $r \Rightarrow t$: “ABCD dörtgeninin bütün açıları dik açı ise ABCD dörtgeni bir karedir.”

Çözüm

a) Havanın yağmurlu olması yerlerin ıslak olmasını gerektirir. Bu durumda bileşik önerme doğrudur. $p \Rightarrow q \equiv 1$ olur.

b) ABCD dörtgeninin bütün açılarının dik açı olması ABCD dörtgeninin kare olmasını gerektirmez. ABCD dörtgeni dikdörtgen de olabilir. Bu durumda bileşik önerme yanlıştır. $r \Rightarrow t \equiv 0$ olur.

Bilgi

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye **gerektirme** denir.

Örnek

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesi bir gerektirme olduğuna göre $[1 \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \veebar 1$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesi bir gerektirme olduğundan $p \Rightarrow q \equiv 1$ olmalıdır.

Bu durumda $[1 \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \veebar 1 \equiv (1 \Rightarrow 1) \veebar 1 \equiv 1 \veebar 1 \equiv 0$ olarak elde edilir.

Örnek

"x bir tek sayı ise x^2 bir tek sayıdır." koşullu önermesinin bir gerektirme olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

Tek sayıların kareleri de tek sayı olduğundan koşullu önerme doğrudur. Bu durumda verilen koşullu önerme bir gerektirmedir.

Örnek

$p \wedge q \equiv 1$ olduğuna göre

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \veebar (q \Rightarrow p)]$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \wedge q \equiv 1$ ise $p \equiv 1, q \equiv 1$ olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \veebar (q \Rightarrow p)] &\equiv (1 \Rightarrow 1) \Rightarrow [1 \veebar (1 \Rightarrow 1)]\\ &\equiv 1 \Rightarrow (1 \veebar 1)\\ &\equiv 1 \Rightarrow 0\\ &\equiv 0 \text{ olarak elde edilir.}\end{aligned}$$

Örnek

$(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)'$ bileşik önermesinin değilini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}[(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)']' &\equiv [(p \vee q)' \vee (p' \vee q)']'\\ &\equiv [(p' \wedge q') \vee (p \wedge q')]'\\ &\equiv [(p' \vee p) \wedge q']'\\ &\equiv [1 \wedge q']'\\ &\equiv (q')' \equiv q \text{ olarak elde edilir.}\end{aligned}$$

Örnek

$p' \Rightarrow (p \wedge q)'$ bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}p' \Rightarrow (p \wedge q)' &\equiv p \vee (p' \vee q') \equiv (p \vee p') \vee q'\\ &\equiv 1 \vee q' \equiv 1 \text{ olarak elde edilir.}\end{aligned}$$

Örnek

$p \vee (r \Rightarrow q)$ bileşik önermesi yanlış olduğuna göre $(p \veebar q) \Rightarrow (r \wedge q)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \vee (r \Rightarrow q) \equiv 0$ ise $p \equiv 0$ ve $r \Rightarrow q \equiv 0$

$r \equiv 1,\ q \equiv 0$ olur.

Bu durumda

$(p \veebar q) \Rightarrow (r \wedge p) \equiv (0 \veebar 0) \Rightarrow (1 \wedge 0) \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$(q \Rightarrow p')' \Rightarrow (p' \Rightarrow q)$ bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$(q \Rightarrow p')' \Rightarrow (p' \Rightarrow q) \equiv (q' \vee p') \vee (p \vee q)$

$\equiv (p' \vee p) \vee (q' \vee q)$

$\equiv 1 \vee 1 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$ bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv (p' \vee q)' \vee (p \wedge q)$

$\equiv (p \wedge q') \vee (p \wedge q)$

$\equiv p \wedge (q' \vee q)$

$\equiv p \wedge 1 \equiv p$ olarak elde edilir.

İki Yönlü Koşullu Önerme

Örnek

Ankara'da oturan Eda, Ani Harabeleri'ni görmek istemektedir. Bunun için Eda "Ani Harabeleri'ni görmem ancak ve ancak Kars'a gitmemle mümkündür." diye düşünmektedir. Buna göre Eda'nın hangi durumlarda Ani Harabeleri'ni görmek için doğru bir yol izlediğini inceleyelim.

Çözüm

Eda'nın Kars'a gittiğini ve Ani Harabeleri'ni görebildiğini kabul edelim.

Bu durumda Eda'nın doğru bir yol izlediğini söyleyebiliriz.

Eda'nın Kars'a gittiğini ancak Ani Harabeleri'ni göremediğini kabul edelim. Bu durumda Eda'nın doğru bir yol izlediğini söyleyemeyiz.

Eda'nın Kars'a gitmediğini ancak Ani Harabeleri'ni görebildiğini kabul edelim. Bu durumun mümkün olamayacağı için Eda'nın doğru yol izlediğini söyleyemeyiz.

Eda'nın Kars'a gitmediğini ve Ani Harabeleri'ni göremediğini kabul edelim. Bu durumda Eda'nın doğru bir yol izlediğini söyleyebiliriz.

Bilgi

"ancak ve ancak" bağlacı "$\Leftrightarrow$" sembolü ile gösterilir. p ile q önermeleri "ancak ve ancak" bağlacı ile "$p \Leftrightarrow q$" biçiminde gösterilir, "p ancak ve ancak q" diye okunur.

"$p \Leftrightarrow q$" bileşik önermesinin doğruluk değeri, her iki önermenin doğruluk değerleri aynı iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

"$p \Leftrightarrow q$" bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibi oluşturulur.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Bu bileşik önermeye iki yönlü koşullu önerme denir.

Örnek

p : "$\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgendir."

q : "$\widehat{ABC}$'nin taban açıları eştir."

önermeleri için $p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesini oluşturalım.

Çözüm

Bileşik önerme

$p \Leftrightarrow q$: "$\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgendir ancak ve ancak $\widehat{ABC}$'nin taban açıları eştir." biçiminde elde edilir.

Örnek

$1 \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow 0')$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$1 \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow 0') \equiv 1 \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow 1) \equiv 1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$ olur.

Örnek

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$

Bilgi

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Örnek

$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

$$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$$

Örnek

$p \Leftrightarrow 1$, $p \Leftrightarrow 0$, $0 \Leftrightarrow p$, $1 \Leftrightarrow p$, $p \Leftrightarrow p$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerini doğruluk tablosu yaparak bulalım.

Çözüm

p	p'	1	0	$p \Leftrightarrow 1$	$1 \Leftrightarrow p$	$p \Leftrightarrow 0$	$0 \Leftrightarrow p$	$p \Leftrightarrow p$
1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1

$$p \Leftrightarrow 1 \equiv 1 \Leftrightarrow p \equiv p$$

$$p \Leftrightarrow 0 \equiv 0 \Leftrightarrow p \equiv p'$$

$$p \Leftrightarrow p \equiv 1$$

Örnek

$(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm

p	q	p'	q'	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q)'$	$p' \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow q'$
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0

$$(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$$

Bilgi

$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$, $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

$p \Leftrightarrow 1 \equiv p$, $1 \Leftrightarrow p \equiv p$, $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$, $0 \Leftrightarrow p \equiv p'$, $p \Leftrightarrow p \equiv 1$

Örnek

$p \equiv 1,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0$ olduğuna göre aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$ b) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ c) $(p \Leftrightarrow q)' \Rightarrow (p \veebar r)$

Çözüm

a) $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r) \equiv 1 \Leftrightarrow (1 \Rightarrow 0) \equiv 1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$

b) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv 1 \Rightarrow (1 \Leftrightarrow 0) \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$

c) $(p \Leftrightarrow q)' \Rightarrow (p \veebar r) \equiv (1 \Leftrightarrow 1)' \Rightarrow (1 \veebar 0) \equiv 1' \Rightarrow 1 \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

p : "$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgendir."

q : "$\widehat{ABC}$'nin iç açıları eştir."

önermeleri için $p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesini oluşturup doğruluk değerini inceleyelim.

Çözüm

$p \Leftrightarrow q$: "$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgendir ancak ve ancak $\widehat{ABC}$'nin iç açıları eştir."

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ denkliğinden yararlanarak bileşik önermenin doğruluk değerini inceleyelim.

$p \Rightarrow q$: "$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen ise $\widehat{ABC}$'nin iç açıları eştir." Eşkenar üçgenin tanımı gereği bileşik önerme doğrudur. $p \Rightarrow q \equiv 1$

$q \Rightarrow p$: "$\widehat{ABC}$'nin iç açıları eş ise $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgendir." Eşkenar üçgenin tanımı gereği bileşik önerme doğrudur. $q \Rightarrow p \equiv 1$

Bu durumda $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olarak elde edilir.

Bilgi

$p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu bileşik önermeye **çift gerektirme** denir.

Örnek

p : "Çift doğal sayıların karesi çift doğal sayıdır."

q : "Negatif tam sayıların çift sayı kuvvetleri pozitif tam sayıdır."

önermeleri veriliyor.

Buna göre $p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesinin bir çift gerektirme olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

$p \equiv 1,\ q \equiv 1$ olduğundan

$p \Leftrightarrow q \equiv 1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1$ elde edilir.

Bu durumda $p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesi bir çift gerektirmedir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $r \equiv 1$ olduğuna göre aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$

b) $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$

c) $r' \Rightarrow (p' \wedge q)$

ç) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$

d) $(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

2. $p \Rightarrow (q' \vee r) \equiv 0$

olduğuna göre $(p \Rightarrow r') \Leftrightarrow (q \veebar r)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

3. $(p \Leftrightarrow q)' \equiv (p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q')$

olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

4. Aşağıdaki boşlukları uygun biçimde doldurunuz.

a) ise bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk değeri, önermelerden birincisi .... ikincisi .... ise yanlıştır.

b) ancak ve ancak bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk değeri, önermelerden .... doğrudur.

5. $[(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q')] \vee q$

bileşik önermesinin en sade hâlini bulunuz.

6. $(p' \Rightarrow q')' \vee (p' \wedge q)$

bileşik önermesinin en sade hâlini bulunuz.

7. "Ali sözünde durur ise güvenilirdir."

bileşik önermesinin bir gerektirme olup olmadığını inceleyiniz.

8. "Tuğba, 15 Temmuz Şehitler Köprüsü'ndedir ancak ve ancak Tuğba İstanbul'dadır."

bileşik önermesinin bir çift gerektirme olup olmadığını inceleyiniz.

9. "Funda cömert ise merhametlidir." bileşik önermesinin karşıtını, tersini ve karşıt tersini oluşturunuz.

10. $(p' \Rightarrow q)' \vee p$

bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.

11. $(m \Rightarrow n) \Rightarrow (n \Rightarrow m')'$

bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.

12. "Yağmur yağmış ise yerler ıslanmıştır."

bileşik önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) "Yerler ıslanmış ise yağmur yağmıştır."

B) "Yerler ıslanmamış ise yağmur yağmamıştır."

C) "Yağmur yağmış ise yerler ıslanmamıştır."

D) "Yağmur yağmamış ise yerler ıslanmamıştır."

E) "Yağmur yağmamış ise yerler ıslanmıştır."

13. $(p \Rightarrow p) \Rightarrow (p' \Rightarrow q)$

bileşik önermesinin değilini bulunuz.

1.1.4. Her (∀) ve Bazı (∃) Niceleyicileri

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin hangi durumlarda doğru olabileceğini inceleyelim.

a) “x bir doğal sayıdır.”

b) “y sıfırdan büyük bir tam sayıdır.”

c) “Her yaz tatilinde köyüme giderim.”

ç) “Bazı hafta sonları ilçedeki kütüphaneye giderim.”

Çözüm

a) “x bir doğal sayıdır.” ifadesinin doğru ya da yanlış olduğunu x’e vereceğimiz değerlere göre anlayabiliriz. Örneğin x’e 3 verirsek “3 bir doğal sayıdır.” ifadesi doğru, x’e –3 verirsek “–3 bir doğal sayıdır.” ifadesi yanlış olur.

b) “y sıfırdan büyük bir tam sayıdır.” ifadesinin doğru ya da yanlış olduğunu y’ye değerler vererek anlayabiliriz. Örneğin y’ye 5 verirsek “5 sıfırdan büyük bir tam sayıdır.” ifadesi doğru, y’ye –1 verirsek “–1 sıfırdan büyük bir tam sayıdır.” ifadesi yanlış olur.

Görüldüğü gibi her iki ifadenin de doğruluğu veya yanlışlığı içindeki değişkenin alacağı değere bağlıdır.

c) “Her yaz tatilinde köyüme giderim.” ifadesinin doğru olabilmesi ifadeyi söyleyen kişinin her yaz tatilinde köyüne gitmiş olması ile mümkündür.

ç) “Bazı hafta sonları kütüphaneye giderim.” ifadesinin doğru olabilmesi için ifadeyi söyleyen kişinin en az bir hafta sonu kütüphaneye gitmesi yeterlidir.

Bilgi

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlerin aldıkları değerlere göre doğruluğu ya da yanlışlığı kesinleşen ifadelere **açık önerme** denir. Açık önermeler p(x), q(x), p(x, y), q(x, y),... biçiminde gösterilirler. Açık önermeyi doğrulayan elemanların kümesine açık önermenin **doğruluk kümesi** denir.

“Bazı” sözcüğü “en az bir” ifadesi ile aynı anlamdadır. Bu sözcük “∃” sembolü ile gösterilir. Bu niceleyiciye **“varlıksal niceleyici”** denir.

p(x) açık önermesi $x \in A$ olmak üzere bu niceleyici ile “$\exists\, x \in A$, p(x)” biçiminde gösterilir.

$\exists\, x \in A$ ifadesi “A kümesinin bazı elemanları” biçiminde okunur.

“$\exists\, x \in A$, p(x)” önermesini doğru yapan en az bir değer varsa önerme doğrudur.

“Her” sözcüğü “bütün” sözcüğü ile aynı anlamdadır.

Bu sözcük “∀” sembolü ile gösterilir. Bu niceleyiciye **“evrensel niceleyici”** denir.

p(x) açık önermesi $x \in A$ olmak üzere bu niceleyici ile “$\forall\, x \in A$, p(x)” biçiminde gösterilir.

$\forall\, x \in A$ ifadesi “A kümesinin her elemanı” biçiminde okunur.

“$\forall\, x \in A$, p(x)” önermesinin doğru olması için x’in her değeri için p(x)’in doğru olması gerekir.

Örnek

$p(x)$: "$2x - 3 > 7$"

açık önermesi için $p(0)$, $p(1)$, $p(3)$, $p(6)$, $p(7)$, $p(8)$ önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm

$x = 0$ için $2 \cdot 0 - 3 > 7 \Rightarrow -3 > 7$ ifadesi yanlış olduğundan $p(0) \equiv 0$,

$x = 1$ için $2 \cdot 1 - 3 > 7 \Rightarrow -1 > 7$ ifadesi yanlış olduğundan $p(1) \equiv 0$,

$x = 3$ için $2 \cdot 3 - 3 > 7 \Rightarrow 3 > 7$ ifadesi yanlış olduğundan $p(3) \equiv 0$,

$x = 6$ için $2 \cdot 6 - 3 > 7 \Rightarrow 9 > 7$ ifadesi doğru olduğundan $p(6) \equiv 1$,

$x = 7$ için $2 \cdot 7 - 3 > 7 \Rightarrow 11 > 7$ ifadesi doğru olduğundan $p(7) \equiv 1$,

$x = 8$ için $2 \cdot 8 - 3 > 8 \Rightarrow 13 > 7$ ifadesi doğru olduğundan $p(8) \equiv 1$ olarak elde edilir.

Örnek

Aşağıda verilen açık önermelerin doğruluk kümesini bulalım.

a) $p(x) : -1 < x < 5,\ x \in \mathbb{Z}$

b) $q(x) : x^2 < 30,\ x \in \mathbb{N}$

Çözüm

a) -1 ile 5 arasındaki tam sayılar $0, 1, 2, 3, 4$ olduğundan
$p(x)$ önermesinin doğruluk kümesi $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ olarak elde edilir.

b) Karesi 30'dan küçük olan doğal sayılar $0, 1, 2, 3, 4, 5$ olduğundan
$q(x)$ önermesinin doğruluk kümesi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$p(x)$: "$2x - 3 = 7$" ve $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $p(x)$ açık önermesini "$\exists$" ve "$\forall$" niceleyicileri ile birlikte gösterelim.

Çözüm

$p(x)$: "$\forall x \in \mathbb{Z},\ 2x - 3 = 7$"

$p(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z},\ 2x - 3 = 7$" biçiminde gösterilir.

Örnek

Aşağıda sözel olarak verilen ve niceleyici içeren önermeleri sembolik mantık diliyle ifade edelim.

p : "Her doğal sayının 2 katı bir doğal sayıdır."

q : "Bazı tam sayıların karesi kendisine eşittir."

r : "Bazı tam sayılar pozitiftir."

s : "Her gerçek sayının karesi pozitif bir gerçek sayıdır."

Çözüm

$p(x)$: "$\forall x \in \mathbb{N},\ 2x \in \mathbb{N}$"

$q(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2 = x$"

$r(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z},\ x > 0$"

$s(x)$: "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ ve $x^2 \in R$"

Örnek

Aşağıda sembolik mantık diliyle verilen ve niceleyici içeren önermeleri sözel olarak ifade edelim.

p(x) : "$\exists\, x \in \mathbb{N},\ 2x - 5 = 9$"

q(x) : "$\exists\, x \in \mathbb{Z},\ x^2 - 1 > 7$"

r(x) : "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$"

s(x) : "$\forall\, x \in \mathbb{Z},\ x^2 + 2 \leq 11$"

Çözüm

p : "Bazı doğal sayıların iki katının 5 eksiği 9'a eşittir."

q : "Bazı tam sayıların karesinin 1 eksiği 7'den büyüktür."

r : "Her gerçek sayının mutlak değeri sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür."

s : "Her tam sayının karesinin 2 fazlası 11'e eşit veya 11'den küçüktür."

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıda verilen açık önermelerin doğruluk kümesini bulunuz.

a) p(x) : $20 < x^2 < 50,\ x \in \mathbb{Z}$

b) q(x) : $3x - 5 < 13,\ x \in \mathbb{N}$

2. p(x) : "x bir tam sayı , $x - 3 > 3x - 7$" açık önermesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $p(0) \equiv 1$

B) $p(1) \equiv 0$

C) $p(2) \equiv 1$

D) $p(3) \equiv 1$

E) $p(4) \equiv 1$

3. Aşağıda sembolik mantık diliyle verilen ve niceleyici içeren açık önermeleri sözel olarak ifade ediniz.

p(x) : "$\forall\, x$, x asal sayı ve $x > 0$"

q(x) : "$\exists\, x \in \mathbb{N},\ x^2 = 0$"

r(x) : "$\exists\, x \in \mathbb{Z},\ x^2 - 16 \leq 0$"

s(x) : "$\exists\, x \in \mathbb{Z},\ 2x - 1 < 8$"

t(x) : "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$"

4. Aşağıda sözel olarak verilen ve niceleyici içeren açık önermeleri sembolik mantık diliyle ifade ediniz.

p : "Bazı tam sayıların karesi 36'dan büyüktür."

q : "Her gerçek sayının karesi sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür."

r : "Bazı gerçek sayılar kendi karesinden büyüktür."

s : "Her doğal sayının 1 fazlası sıfırdan büyüktür."

t : "Bazı tam sayıların karesi 100 ile 1000 arasındadır."

v : "Bazı doğal sayılar sıfırdan büyüktür."

5. "Her gerçek sayının karesi sıfırdan büyüktür." ifadesinin sembolik mantık diliyle gösterilişi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 0$"

B) "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$"

C) "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$"

D) "$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 0$"

E) "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = x$"

1.1.5. Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat

Bilgi

Her bilim dalının kendine özgü anlamlar içeren sözcükleri vardır. Bu sözcükler bazen günlük konuşma dilinden farklı anlamlarda kullanılır. Bu sözcüklere o bilim dalının **terimi** denir. Matematikte kullandığımız açı, dörtgen, fonksiyon, polinom gibi terimler, tanımlı terimler; doğru, nokta, düzlem gibi terimler ise tanımsız terimlerdir.

1) Tanımsız terimin dışındaki bir teriminin kapsamını açık bir şekilde ifade eden önermelere **tanım** nedir.

2) Doğruluğunu ispat etmeye gerek duymadan doğru olarak kabul edilen önermelere **aksiyom** denir.

3) Doğruluğu aksiyomlar ve kendinden önceki bilgiler yardımıyla gösterilebilen önermelere **teorem** denir.

   Bir teoremde hipotez (verilen kısım) ve hüküm (ispatlanacak kısım) vardır.

   $p \Rightarrow q$ teoreminde p hipotez, q hükümdür.

4) Bir teoremin hipotezinden hareketle hükmünü elde etmeye teoremi ispatlamak denir.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerden tanım, aksiyom ve teorem olanları belirleyelim.

1) Bir noktadan sonsuz tane doğru geçer.
2) İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.
3) Doğruluk değerleri aynı olan önermelere denk önermeler denir.

Çözüm

1) İfadeyi ispatlayamayız. Ancak sezgisel olarak kabul edeceğimizden bu ifade bir aksiyomdur.
2) İfadenin doğruluğunu ispatlamadan göremeyiz. Bu yüzden bu ifade bir teoremdir.
3) İfade denk önermeyi açıkladığından bir tanımdır.

Örnek

“İki çift doğal sayının çarpımı çift doğal sayıdır.” teoreminin hipotez ve hükmünü belirleyelim.

Çözüm

“İki çift doğal sayının çarpımı çift doğal sayıdır.”

Hipotez p : a ve b çift doğal sayılardır.

Hüküm q : $a \cdot b$ çift doğal sayıdır.

Teorem $p \Rightarrow q$: $\underbrace{\text{a ve b çift doğal sayı}}_{p}$ ise $\underbrace{a \cdot b \text{ çift doğal sayıdır.}}_{q}$

Örnek

Aşağıda verilen hipotez ve hüküm ikililerini kullanarak teorem yazalım.

a) Hipotez : a ve b tek sayıdır.
   Hüküm : $a \cdot b$ tek sayıdır.

b) Hipotez : a bir tek sayıdır.
   Hüküm : a^2 bir tek sayıdır.

Çözüm

a) Hipotez p : a ve b tek sayıdır.
   Hüküm q : $a \cdot b$ tek sayıdır.

   Teorem: $p \Rightarrow q$: a ve b tek sayı $\Rightarrow$ $a \cdot b$ tek sayıdır.

b) Hipotez p : a bir tek sayıdır.
   Hüküm q : a^2 bir tek sayıdır.

   Teorem: $p \Rightarrow q$: a bir tek sayı $\Rightarrow$ a^2 bir tek sayıdır.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıda verilen ifadelerden tanım, aksiyom ve teorem olanları belirleyiniz.

a) ABCD dörtgeni kare ise bütün kenar uzunlukları birbirine eşittir.

b) İki noktadan yalnız bir doğru geçer.

c) Doğru ya da yanlış olduğu kesin olarak bilinen ifadelere önerme denir.

ç) $3x + 5 = 14$ ise $3x – 3 = 7$ olur.

d) $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen ise iç açıları eştir.

e) Bir önermenin hükmünü değiştirerek elde edilen yeni önermeye o önermenin değili denir.

2. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. Her tanım bir önermedir.
II. Her aksiyom bir önermedir.
III. Her önerme bir teoremdir.
IV. Her teorem bir önermedir.
V. Her aksiyom bir teoremdir.
VI. Her teorem bir aksiyomdur.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Aşağıda verilen teoremlerin hipotez ve hükmünü belirleyiniz.

a) Bir tek doğal sayı ile bir çift doğal sayının çarpımı çift doğal sayıdır.

b) Çift doğal sayıların karesi çift doğal sayıdır.

c) İki tek doğal sayının toplamı çift doğal sayıdır.

4. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına “D”, yanlış olanların başına “Y” yazınız.

(.......) Doğruluğunu ispat etmeye gerek duymadan doğru olarak kabul edilen önermelere aksiyom denir.

(.......) Doğruluğu aksiyomlar ve kendinden önceki bilgiler yardımıyla gösterilebilen önermelere teorem denir.

(.......) Bir teoremin hipotezinden hareketle hükmünü elde etmeye o teoremi tanımlamak denir.

(.......) “ABCD dörtgeni kare ise köşegenleri diktir.” ifadesi bir aksiyomdur.

1. BÖLÜM ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden hangisi bir önerme değildir?

A) 6 bir asal sayıdır.
B) Bir yılda 300 gün vardır.
C) Bir yıl 4 mevsimdir.
D) Türkiye'nin yüz ölçümü bakımından en küçük ili Rize'dir.
E) Çay içer misiniz?

2. Aşağıdakilerden hangisi "Ay, Dünya'nın uydusudur." önermesinin değilidir?

A) Dünya, Ay'ın uydusudur.
B) Dünya, Ay'ın uydusu değildir.
C) Ay, Dünya'nın uydusu değildir.
D) Ay, Dünya'nın uydusu olabilir.
E) Dünya, Ay'ın uydusu olmayabilir.

3. $3n - 1$ tane farklı önerme için 256 tane farklı doğruluk durumu söz konusu ise n kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. p : Ankara Türkiye'nin başkentidir.
q : Anıtkabir Ankara'dadır.

önermeleri için

I. $p \vee q$
II. $p \wedge q'$
III. $p' \vee q'$
IV. $(p \wedge q)' \vee p$
V. $(p \vee q)' \vee q$
VI. $(p \vee q) \wedge q$
VII. $(p \wedge q)' \wedge q$

bileşik önermelerinden kaç tanesinin doğruluk değeri 1'dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere önerme denir.
B) İki önerme birbirine denk ise bu önermeler aynı önerme olmak zorundadır.
C) Bir önerme doğru ise değili de doğrudur.
D) Bir önerme doğru ise değilinin değili yanlıştır.
E) İki önerme için 8 farklı doğruluk değeri vardır.

6. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. $p \vee p \equiv p$
II. $p \underline{\vee} p \equiv 0$
III. $p \wedge p' \equiv 0$
IV. $p \underline{\vee} 1 \equiv 1$
V. $p \vee 1 \equiv 1$
VI. $p \wedge 0 \equiv 0$
VII. $p \Rightarrow p' \equiv 1$
VIII. $0 \Leftrightarrow p \equiv p'$
IX. $1 \Rightarrow p \equiv p$
X. $p \Leftrightarrow p \equiv p'$

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

7. $p : \sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$
$q : \sqrt{3} - \sqrt{2} = 1$
$r : \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$

önermesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $p \vee (r \wedge q)$
B) $r \wedge (q \vee p)$
C) $q \vee (p \wedge r)$
D) $p \wedge (r \Leftrightarrow q)$
E) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

8. $q \Rightarrow p'$

bileşik önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $p' \Rightarrow q$
B) $p \Rightarrow q'$
C) $q \Rightarrow p'$
D) $p' \Rightarrow q'$
E) $q \Rightarrow p$

9. $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow q')$

bileşik önermesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) p B) q C) p′ D) 0 E) 1

10. $p \equiv 1$, $q \equiv 1$, $r \equiv 0$ önermeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdaki bileşik önermelerden hangisi 1'e denktir?

A) $(p \Leftrightarrow q) \underline{\vee} (r \Rightarrow p)$

B) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \underline{\vee} q) \vee r']$

C) $(p \wedge r) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \underline{\vee} (p' \vee q)]$

D) $p \underline{\vee} [(q \wedge r) \Rightarrow 1]$

E) $(p \Rightarrow r) \vee [r \wedge (q \Leftrightarrow p)]$

11. " Zuhal paylaşmayı seviyor ise adildir. " bileşik önermesinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) "Zuhal adil ise paylaşmayı seviyordur."

B) "Zuhal adil değil ise paylaşması seviyordur."

C) "Zuhal adil ise paylaşmayı sevmiyordur."

D) "Zuhal paylaşmayı sevmiyor ise adil değildir."

E) "Zuhal paylaşmayı sevmiyor ise adildir."

12. $p \wedge q$: "Çetin iyi aşçıdır ve güzel yemek yapar."

bileşik önermesi için aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $p \vee q$: "Çetin iyi aşçıdır veya güzel yemek yapar."

B) $p \Rightarrow q$: "Çetin iyi aşçı ise güzel yemek yapar."

C) $p \Leftrightarrow q$: "Çetin iyi aşçıdır ancak ve ancak güzel yemek yapar."

D) $p \underline{\vee} q'$: "Çetin iyi aşçıdır ya da güzel yemek yapamaz."

E) q' : "Çetin iyi aşçı değildir."

13. $p' \vee r \equiv 1$

$q \vee r \equiv 0$

olduğuna göre p, q, r önermelerinin doğruluk değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0, 0, 1 B) 0, 1, 0 C) 1, 1, 0 D) 0, 0, 0 E) 1, 0, 0

14. $m \Leftrightarrow (p' \vee q)$

ifadesinde m yerine aşağıdaki bileşik önermelerden hangisi gelirse ifade doğru olur?

A) $p \wedge q'$ B) $(p \vee q)'$ C) $p \Rightarrow q$ D) $p' \vee q'$ E) $p' \Rightarrow q$

15. $[(p \underline{\vee} q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \vee 1$

bileşik önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) 0 B) 1 C) p D) q E) q′

16. "$\exists x \in \mathbb{R}, x^3 < 0$"

biçiminde sembolik mantık diliyle verilen ifadenin sözel olarak ifade edilişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) "Bazı gerçek sayıların üçüncü kuvveti negatiftir."

B) "Her gerçek sayının üçüncü kuvveti negatiftir."

C) "Bazı gerçek sayılar negatiftir."

D) "Her gerçek sayı negatiftir."

E) "Bazı gerçek sayıların kuvveti negatif olabilir."

17. $(p' \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow q)'$

bileşik önermesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $p \vee q$ B) p C) p′ D) q E) q′

18. $p \Rightarrow [p \Rightarrow (p \vee q)']$

bileşik önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) $p \Rightarrow q$
B) $p \vee (q \Rightarrow p)$
C) $p \wedge (q \Rightarrow p)$
D) $p \Rightarrow q'$
E) p'

19. Yanda verilen tabloya göre $a + b + c - d - e - f$ ifadesinin değeri kaçtır?

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	c
a	0	d
0	b	e
0	0	f

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 0

20. $(q \Rightarrow p) \Rightarrow p$

bileşik önermesinin değili aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) $q \vee p$
B) $q \wedge p$
C) $q' \wedge p'$
D) $q' \vee p'$
E) $q' \vee p$

21. $p(x) : 2x + 1 \leq 3x - 3$

açık önermesi için aşağıdaki denkliklerden hangisi yanlıştır?

A) $p(0) \equiv 0$
B) $p(1) \equiv 0$
C) $p(2) \equiv 0$
D) $p(3) \equiv 0$
E) $p(4) \equiv 0$

22. "Bazı doğal sayıların 3 fazlası 5'ten büyüktür." biçiminde verilen sözel ifadenin sembolik mantık diliyle ifadesi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) "$\forall x \in \mathbb{N}, x + 3 > 5$"

B) "$\exists x \in \mathbb{N}, x + 5 > 3$"

C) "$\exists x \in \mathbb{N}, x + 3 > 5$"

D) "$\exists x \in \mathbb{N}, x - 3 > 5$"

E) "$\exists x \in \mathbb{N}, x + 3 < 5$"

23. $[p \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Rightarrow p$

bileşik önermesinin değili aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) p B) p' C) q D) q' E) $p \vee q'$

24. $p(x) : x^3 < 11, x \in \mathbb{N}$

bileşik önermesinin doğruluk kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1, 0, 1, 2\}$
B) $\{0, 1, 2\}$
C) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
D) $\{1, 2\}$
E) $\{0, 1\}$

25. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

(.......) İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlerin aldıkları değerlere göre doğruluğu ya da yanlışlığı kesinleşen ifadelere açık önerme denir.

(.......) "$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$" ifadesi bir gerektirmedir.

(.......) "Hava yağmurludur ancak ve ancak yerler ıslaktır." ifadesi bir çift gerektirmedir.

(.......) "ABCD dörtgeni dikdörtgen ise köşegenleri birbirine diktir." ifadesi bir aksiyomdur.

26. $[p \Leftrightarrow (q \vee r)] \Rightarrow 1$

bileşik önermesi için

I. Doğrudur.
II. Yanlıştır.
III. p'ye denktir.
IV. q'ya denktir.
V. r'ye denktir.

yargılarından hangisi doğrudur?

A) I B) II C) III D) IV E) V

SAYILAR VE CEBİR

2. BÖLÜM

KÜMELER

Konular

Sembol ve Gösterimler

$\in, \notin, \varnothing, \{\ \}, \subset, \supset, \subseteq, \supseteq, \nsubseteq, \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

$\{\ x \mid$ x'in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler$\}$

s(A), $\cup$, $\cap$, A – B (veya A \ B) , A′, A x B, s(A x B)

Terimler ve Kavramlar

Küme

Eleman

Evrensel küme

Boş küme

Alt küme

Öz alt küme

Sonlu küme

Sonsuz küme

Eşit kümeler

Birleşim

Kesişim

Fark

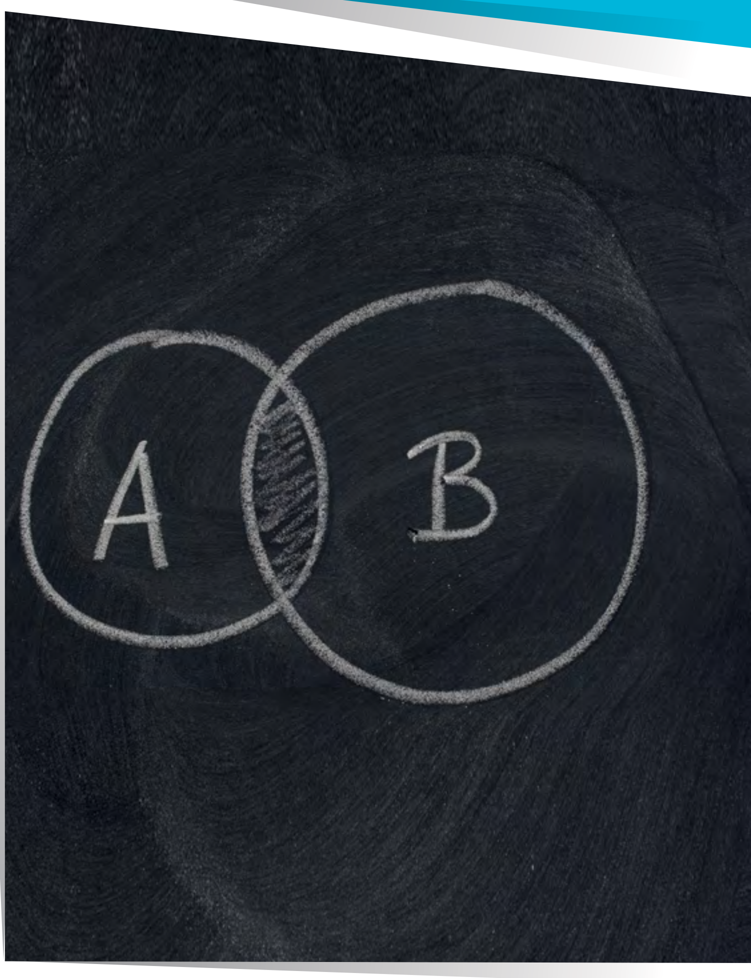
Tümleme

Ayrık kümeler

De Morgan kuralları

Sıralı ikili

Kartezyen çarpımı



2. KÜMELER

Günlük hayatta edindiğimiz bilgileri çoğu zaman sınıflandırma veya gruplandırma yaparak düzenleme ihtiyacı duyarız.

Bu sınıflandırmayı yaparken de genelde aynı türleri bir araya getirme gayreti içinde oluruz. Bu bilgiler soyut kavramlardan oluşacağı gibi etrafımızdaki elle tutulur somut nesnelerden de oluşabilir. Bir araya getirilen türlerin ortak bir özelliklerinin olması gerekir.

Örneğin, yıldız kümeleri iki grupta incelenir. Genel olarak daha az sayıda düşük kütle çekimiyle bağlı olan ve daha genç yıldızlardan oluşanlar açık yıldız kümelerini; çok sayıda büyük kütle çekimiyle bir arada bulunan ve çoğunlukla yaşlı yıldızlardan oluşanlar ise küresel yıldız kümelerini oluştururlar.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Hayatın her alanında bu tür sınıflandırmaları görmek mümkündür. Kütüphanelerde, otobüs terminallerinde, aynı semte çalışan toplu taşıma araçlarında vb. birçok alanda örneklere rastlayabiliriz. Kümelerin temeli de gruplandırma ve sınıflandırmadır. Küme de matematiğin en temel terimlerinden biridir.

Georg Cantor (Corc Kantor)

1869'dan 1905'e kadar Halle'de ders veren Cantor, yalnızca kesirsiz sayı kuramıyla değil, kümeler kuramıyla da (Mengenlehre) tanınır.

Bu kuramıyla Cantor, öncülleri bir kez kabul edildikten sonra son derece kesin olan tümüyle yeni bir matematiksel araştırma alanı ortaya çıkardı. Cantor'un yayınları 1870'de başladı ve uzun yıllar sürdü; 1883'te "Kümeler Üstüne Genel Bir Kuramın Temelleri" adlı makalesinin de bulunduğu kitapçığı yayımladı. Cantor bu makalelerde, gerçek sonsuzluğun sistemli bir matematiksel incelemesine dayanan sonlu ötesi sayma sayılarının kuramını geliştirdi. Cantor, sonsuz kümelerin sıralanma biçimini gösteren sonlu ötesi sayma sayılarını da tanımladı.

Georg Cantor
(Corc Kantor) 1845 –1918 (Temsilî)

Cantor ayrıca tüm matematik araştırmalarında ve problemlerinde kullanılan nesnelerin aslında kendi aralarında belirli özelliklere göre gruplanabileceğini, bu durumda araştırma ya da problemin anlaşılırlığının ve problemin çözümüne yönelik işlem yapmanın daha da kolaylaşacağını fark etmiştir.

(Kısa Matematik Tarihi)

2.1. KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR

2.1.1. Kümeler İle İlgili Temel Kavramlar

Küme

Küme kavramı günlük hayatta tümsek, bütün, yığın, takım, lig, grup gibi anlamlarda kullanılmaktadır. Kümenin matematikteki anlamı da bu anlamlarla ilişkilidir.

Bir kümenin belirlenebilmesi için iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğundan oluşması gerekir. Buradaki "iyi tanımlama" ifadesi, topluluğu oluşturan nesnelerin birbirinden farklı, açıkça belirli, anlamlı ve herkes tarafından aynı şekilde anlaşılması anlamını taşımaktadır.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin bir küme belirttiğini inceleyelim.

a) "Sınıfımızdaki bazı öğrenciler"

b) "Sınıfımızdaki kız öğrenciler"

c) "Bir yıldaki mevsimler"

Çözüm

a) "Sınıfımızdaki bazı öğrenciler" ifadesi bir küme belirtmez. Çünkü bu topluluğun hangi öğrencilerden oluşacağı net olarak belirlenmemiştir. Bu ifadeye göre herkes farklı bir topluluk oluşturabilir.

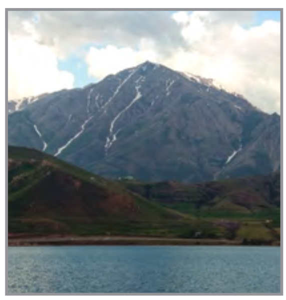
b) "Sınıfımızdaki kız öğrenciler" ifadesi bir küme belirtir. Çünkü bu topluluğu oluşturan öğrencilerin herkes tarafından aynı kız öğrencilerden oluştuğu net olarak bilinmektedir.

c) "Bir yıldaki mevsimler" ifadesi bir küme belirtir. Çünkü bir yılda ilkbahar, yaz, sonbahar ve kış olmak üzere 4 mevsim vardır ve herkes tarafından böyle algılanır.

Örnek

Ağrı Dağı
Yüksekliği 5137 m

Cilo Dağı
Yüksekliği 4135 m



Süphan Dağı
Yüksekliği 4058 m

Kaçkar Dağı
Yüksekliği 3932 m

Ülkemizdeki yüksekliği 4000 m'den daha fazla olan dağlarımızın kümesini oluşturalım.

Çözüm

Bu kümenin elemanları "Ağrı Dağı (5137m), Cilo Dağı (4135 m) ve Süphan Dağı (4058 m)" olmak üzere üç tanedir. Bu kümeyi "D" ile gösterirsek hangi dağların bu kümeye ait olduğunu "Ağrı Dağı $\in$ D", "Cilo Dağı $\in$ D" ve "Süphan Dağı $\in$ D" biçiminde gösteririz. Kaçkar Dağı'nın yüksekiği 3932 m olduğundan bu kümeye ait değildir. Bunu "Kaçkar Dağı $\notin$ D" biçiminde gösteririz.

Bilgi

Kümeler genellikle A, B, C gibi büyük harflerle gösterilir. Bir kümeyi oluşturan nesnelerin her birine o kümenin **elemanı** denir. Bir kümede bir eleman bir kere yazılır ve küme içinde elemanlar yer değiştirebilir.

Bir a elemanı, bir A kümesinin elemanı ise bunu “$a \in A$” biçiminde gösterir ve “a, A kümesinin elemanıdır.” şeklinde okuruz. Bir b elemanı bir A kümesinin elemanı değil ise bunu “$b \notin A$” biçiminde gösterir ve “b, A kümesinin elemanı değildir.” şeklinde okuruz.

($\in$ → elemanıdır, $\notin$ elemanı değildir.)

Bir A kümesinin eleman sayısı s(A) biçiminde gösterilir.

Kümelerin Farklı Gösterimleri

Kümeler liste yöntemi, ortak özellik yöntemi ve Venn şeması olmak üzere üç farklı yöntemle gösterilirler.

Liste yöntemi

Bilgi

Bu yöntemde bir kümenin elemanları herhangi bir sırayla aralarına virgül konularak küme parantezi “{ }” içinde yazılır.

Örnek

MATEMATİK kelimesindeki harflerin kümesini liste yöntemi ile gösterelim.

Çözüm

Kümeyi B ile gösterelim. Kelime M, A, T, E, M, A, T, İ, K harfleriyle oluşturulmuştur. Ancak kelimede 2 tane A, 2 tane T ve 2 tane M harfi bulunduğundan bu harfler bir kere yazılır. Bu durumda küme

B = {M, A, T, E, İ, K} biçiminde gösterilir.

Ortak özellik yöntemi

Bilgi

Bu yöntemde kümenin bütün elemanlarının sahip oldukları ortak özellik belirtilerek gösterilir. Bir A kümesi, bir P şartını sağlıyorsa bu yöntemle kümeyi

$A = \{x \mid x \text{ P şartını sağlar.}\}$ veya $A = \{x : x \text{ P şartını sağlar.}\}$

biçiminde gösterir ve “A kümesi x elemanlarından oluşmuştur öyle ki x, P şartını sağlar.” diye okuruz. Burada kullanılan “|” veya “:” sembolleri “öyle ki” anlamına gelir.

Örnek

$A = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ kümesini ortak özellik yöntemiyle gösterelim.

Çözüm

$A = \{x \mid 2 < x < 20, x \text{ çift doğal sayı}\}$ biçiminde gösterilir.

Venn şeması yöntemi

Bilgi

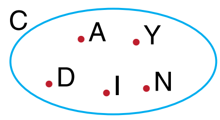
Bu yöntemde kümenin elemanları kapalı bir eğri veya bir çokgen içerisinde, önlerine nokta konularak gösterilir.

Örnek

AYDIN kelimesindeki harflerin oluşturduğu kümeyi Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm

Kümeye C diyelim. C kümesi Venn şeması ile



biçiminde gösterilir.

Evrensel Küme, Boş Küme, Sonlu Küme, Sonsuz Küme

Örnek

Aşağıda ortak özellik yöntemi ile verilen kümeleri liste yöntemi ile gösterip eleman sayılarını bulmaya çalışalım.

A = {Haftanın D ile başlayan günleri}

B = $\{x \mid 0 \le x \le 5\,000\,000$, x bir tam sayı$\}$

C = $\{x \mid$ x bir tam sayı$\}$

D = {Dünyadaki tüm insanlar}

E = {Yılın ayları}

Çözüm

Haftanın D ile başlayan günü olmadığından A kümesinin elemanı yoktur. s(A) = 0 olur.
A = { } veya A = ∅ biçiminde gösterilir.

B = {0, 1, 2, 3, … , 5 000 000} ve s(B) = 5 000 001 olur.

C = {… , –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, … } kümesinin elemanları sayılamayacak kadar çok olduğundan eleman sayısını bulamayız.

D kümesinin elemanlarını tek tek sayıp yazamasak da tüm insanların sayısının, bir doğal sayı ile ifade edilebileceğini biliyoruz.

E = {Ocak, Şubat, Mart, Nisan, Mayıs,Haziran, Temmuz, Ağustos, Eylül, Ekim, Kasım, Aralık} ve s(E) = 12 olur.

B ve C kümelerinde kullanılan üç nokta kümelerin elemanları arasındaki örüntülerin devam ettiği anlamına gelmektedir.

Bilgi

Elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve "∅" veya "{ }" biçiminde gösterilir.

Eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilebilen kümelere sonlu küme, sonlu olmayan kümeye sonsuz küme denir.

Üzerinde işlem yapılan tüm kümelere ait elemanları içeren ve boş kümeden farklı olan kümeye **evrensel küme** denir.

Yukarıdaki örnekte A boş küme; B, D ve E sonlu küme; C ise sonsuz kümedir. B, C, D ve E kümelerini evrensel küme olarak kabul edebiliriz. Evrensel küme bahsi geçen konuya göre değişir. Evrensel küme sonlu küme olabileceği gibi sonsuz küme de olabilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıda verilen ifadelerin küme belirtip belirtmeyeceğini açıklayınız.

a) Sınıfımızdaki bazı öğrenciler

b) Okulumuzdaki matematik öğretmenleri

c) Bazı gezegenler

ç) Okulumuzdaki 9. sınıf öğrencileri

2. ESKİŞEHİR

Kelimesindeki harflerin oluşturduğu kümeyi liste yöntemi, ortak özellik yöntemi ve Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

3. Kendi okulunuz ile ilgili olarak bir evrensel küme oluşturacak olsanız bu evrensel kümeyi nasıl oluşturabilirsiniz?

4. Aşağıdaki kümelerden hangilerinin boş küme olduğunu belirleyiniz.

$A = \{x \mid x^2 < 0 \ \ x \text{ tam sayı}\}$

$B = \{x \mid x^2 = 11, x \text{ doğal sayı}\}$

C = {Haftanın M ile başlayan günleri}

Ç = {∅}

D = {Karesi sıfıra eşit olan doğal sayılar}

E = {Karesi negatif olan gerçek sayılar}

5. $A = \{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre

I. $\varnothing \in A$ II. $1 \in A$ III. $3 \in A$

IV. $\{2, 3\} \in A$ V. $2 \in A$

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. Aşağıdaki kümelerden sonlu küme ve sonsuz küme olanları belirleyiniz.

$A = \{x \mid x < 7000 \text{ , x bir doğal sayı}\}$

$B = \{x \mid x > 7000, \text{ x bir doğal sayı}\}$

C = {Altı basamaklı doğal sayılar}

$Ç = \{x \mid x^2 < 10, \text{ x bir tam sayı}\}$

7. Aşağıdaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

I. Elemanı olmayan kümeye .... denir.

II. Sonlu olmayan kümelere .... denir.

III. Bir A kümesinin eleman sayısı .... biçiminde gösterilir.

IV. Üzerinde işlem yapılan tüm kümelere ait elemanları içeren ve boş kümeden farklı olan kümeye .... denir.

2.1.2. Alt Küme

Örnek

Kars merkez ve bağlı ilçeler yandaki haritada görülmektedir. Buna göre Selim ilçesi Akpınar köyü nüfusuna kayıtlı Ali ve Sarıkamış merkez nüfusuna kayıtlı Hanife'nin Kars ili nüfüsuna kayıtlı olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

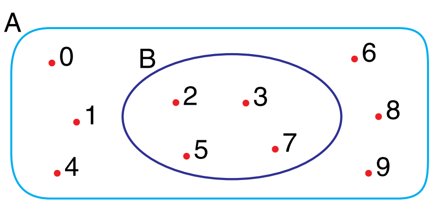
Her köy bulunduğu ilçeye, her ilçe bulunduğu ile bağlı olduğundan hem Ali hem de Hanife Kars ili nüfusuna kayıtlı olmuş olur.

Örnek

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$

kümelerini Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm



Venn şemasını incelediğimizde B kümesinin her elemanının aynı zamanda A kümesinin de elemanı olduğunu görürüz.

Bilgi

B kümesinin her elemanı aynı zamanda A kümesinin de elemanı ise B kümesine A kümesinin bir alt kümesi denir. Bu durum "$B \subset A$" veya "$B \subseteq A$" biçiminde gösterilir ve "B kümesi A kümesinin alt kümesidir." diye okunur ya da "$A \supset B$" veya "$A \supseteq B$" biçiminde gösterilir ve "A kümesi B kümesini kapsar." diye okunur.

B kümesinin en az bir elemanı A kümesinin bir elemanı değilse B kümesi A kümesinin bir alt kümesi değildir denir. Bu durum "$B \not\subset A$" veya "$B \not\subseteq A$" biçiminde gösterilir ve "B kümesi A kümesinin bir alt kümesi değildir." diye okunur.

Bir kümenin, varsa kendisinden başka her alt kümesine kümenin öz alt kümesi denir.

Örnek

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

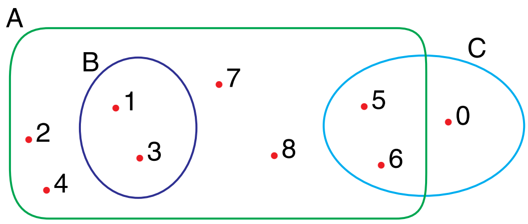
B = {1, 3},

C = {0, 5, 6} kümeleri veriliyor.

B ve C kümelerinin A kümesinin alt kümesi olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

Kümeleri Venn şeması ile gösterelim.



Venn şemasını incelediğimizde $B \subseteq A$, $C \nsubseteq A$ olduğunu görürüz.

Örnek

A = {1, 2, 3} kümesinin alt kümelerini yazalım.

Çözüm

A kümesinin sıfır elemanlı alt kümesi	A kümesinin 1 elemanlı alt kümeleri	A kümesinin 2 elemanlı alt kümeleri	A kümesinin 3 elemanlı alt kümesi
{ }	{1}, {2}, {3}	{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}	{1, 2, 3}

$\{\ \} \subseteq A$, $\{1\} \subseteq A$, $\{2\} \subseteq A$, $\{3\} \subseteq A$, $\{1, 2\} \subseteq A$, $\{1, 3\} \subseteq A$, $\{2, 3\} \subseteq A$, $\{1, 2, 3\} \subseteq A$

Örnek

E = {rakamların kümesi} biçiminde verilen E evrensel kümesi ile

A = {0, 2, 4, 6, 8}

B = {1, 3, 5, 7, 9}

C = {2, 3, 5, 7}

D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} kümeleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

A kümesi çift rakamlardan oluştuğu için $A \subseteq E$

B kümesi tek rakamlardan oluştuğu için $B \subseteq E$

C kümesi asal rakamlardan oluştuğu için $C \subseteq E$

D kümesi 7 ve 7'den küçük rakamlardan oluştuğu için $D \subseteq E$ olur.

Örnek

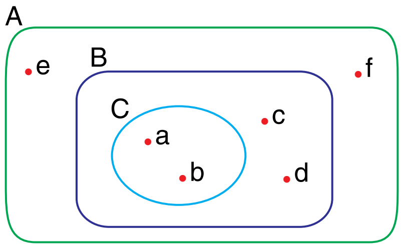
A = {a, b, c, d, e, f}

B = {a, b, c, d}

C = {a, b}

kümelerini Venn şeması ile gösterip aralarındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm



Venn şemasını incelediğimizde

$C \subseteq B$, $B \subseteq A$ ve $C \subseteq A$ olduğunu görürüz.

Alt Kümenin Özellikleri

Bilgi

1) Boş küme her kümenin alt kümesidir. Herhangi bir A kümesi için $\varnothing \subseteq A$'dır.
2) Her küme kendisinin alt kümesidir. Herhangi bir A kümesi için $A \subseteq A$'dır.
3) Her küme kendisi ile ilgili evrensel kümenin alt kümesidir. A herhangi bir küme, E evrensel küme olmak üzere $A \subseteq E$'dir.
4) C kümesi B kümesinin alt kümesi, B kümesi A kümesinin alt kümesi ise C kümesi A kümesinin alt kümesi olur. Herhangi A, B ve C kümeleri için $C \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise $C \subseteq A$ olur.

Örnek

A = ∅ , B = {a} , C = {a, b}, D = {1, 2, 3} kümelerinin alt kümelerini yazıp kümenin eleman sayısı ile alt küme sayısı arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

Küme	Kümenin Eleman Sayısı	Kümenin Alt Kümeleri	Kümenin Alt Küme Sayısı
A = ∅	0	∅	$1 = 2^{0}$ kümenin eleman sayısı
B = {a}	1	∅ , {a}	$2 = 2^{1}$ kümenin eleman sayısı
C = {a, b}	2	∅, {a}, {b}, {a, b}	$4 = 2^{2}$ kümenin eleman sayısı
D = {1, 2, 3}	3	∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2},{1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}	$8 = 2^{3}$ kümenin eleman sayısı

Bilgi

n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı 2^n, öz alt küme sayısı $2^n - 1$'dir.

Örnek

s(A) = 5 olduğuna göre A kümesinin alt küme sayısını bulalım.

Çözüm

n = 5 olduğundan A kümesinin $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ tane alt kümesi vardır.

Örnek

A kümesinin alt küme sayısı 128 olduğuna göre A kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ olduğundan A kümesinin eleman sayısı 7 olarak elde edilir.

Örnek

s(A) = 6 olduğuna göre A kümesinin öz alt küme sayısını bulalım.

Çözüm

s(A) = 6 ise öz alt küme sayısı

$2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ olarak bulunur.

Örnek

Bir A kümesinin alt küme sayısı ile öz alt küme sayıları toplamı 511 olduğuna göre A kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

s(A) = n olsun. Bu durumda

$2^n + 2^n - 1 = 511 \Rightarrow 2 \cdot 2^n = 512$

$2^n = 256 \Rightarrow n = 8$ olarak bulunur.

Örnek

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde;

a) 3 eleman olarak bulunmaz?

b) 5 eleman olarak bulunur?

Çözüm

a) A kümesinden 3'ü çıkarırsak geriye 4 eleman kalır. Bu durumda bu 4 elemanla oluşturulacak alt kümelerin hiçbirinde 3 eleman olarak bulunmaz.

Buna göre $2^4 = 16$ tane alt kümede 3 eleman olarak bulunmaz.

b) A kümesinden 5'i çıkarırsak geriye kalan 4 eleman ile oluşturulan $2^4 = 16$ tane alt kümesinde 5 eleman olarak bulunmaz. Bu durumda A kümesinin tüm alt küme sayısından 5'in bulunmadığı alt küme sayısını çıkarırsak $2^5 - 2^4 = 32 - 16 = 16$ tane alt kümesinde 5 eleman olarak bulunur.

Örnek

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a ve b'den <u>en az</u> birinin bulunamayacağını bulalım.

Çözüm

Kümeden a ve b elemanlarını çıkarırsak, geriye kalan elemanlarla oluşturulan alt kümelerde a ve b den hiçbiri bulunmaz. Yani $2^2 = 4$ tane alt kümede a ve b'den hiçbiri bulunmaz.

Bu 4 alt kümeye a'yı eklersek a bulunur, b bulunmaz.

Bu 4 alt kümeye b'yi eklersek b bulunur, a bulunmaz.

Bu durumda a ve b'den en az birinin bulunmadığı alt küme sayısı $4 + 4 + 4 = 12$ olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. $A = \{1, 2, 3, \{2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$ kümesi veriliyor.
Buna göre;

I. $1 \in A$ II. $\{1\} \subseteq A$
III. $\{2, 3\} \subseteq A$ IV. $\{2, 3\} \in A$
V. $3 \in A$ VI. $\{2, \{2, 3\}\} \subseteq A$
VII. $\{1, 3\} \in A$ VIII. $\{1, 3, 4\} \in A$
IX. $\{\{1, 3, 4\}\} \subseteq A$ X. $\{1, 4\} \subseteq A$

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

2. B kümesinin her elemanı aynı zamanda A kümesinin de bir elemanı ise B kümesine A kümesinin .... denir.

3. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde;
a) a elemanı <u>bulunmaz</u>?
b) c elemanı bulunur?
c) a ve c'den <u>en az</u> biri bulunur?
ç) a bulunur c <u>bulunmaz</u>?
d) a ve c aynı anda bulunur?

4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin alt kümelerini yazınız.

5. Bir kümenin alt küme sayısı ile öz alt küme sayısı toplamı 127 olduğuna göre bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6. Bir A kümesinin eleman sayısı 3 artırıldığında alt küme sayısının kaç katına çıkacağını bulunuz.

7. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ kümeleri veriliyor.
Buna göre $A \subseteq C \subseteq B$ olacak biçimde kaç tane C kümesi yazılabileceğini bulunuz.

8. A kümesinin bazı alt kümeleri $\{1\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3\}$ olduğuna göre A kümesinin alt küme saysı <u>en az</u> kaçtır?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

9. ÖNERME kelimesinin harfleriyle elde edilen kümenin öz alt küme sayısını bulunuz.

10. Bir kümenin alt küme sayısı $3n + 5$, öz alt küme sayısı $2n + 13$ olduğuna göre bu kümenin eleman sayısını bulunuz.

2.1.3. İki Kümenin Eşitliği

Örnek

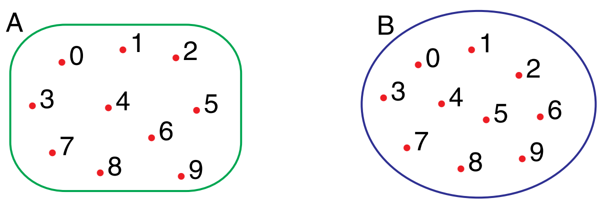
$A = \{x \mid x^2 < 100,\ x \text{ bir doğal sayı}\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümeleri veriliyor.

Kümeleri Venn şeması ile ayrı ayrı gösterip aralarındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

Karesi 100'den küçük olan doğal sayılar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 olduğundan
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olur. Kümeler Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir.



Kümeler incelendiğinde A kümesinin her elemanının B kümesinin de elemanı olduğu, B kümesinin her elemanının da A kümesinin bir elemanı olduğu görülür.

Bu durumda $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olur.

Bilgi

Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir. A ve B eşit kümeler ise bunu "A = B" biçiminde gösterir, "A eşittir B" diye okuruz.

A ve B kümeleri eşit kümeler değil ise bunu "$A \neq B$" biçiminde gösterir, "A eşit değil B" diye okuruz.

A ve B eşit kümeler ise A kümesinin her elemanı B kümesinin bir elemanı, B kümesinin her elemanı da A kümesinin bir elemanı olur.

$A = B$ ise $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olur.

Bu ifadenin karşıtı da doğrudur. Yani $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise $A = B$ olur.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıda verilen kümeleri inceleyiniz. Eşit olan kümeleri belirleyiniz.

$A = \{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\}$

$B = \{x \mid 1 \leq x \leq 7,\ x \text{ tam sayı}\}$

$C = \{x \mid 0 < x^2 < 50,\ x \text{ doğal sayı}\}$

$D = \{x \mid x \text{ alfabemizdeki sesli harfler}\}$

2. $A = \{x \mid x \text{ İSTANBUL kelimesindeki harfler}\}$

$B = \{İ, T, N, \blacksquare, B, L, \blacktriangle, U\}$ kümeleri veriliyor.

$A = B$ olduğuna göre $\blacksquare$ ve $\blacktriangle$ yerlerine hangi harflerin geleceğini bulunuz. (Hangi harfin hangi şeklin yerine geleceği önemli değildir.)

2.2. KÜMELERDE İŞLEMLER

2.2.1. Kümelerde Birleşim, Kesişim, Fark ve Tümleme İşlemleri

Kümelerde Birleşim ve Kesişim İşlemleri

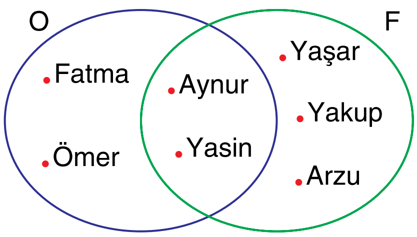
Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerden Fatma, Ömer, Aynur ve Yasin okul korosuna; Yaşar, Yakup, Arzu, Aynur ve Yasin folklor ekibine seçilmişlerdir.

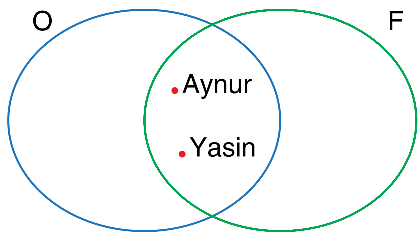
Buna göre okul korosu ve folklor ekibinden en az birine seçilenleri ve her iki faaliyete seçilenleri Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm

Okul korosuna seçilen öğrencilerin oluşturduğu kümeyi O ile, folklor ekibindeki öğrencilerin oluşturduğu kümeyi F ile gösterelim.



En az bir faaliyete seçilen öğrenciler

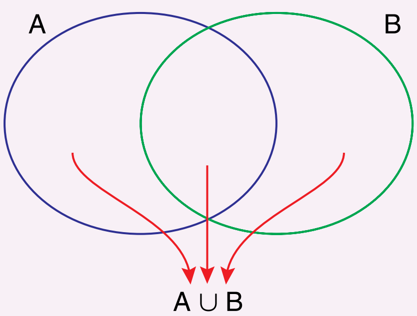


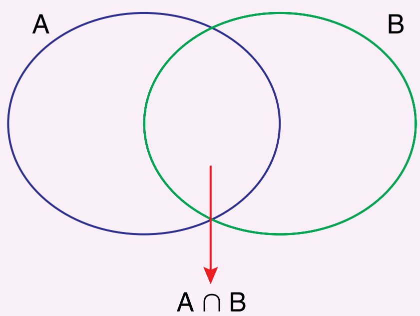
Her iki faaliyete de seçilen öğrenciler

Bilgi

A ve B gibi herhangi iki kümenin bütün elemanlarından oluşan kümeye, A ile B kümelerinin **birleşim kümesi** denir. Bu küme "$A \cup B$" biçiminde gösterilir ve "A birleşim B" diye okunur. Birleşim kümesi ortak özellik yöntemi ile $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ veya } x \in B \}$ şeklinde gösterilir.

A ve B gibi herhangi iki kümenin tüm ortak elemanlarından oluşan kümeye, A ile B kümelerinin **kesişim kümesi** denir. Bu küme "$A \cap B$" biçiminde gösterilir ve "A kesişim B" diye okunur. Kesişim kümesi ortak özellik yöntemi ile $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \}$ şeklinde gösterilir.





Örnek

$A = \{a, b, c, d, e\}$

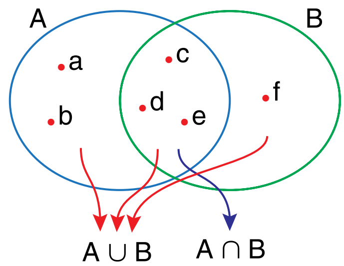
$B = \{c, d, e, f\}$

Kümeleri için $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini bulup liste yöntemi ve Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A \cap B = \{c, d, e\}$



biçiminde elde edilir.

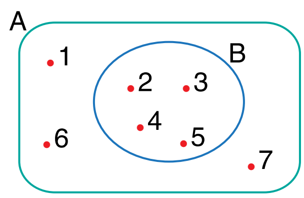
Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $B = \{2, 3, 4, 5\}$ kümeleri için $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini bulup Venn şeması ile gösterelim. A ile $A \cup B$, B ile $A \cap B$ kümelerini karşılaştıralım.

Çözüm

$A \cup B = \{1,2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$



Bu durumda

$A = A \cup B$

$B = A \cap B$ olarak elde edilir.

Bilgi

A ve B kümeleri için $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A, \ A \cap B = B$ olur.

Örnek

$A = \{a, b, ç, f, g\}$

$B = \{ç, f, g, h, k\}$ kümeleri için

$A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini bulalım. Bulduğumuz kümeleri A ve B kümeleriyle karşılaştıralım.

Çözüm

$A \cup B = \{a, b, ç, f, g, h, k\}$

$A \cap B = \{ç, f, g\}$ olur.

Şimdi bu kümeleri A ve B kümeleri ile karşılaştıralım.

$A \cup B$ kümesini incelediğimizde $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ olduğunu,

$A \cap B$ kümesini incelediğimizde $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ olduğunu görürüz.

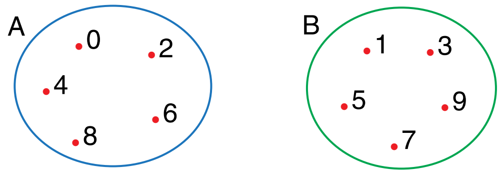
Bilgi

A ve B herhangi iki küme olmak üzere $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olur.

Örnek

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümeleri için $A \cap B$ kümesini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm



A ve B kümelerini incelediğimizde kümelerin ortak elemanlarının olmadığı görülür.

Bu kümeler için $A \cap B$ kümesi liste yöntemi ile $A \cap B = \varnothing$ biçiminde gösterilir.

Bilgi

A ve B kümelerinin ortak elemanı yoksa A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.

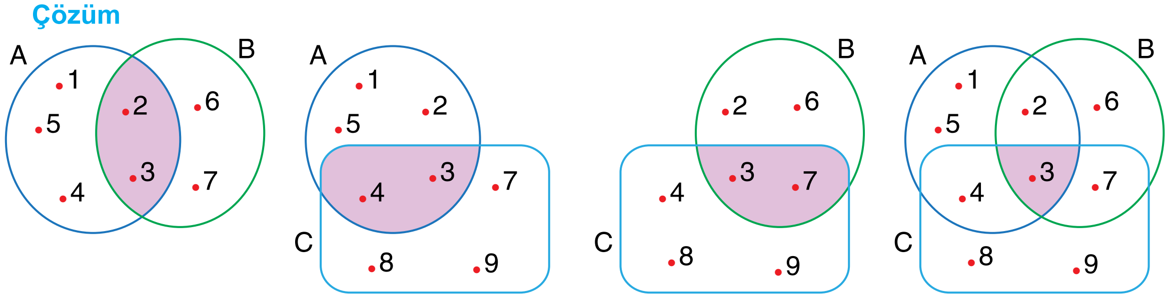
$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A ile B ayrık kümelerdir.

Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$ ve $C = \{3, 4, 7, 8, 9\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ ve $A \cap B \cap C$ kümelerini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösterelim.

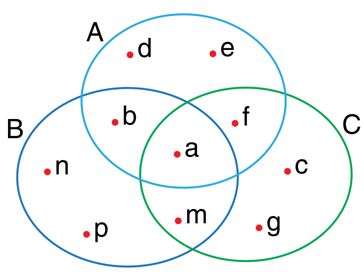
Çözüm



$A \cap B = \{2, 3\}$ $A \cap C = \{3, 4\}$ $B \cap C = \{3, 7\}$ $A \cap B \cap C = \{3\}$

olarak bulunur.

Örnek



Yanda A, B ve C kümeleri Venn şeması ile verilmiştir.

Buna göre $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ ve $A \cup B \cup C$ kümelerini liste yöntemi ile gösterelim.

Çözüm

$A \cup B = \{a, b, d, e, f, m, n, p\}$

$A \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, m\}$

$B \cup C = \{a, b, c, f, g, m, n, p\}$

$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, m, n, p\}$ olarak bulunur.

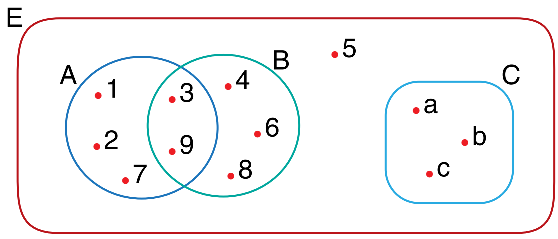
Örnek

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c\}$ evrensel kümesi ve

$A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$, $B = \{3, 4, 6, 8, 9\}$ ve $C = \{a, b, c\}$ kümeleri veriliyor.

Verilen kümeleri Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm



Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ ve $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıda her bir şıktaki birleşim ve kesişim kümelerini bulup istenilen karşılaştırmaları yapalım.

a) $A \cup A$ kümesi ile A kümesini,

b) $A \cap A$ kümesi ile A kümesini,

c) $A \cap B$ kümesi ile $B \cap A$ kümesini,

ç) $A \cup B$ kümesi ile $B \cup A$ kümesini,

d) $A \cup \varnothing$ kümesi ile A kümesini,

e) $A \cap \varnothing$ kümesi ile $\varnothing$'yi,

f) $(A \cup B) \cup C$ kümesi ile $A \cup (B \cup C)$ kümesini,

g) $(A \cap B) \cap C$ kümesi ile $A \cap (B \cap C)$ kümesini,

h) $A \cap (B \cup C)$ kümesi ile $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ kümesini,

ı) $A \cup (B \cap C)$ kümesi ile $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ kümesini karşılaştıralım.

Çözüm

a) $A \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \cup A = A$ olduğunu

b) $A \cap A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \cap A = A$ olduğunu

c) $A \cap B = \{2, 3, 5\}$, $B \cap A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow A \cap B = B \cap A$ olduğunu

ç) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow A \cup B = B \cup A$ olduğunu

d) $A \cup \varnothing = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \cup \varnothing = A$ olduğunu

e) $A \cap \varnothing = \varnothing \Rightarrow A \cap \varnothing = \varnothing$ olduğunu

f) $\left.\begin{array}{l} A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} \\ B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\} \Rightarrow A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ olduğunu

g) $\left.\begin{array}{l} A \cap B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow (A \cap B) \cap C = \{3, 5\} \\ B \cap C = \{3, 5, 7\} \Rightarrow A \cap (B \cap C) = \{3, 5\} \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ olduğunu

h) $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 5\}$

$A \cap B = \{2, 3, 5\}$, $A \cap C = \{1, 3, 5\} \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olduğunu

ı) $B \cap C = \{3, 5, 7\} \Rightarrow A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olduğunu elde ederiz.

Kümelerde Birleşim ve Kesişim İşlemlerinin Özellikleri

Bilgi

1) $A \cup A = A$, $\cup$ işleminin tek kuvvet özelliği vardır.
   $A \cap A = A$, $\cap$ işleminin tek kuvvet özelliği vardır.

2) $A \cap B = B \cap A$, $\cap$ işleminin değişme özelliği vardır.
   $A \cup B = B \cup A$, $\cup$ işleminin değişme özelliği vardır.

3) $A \cup \varnothing = A$, A kümesinin $\varnothing$ ile birleşimi A kümesine eşittir.
   $A \cap \varnothing = \varnothing$, A kümesinin $\varnothing$ ile kesişimi $\varnothing$ ye eşittir.

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\cup$ işleminin birleşme özelliği vardır.
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\cap$ işleminin birleşme özelliği vardır.

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\cap$ işleminin $\cup$ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır.
   $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$, $\cap$ işleminin $\cup$ işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır.

6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\cup$ işleminin $\cap$ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır.
   $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$, $\cup$ işleminin $\cap$ işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır.

Örnek

$A \cup C = \{a, b, c, d, e\}$, $B \cup C = \{a, d, e, f, g\}$ olduğuna göre $(A \cap B) \cup C$ kümesini bulalım.

Çözüm

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ olduğundan

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = \{a, b, c, d, e\} \cap \{a, d, e, f, g\}$

$= \{a, d, e\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$A \cap B = \{k, l, m\}$, $A \cap C = \{p, r, s, t\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesini bulalım.

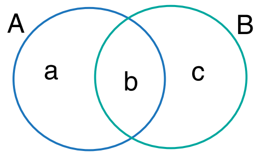
Çözüm

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olduğundan

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{k, l, m\} \cup \{p, r, s, t\}$

$= \{k, l, m, p, r, s, t\}$ olarak elde edilir.

Örnek



Yandaki Venn şemasında A ve B kümeleri verilmiştir. Şema içindeki harfler bulundukları en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermektedir.

Buna göre $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

Venn şemasını incelediğimizde

$s(A \cup B) = a + b + c$

$s(A) = a + b$, $s(B) = b + c$, $s(A \cap B) = b$ olduğu görülür.

Buna göre

$$\begin{aligned} s(A) + s(B) - s(A \cap B) &= a + b + b + c - b \\ &= a + b + c \\ &= s(A \cup B) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Bilgi

A ve B kümeleri için $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliği vardır.

Örnek

$s(A) = 10$, $s(B) = 9$, $s(A \cap B) = 5$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \Rightarrow s(A \cup B) = 10 + 9 - 5 = 14$ olarak elde edilir.

Örnek

$s(A) = 2x + 5$, $s(B) = x + 7$, $s(A \cap B) = x$ ve $s(A \cup B) = 20$ olduğuna göre x'in alacağı değeri bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \Rightarrow 20 &= 2x + 5 + x + 7 - x \\ 20 &= 2x + 12 \\ 2x &= 8 \Rightarrow x = 4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

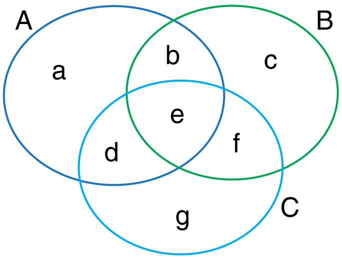
Örnek

$s(A) = 2 \cdot s(B)$, $s(A \cap B) = 3$ ve $s(A \cup B) = 12$ olduğuna göre B kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \Rightarrow 12 &= s(A) + s(B) - 3 \\ 15 &= 2 \cdot s(B) + s(B) \\ 15 &= 3 \cdot s(B) \\ 5 &= s(B) \text{ olarak elde edilir.} \end{aligned}$$

Örnek



Yandaki Venn şemasında A, B ve C kümeleri verilmiştir. Şema içindeki harfler bulundukları en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermektedir.

Buna göre $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

Venn şemasını incelediğimizde

$s(A) = a + b + e + d$,

$s(B) = b + c + e + f$,

$s(C) = d + e + f + g$,

$s(A \cap B) = b + e$, $s(A \cap C) = d + e$, $s(B \cap C) = e + f$,

$s(A \cap B \cap C) = e$,

$s(A \cup B \cup C) = a + b + c + d + e + f + g$ olduğu görülür.

Buna göre

$s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

$= a + b + e + d + b + c + e + f + d + e + f + g - (b + e) - (d + e) - (e + f) + e$

$= a + \cancel{b} + \cancel{e} + \cancel{d} + b + c + \cancel{e} + \cancel{f} + d + \cancel{e} + f + g - \cancel{b} - \cancel{e} - \cancel{d} - \cancel{e} - \cancel{e} - \cancel{f} + e$

$= a + b + c + d + e + f + g$

$= s(A \cup B \cup C)$ elde edilir.

Bilgi

A, B ve C kümeleri için

$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$ eşitliği vardır.

Örnek

$s(A) = 13$, $s(B) = 11$, $s(C) = 15$, $s(A \cap B) = 4$, $s(A \cap C) = 7$, $s(B \cap C) = 6$ ve $s(A \cap B \cap C) = 3$

olduğuna göre $A \cup B \cup C$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

$= 13 + 11 + 15 - 4 - 7 - 6 + 3$

$= 39 - 17 + 3 = 25$ olarak elde edilir.

Bir Kümenin Tümleyeni

Örnek

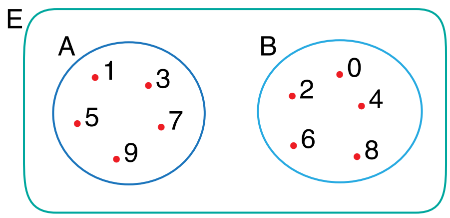
E evrensel küme E = {x | x bir rakam} ve

A = {1, 3, 5, 7, 9}

B = {0, 2, 4, 6, 8} kümeleri veriliyor.

E, A ve B kümelerini Venn şeması ile gösterip A ile B kümelerinin arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm



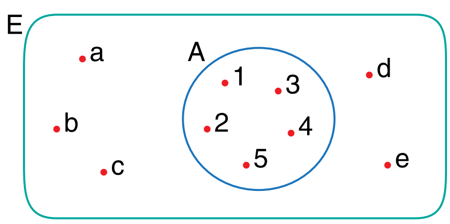
Venn şemasında da görüldüğü gibi $A \cap B = \varnothing$ ve $A \cup B = E$'dir.

A kümesi, B kümesinin elemanı olmayan fakat B kümesini kapsayan E evrensel kümesinin elemanlarından, B kümesi de A kümesinin elemanı olmayan fakat A kümesini kapsayan E evrensel kümesinin elemanlarından oluşmuştur.

Bilgi

E evrensel küme $A \subseteq E$ verilsin. A kümesinde bulunmayıp, E evrensel kümesinin elemanlarından oluşan kümeye A kümesinin **tümleyen kümesi** denir ve "A'" biçiminde gösterilir. Tümleyen küme ortak özellik yöntemi ile $A' = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E\}$ biçiminde gösterilir.

Örnek



Yukarıda verilen Venn şemasına göre aşağıda istenenleri bulalım.

a) A' kümesini,

b) $(A')'$ kümesini,

c) $A \cap A'$ kümesini,

ç) $A \cup A'$ kümesini,

d) E' kümesini

e) s(E)'yi

f) $s(A) + s(A')$ toplamını bulalım. Bulduğumuz bu toplamla evrensel kümenin (E) eleman sayısını karşılaştıralım.

Çözüm

Venn şemasını incelediğimizde

a) $A' = \{a, b, c, d, e\}$

b) $(A')' = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

c) $A \cap A' = \varnothing$

ç) $A \cup A' = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e\} = E$

d) $E' = \varnothing$

e) $s(E) = 10$

f) $s(A) = 5$, $s(A') = 5 \Rightarrow s(A) + s(A') = 5 + 5 = 10 = s(E)$ olduğunu elde ederiz.

Tümleme İşleminin Özellikleri

Bilgi

1) $(A')' = A$

2) $A \cap A' = \varnothing$

3) $A \cup A' = E$

4) $E' = \varnothing$, $\varnothing' = E$

5) $s(A) + s(A') = s(E)$

Örnek

E evrensel küme $A \subseteq E$ ve $B \subseteq E$ kümeleri veriliyor.

$s(A) + s(B) = 13$, $s(A') + s(B') = 15$ olduğuna göre s(E) değerini bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{rl} & s(A) + s(B) = 13 \\ + & s(A') + s(B') = 15 \\ \hline & s(A) + s(A') + s(B) + s(B') = 28 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s(E) + s(E) &= 28 \\ 2 \cdot s(E) &= 28 \\ s(E) &= 14 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek

E evrensel küme $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$A = \{a, b, c\}$ ve

$B = \{c, d, e\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıda belirtilen kümeleri bulup istenen işlemleri yapalım.

a) $(A \cap B)'$ kümesi ile $A' \cup B'$ kümesini

b) $(A \cup B)'$ kümesi ile $A' \cap B'$ kümesini karşılaştıralım.

Çözüm

a) $A \cap B = \{c\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{a, b, d, e, f, g\}$

$A' = \{d, e, f, g\},\ B' = \{a, b, f, g\} \Rightarrow A' \cup B' = \{a, b, d, e, f, g\}$

$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$

b) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{f, g\}$

$A' = \{d, e, f, g\},\ B' = \{a, b, f, g\} \Rightarrow A' \cap B' = \{f, g\}$

$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$ olduğu elde edilir.

Bilgi

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ve $(A \cap B)' = A' \cup B'$ eşitlikleri De Morgan kuralları olarak adlandırılır.

Örnek

$(A \cap B) \cup (A' \cup B)'$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$(A \cap B) \cup (A' \cup B)' = (A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') = A \cap E = A$

Örnek

$[\,A \cap (A \cap B)'\,] \cap (B \cup \varnothing)$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}
[\,A \cap (A \cap B)'\,] \cap (B \cup \varnothing) &= [\,A \cap (A' \cup B')\,] \cap B \\
&= [\,(A \cap A') \cup (A \cap B')\,] \cap B \\
&= [\,\varnothing \cup (A \cap B')\,] \cap B \\
&= (A \cap B') \cap B \\
&= A \cap (B' \cap B) \\
&= A \cap \varnothing = \varnothing
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Kümelerde Fark İşlemi

Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerden Mesut, Kemal, Eda, Mehtap, Turan ve Songül satranç kursuna; Turan, Songül, Figen, Hülya, Nahit ve Bülent halk oyunları kursuna katılmışlardır.

Bu kümeleri liste yöntemi ve Venn şeması ile gösterelim. Yalnız satranç ve yalnız halk oyunları kursuna katılanları belirleyelim.

Çözüm

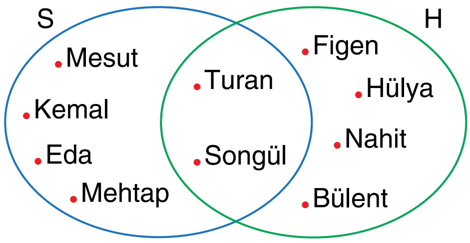
Satranç kursuna katılanların kümesini S ile, halk oyunları kursuna katılanların kümesini H ile gösterelim.

Buna göre kümeler liste yöntemi ile

S = {Mesut, Kemal, Eda, Mehtap, Turan, Songül}

H = {Turan, Songül, Figen, Hülya, Nahit, Bülent} biçiminde gösterilir.

Şimdi bu kümeleri Venn şeması ile gösterelim.



Venn şemasını incelediğimizde yalnız satranç kursuna katılan öğrencilerin Mesut, Kemal, Eda ve Mehtap, yalnız halk oyunları kursuna katılan öğrencilerin Figen, Hülya, Nahit ve Bülent olduğunu görürüz. Turan ve Songül ise her iki kursa da katılmıştır.

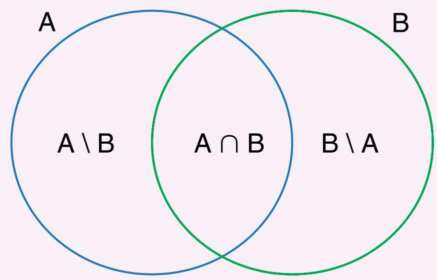
Bilgi

A ve B iki küme olmak üzere A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin B kümesinden farkı** denir.

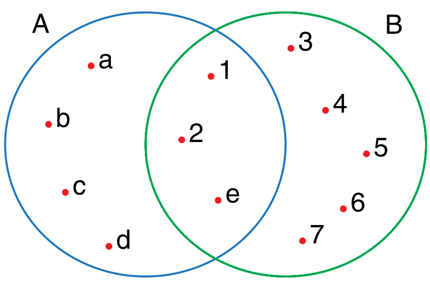
Bu küme "$A \setminus B$" veya "$A - B$" biçiminde gösterilir.

"$A \setminus B$" kümesi ortak özellik yönetimi ile

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$ biçiminde gösterilir.



Örnek



Yanda verilen Venn şemasına göre $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ kümelerini bulalım. Bulduğumuz kümelerin eleman sayıları ile $A \cup B$ kümesinin eleman sayısını karşılaştıralım.

Çözüm

$A \setminus B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{1, 2, e\}$, $B \setminus A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ olarak bulunur.

Ayrıca şemayı incelediğimizde $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ olduğu görülür.

$s(A \setminus B) = 4$, $s(A \cap B) = 3$, $s(B \setminus A) = 5$ ve

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$s(A \cup B) = 12$ olur.

$12 = 4 + 3 + 5$ olacağından

$\Rightarrow$ $s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(A \cap B) + s(B \setminus A)$ elde edilir.

Bilgi

A ve B kümeleri için

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ ve

$s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(A \cap B) + s(B \setminus A)$ eşitlikleri vardır.

Örnek

E evrensel kümesi $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

olmak üzere aşağıda belirtilen kümeleri bulup istenen işlemleri yapalım.

a) $A \setminus B$ ile $A \cap B'$ kümelerini karşılaştıralım.

b) $A \setminus B$ ile $B \setminus A$ kümelerini karşılaştıralım.

c) $A \setminus \varnothing$ kümesini,

ç) $\varnothing \setminus A$ kümesini,

d) $E \setminus A$ kümesini,

e) $A \setminus E$ kümesini,

f) $A \setminus A$ kümesini bulalım.

Çözüm

a) $B' = \{1, 2, 3, 9\} \Rightarrow A \cap B' = \{1, 2, 3\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B'$

b) $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$, $B \setminus A = \{6, 7, 8\} \Rightarrow A \setminus B \neq B \setminus A$

c) $A \setminus \varnothing = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

ç) Boş kümenin elemanı olmadığı için $\varnothing \setminus A = \varnothing$ olur.

d) $E \setminus A = \{6, 7, 8, 9\} = A'$

e) A kümesinin evrensel kümenin elemanlarından farklı elemanları olamayacağından $A \setminus E = \varnothing$ olur.

f) $A \setminus A = \varnothing$ elde edilir.

Fark İşleminin Özellikleri

Bilgi

1) $A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq B \setminus A$, fark işleminin değişme özelliği yoktur.

2) $A \setminus B = A \cap B'$

3) $A \setminus \varnothing = A$

4) $\varnothing \setminus A = \varnothing$

5) $E \setminus A = A'$

6) $A \setminus E = \varnothing$

7) $A \setminus A = \varnothing$

Örnek

$A = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ kümeleri için $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ kümesini bulalım.

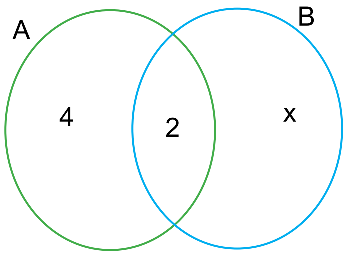
Çözüm

$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$, $B \setminus A = \{5, 8, 9\} \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$ olur.

Örnek

$s(A \setminus B) = 4$, $s(B \setminus A) = 3 \cdot s(A)$ ve $s(A \cap B) = 2$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ değerini bulalım.

Çözüm



$s(B \setminus A) = x$ diyelim. Bu durumda 2, 4 ve x bulundukları en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermek üzere

$$s(B \setminus A) = 3 \cdot s(A)$$
$$x = 3 \cdot 6 = 18$$

$s(A \cup B) = 4 + 2 + x = 6 + 18 = 24$ olarak elde edilir.

Örnek

$s(A \setminus B) = 7$, $s(B \setminus A) = 8$, $s(A \cup B) = 21$ olduğuna göre $A \cap B$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$s(A \cap B) = x$ dersek

$$s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(A \cap B) + s(B \setminus A)$$

$21 = 7 + x + 8 \Rightarrow x = 6$ olarak bulunur.

Örnek

$A \setminus (A \setminus B)$ kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B)$$
$$= (A \cap A') \cup (A \cap B)$$
$$= \varnothing \cup (A \cap B)$$

$= A \cap B$ olarak elde edilir.

Örnek

$(A' \setminus B) \cap (B \setminus A)$ kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$(A' \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A' \cap B') \cap (B \cap A')$$
$$= (A' \cap A') \cap (B' \cap B)$$

$= A' \cap \varnothing = \varnothing$ olarak elde edilir.

Örnek

$(A \setminus B')' \cup A$ kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$(A \setminus B')' \cup A = (A \cap B)' \cup A = (A' \cup B') \cup A$$
$$= (A' \cup A) \cup B'$$

$= E \cup B' = E$ olarak elde edilir.

Örnek

$A \subseteq B \subseteq C$ olduğuna göre $(A \setminus B) \cup (C \setminus B)$ kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$

$B \subseteq C \Rightarrow C \setminus B = B'$ olur. Bu durumda

$(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = \varnothing \cup B'$

$= B'$ elde edilir.

Kümelerle Yapılan İşlemler ve Sembolik Mantık Kuralları Arasındaki İlişki

Kümelerle yapılan işlemler ve sembolik mantıkta kullanılan sembol, gösterim ve bunlarla ifade edilen işlemler arasındaki ilişkilerden bazıları aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Sembolik Mantık	0	1	$\vee$	$\wedge$	$\equiv$	Değil (′)
Kümeler	$\varnothing$	E	$\cup$	$\cap$	$=$	Tümleme (′)

Sembolik Mantık	Kümeler
$(p')'$	$(A')'$
$p \vee p' \equiv 1$	$A \cup A' = E$
$p \wedge p' \equiv 0$	$A \cap A' = \varnothing$
$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$p \vee 1 \equiv 1$	$A \cup E = E$
$p \vee 0 \equiv p$	$A \cup \varnothing = A$
$p \wedge 0 \equiv 0$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$p \wedge 1 \equiv p$	$A \cap E = A$

Örnek

$(A' \cup B)' \cup (A \cap B')'$ ifadesini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçimde gösterelim.

Çözüm

A kümesini p önermesiyle

B kümesini q önermesiyle gösterip

$(A' \cup B)' \cup (A \cap B')'$ ifadesinin yerine $(p' \vee q)' \vee (p \wedge q')'$ bileşik önermesinin en sade hâlini yazalım.

$(p' \vee q)' \vee (p \wedge q')' \equiv (p \wedge q') \vee (p \wedge q')'$ $(p \vee p' \equiv 1$ yardımıyla)

$\equiv 1$ bulunur.

Bu durumda $(A' \cup B)' \cup (A \cap B')' = E$ olarak elde edilir.

Örnek

$(A' \cup B) \cap (A \cap B)'$ ifadesini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçimde gösterelim.

Çözüm

A kümesini p önermesi ile,

B kümesini q önermesi ile gösterip

$(A' \cup B) \cap (A \cap B)'$ ifadesinin yerine $(p' \vee q) \wedge (p \wedge q)'$ bileşik önermesinin en sade hâlini yazalım.

$(p' \vee q) \wedge (p \wedge q)' \equiv (p' \vee q) \wedge (p' \vee q')$

$\equiv p' \vee (q \wedge q')$

$\equiv p' \vee 0 = p'$ olduğundan

$(A' \cup B) \cap (A \cap B)' = A'$ olarak elde edilir.

Örnek

$(p' \vee q')' \vee (q' \vee p)'$ ifadesini kümelerdeki işlemleri kullanarak en sade biçimde gösterelim.

Çözüm

p önermesini A kümesi ile

q önermesini B kümesi ile gösterip

$(p' \vee q')' \vee (q' \vee p)'$ bileşik önermesi yerine $(A' \cup B')' \cup (B' \cup A)'$ ifadesini sadeleştireceğiz.

$(A' \cup B')' \cup (B' \cup A)' = (A \cap B) \cup (B \cap A')$

$= B \cap (A \cup A')$

$= B \cap E = B$ olduğundan

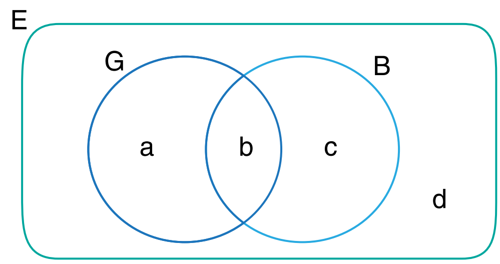
$(p' \vee q')' \vee (q' \vee p)' \equiv q$ olarak elde edilir.

Küme Problemleri

Yanda verilen Venn şemasında her harf bulunduğu en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermektedir.

G : Gitar çalabilen öğrencilerin kümesi,

B : Bağlama çalabilen öğrencilerin kümesi olmak üzere aşağıda verilen tablodaki sonuçları elde etmek, küme problemlerini çözmede bizlere kolaylık sağlayacaktır.



Sözel Anlatım	Küme İşlemleriyle Gösterim	Eleman Sayısı
Bağlama çalabilen öğrenci sayısı	$s(B)$	$b + c$
Gitar çalabilen öğrenci sayısı	$s(G)$	$a + b$
Yalnız gitar çalabilen öğrenci sayısı	$s(G \setminus B)$	a
Her iki müzik aletini de çalabilen öğrenci sayısı	$s(G \cap B)$	b
Gitar veya bağlama çalabilen öğrenci sayısı	$s(G \cup B)$	$a + b + c$
Yalnız bir müzik aleti çalabilen öğrenci sayısı	$s(G \setminus B) + s(B \setminus G)$	$a + c$
<u>En az</u> bir müzik aleti çalabilen öğrenci sayısı	$s(G \cup B)$	$a + b + c$
<u>En çok</u> bir müzik aleti çalabilen öğrenci sayısı	$s(E) - s(G \cap B)$	$a + c + d$
Hiçbir müzik aleti çalamayan öğrenci sayısı	$s((G \cup B)')$ veya $s(E) - s(G \cup B)$	d
Gitar çalamayan öğrenci sayısı	$s(G')$	$c + d$

Örnek

34 kişilik bir sınıfta İngilizce konuşamayan 14 kişi, Fransızca konuşamayan 13 kişi vardır. Bu sınıftaki 4 öğrenci bu dillerden hiçbirini konuşamadığına göre her iki dili de konuşabilen öğrenci sayısını bulalım.

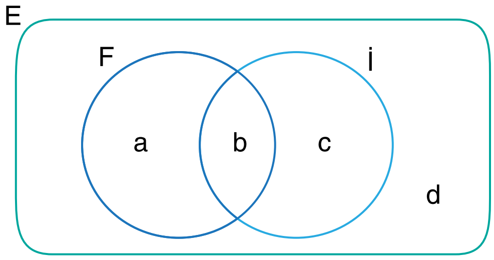
Çözüm

Verilenlere uygun Venn şeması çizerek çözümü yapalım.

E → Evrensel küme (Sınıf mevcudu)

İ → İngilizce konuşabilen öğrencilerin kümesi

F → Fransızca konuşabilen öğrencilerin kümesi olsun.



Venn şemasındaki harfler bulundukları en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermektedir.

Buna göre

$a + b + c + d = 34$ (sınıf mevcudu)

$d = 4$ (hiçbir dili konuşamayan öğrenci sayısı)

$a + d = 14$ (İngilizce konuşamayan öğrenci sayısı)

$c + d = 13$ (Fransızca konuşamayan öğrenci sayısı)

$b =$ (Her iki dili de konuşabilenlerin sayısı) olmak üzere b değerini bulacağız.

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 34 \\ d = 4 \\ a + d = 14 \\ c + d = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a + 4 = 14 \\ a = 10 \\ c + 4 = 13 \\ c = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{r} a + b + c + d = 34 \\ 10 + b + 9 + 4 = 34 \\ b = 11 \end{array}$$

olarak elde edilir.

Örnek

Anıtkabir, Ankara

15 Temmuz Şehitler Köprüsü, İstanbul

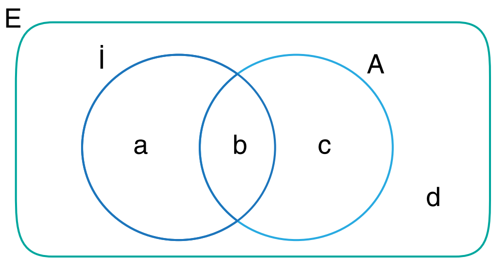
Bir okul 9. sınıf öğrencileri için farklı tarihlerde Ankara ve İstanbul'a gezi düzenleyecektir. Bu şehirlerden yalnız birine veya her ikisine de gitmek isteyen öğrencilerin gezi kulübüne dilekçeyle başvurmaları istenmektedir. Dilekçelere bakıldığında yalnız bir il için dilekçe veren 70 kişi, en az bir il için dilekçe veren 84 kişi ve en çok bir il için dilekçe veren 196 kişi olduğuna göre 9. sınıfta toplam kaç öğrenci olduğunu bulalım.

Çözüm

İ → İstanbul için dilekçe verenlerin kümesi,

A → Ankara için dilekçe verenlerin kümesi

E → Evrensel küme olsun. Venn şemasındaki harfler bulundukları en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermek üzere



$a + c = 70$

$a + b + c = 84$

$a + c + d = 196$

$a + b + c + d$ toplamını bulacağız.

$$\left.\begin{aligned} a + c &= 70 \\ a + b + c &= 84 \\ a + c + d &= 196 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &b + 70 = 84 \Rightarrow b = 14 \\ &d + 70 = 196 \Rightarrow d = 126 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 70 + 14 + 126 \\ &= 210 \end{aligned}$$ olarak elde edilir.

Örnek

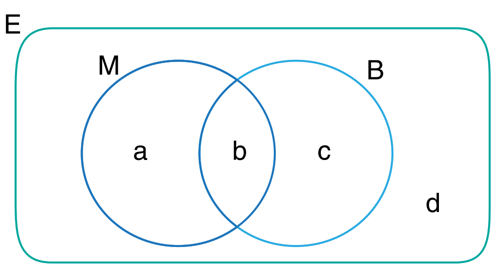
33 kişilik bir kafile, masa tenisi oynayanlar, bilardo oynayanlar, her ikisini de oynayanlar ve bu sporlardan hiçbirini oynamayanlardan oluşmaktadır. Yalnız birisini oynayan 23 kişi, hiçbirini de oynamayan 6 kişi ve masa tenisi oynayan 22 kişi olduğuna göre yalnız masa tenisi oynayan kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm

M → Masa tenisi oynayanların kümesi,

B → Bilardo oynayanların kümesi,

E → Evrensel küme olsun. Venn şemasındaki harfler bulundukları en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermek üzere



$a + b + c + d = 33$

$a + c = 23$

$d = 6$

$a + b = 22$

$a = ?$

$$\left.\begin{aligned} a + b + c + d &= 33 \\ a + c &= 23 \\ d &= 6 \\ a + b &= 22 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b + 23 + 6 = 33 \Rightarrow b = 4$$

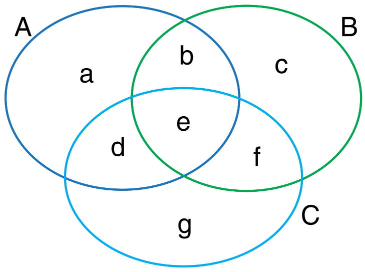
$$\begin{aligned} a + b &= 22 \\ a + 4 &= 22 \\ a &= 18 \end{aligned}$$ olarak elde edilir.

Örnek

56 dairelik bir binada oturan her aile günde A, B ve C olmak üzere üç tane günlük gazeteden <u>en az</u> bir tanesini okumaktadır. Bu ailelerden 30'u günde yalnız bir gazete okumaktadır. Yalnız iki gazete okuyan aile sayıları birbirine eşit her üç gazeteyi de okuyan aile sayısından 2 fazla olduğuna göre her üç gazeteyi de okuyan aile sayısını bulalım.

Çözüm

Venn şemasındaki harfler bulundukları en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermek üzere



$a + b + c + d + e + f + g = 56$

$a + c + g = 30$

$b = d = f = e + 2$

$e = ?$

$$a + \underbrace{b}_{e+2} + c + \underbrace{d}_{e+2} + e + \underbrace{f}_{e+2} + g = 56 \Rightarrow 30 + e + 2 + e + 2 + e + 2 + e = 56$$

$$\Rightarrow 36 + 4e = 56 \Rightarrow 4e = 20$$

$e = 5$ olarak elde edilir.

Örnek

Bir sınıfta İngilizce bilen kız öğrenci sayısı, İngilizce bilmeyen kız öğrenci sayısının 2 katından 3 eksiktir. İngilizce bilmeyen erkek öğrenci sayısı, İngilizce bilen erkek öğrenci sayısının 2 katı ve İngilizce bilmeyen kız öğrenci sayısından 1 eksiktir. Sınıfta 19 kişi İngilizce bildiğine göre sınıf mevcudunu bulalım.

Çözüm

	İngilizce Bilenler	İngilizce Bilmeyenler
Kız	a	b
Erkek	c	d

Buna göre

$a + c = 19$

$d = 2c$

$d = b - 1$

$a = 2b - 3$

$a + b + c + d = ?$

$$\left.\begin{aligned} d &= 2c \\ d &= b - 1 \\ a &= 2b - 3 \\ a + c &= 19 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &b = d + 1 \Rightarrow b = 2c + 1 \\ &a = 2\cdot(2c + 1) - 3 \\ &a = 4c + 2 - 3 = 4c - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a + c &= 19 \\ 4c - 1 + c &= 19 \\ 5c &= 20 \end{aligned}$$

$c = 4$ bulunur.

Bu durumda

$a + c = 19 \Rightarrow a + 4 = 19 \Rightarrow a = 15$

$d = 2c \Rightarrow d = 2\cdot 4 = 8$

$b = 2c + 1 \Rightarrow b = 2\cdot 4 + 1 = 9$

olduğundan sınıf mevcudu $a + b + c + d = 15 + 9 + 4 + 8 = 36$ olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. E evrensel küme

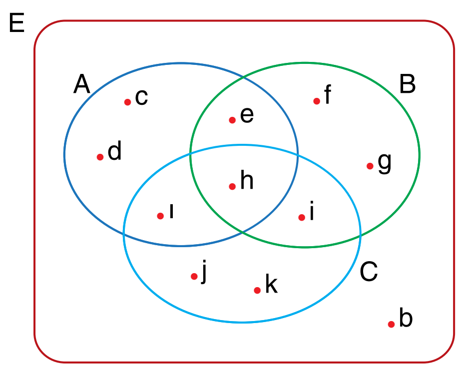
$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{0, 1, 4, 7, 9\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$

olduğuna göre $A \cap B$, $A \cup B$, A', $A \setminus B$, $B \setminus A$ kümelerini yazınız.

2.



Yukarıda verilen Venn şemasına göre aşağıda istenenleri bulunuz.

a) A'

b) $B \cup C$

c) $A \cap B \cap C$

ç) $A \cup B \cup C$

d) $(A \cup B \cup C)'$

e) $(A \cup B)'$

f) $(B \cup C) \setminus A$

g) $s(A \setminus B) + s(B \setminus C) + s(C \setminus A)$

3. A, B ve $A \cap B$ kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 16, 8 ve 4 olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

4. A ve B aynı E evrensel kümesinin iki alt kümesidir. $s(A) + s(B') = 23$, $s(A') + s(B) = 21$ olduğuna göre evrensel kümenin eleman sayısını bulunuz.

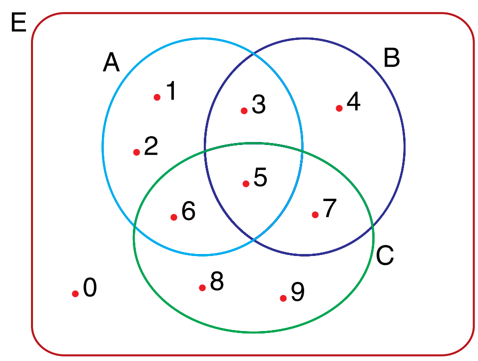
5. A ve B iki küme olmak üzere $s(A \setminus B) = 9$, $s(B \setminus A) = 5$ ve $s(A \cup B) = 21$ olduğuna göre $A \cap B$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

6. $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$,

$A \cup C = \{c, d, e, f, g\}$ olduğuna göre

$A \cup (B \cap C)$ kümesini yazınız.

7.



Yukarıda verilen Venn şemasına göre $(A \cap B') \setminus (B \setminus C)$ kümesini bulunuz.

8. $(A \cap B)' \cap (A \cap B')' = A'$

olduğunu sembolik mantık kurallarını kullanarak gösteriniz.

9. $[(A' \cup B)' \cap (A \cup B)] \cup E$

kümesini en sade biçimde yazınız.

10. $[(B \setminus A) \cup (A \cap B)] \cap B'$

kümesini en sade biçimde yazınız.

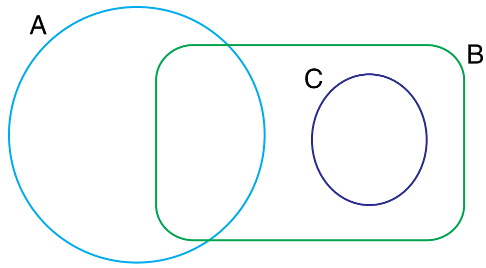
11. $s(A) = 11$, $s(B) = 6$ olduğuna göre $s(A \cup B)$'nin alacağı <u>en büyük</u> değer <u>en küçük</u> değerden kaç fazladır?

A) 5 B) 6 C) 11 D) 17 E) 22

12. $s(A) = 17$ ve $s((B \setminus A)') = 27$ olduğuna göre $s[(A \cup B)']$ değerini bulunuz.

13. $s(A) = 2x - 1$, $s(B) = 6 + x$, $s(A \cap B) = x$ ve $s(A) = 17$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

14. $(A \cap B) \cup C$ kümesini aşağıda verilen Venn şemasının içini boyayarak gösteriniz.



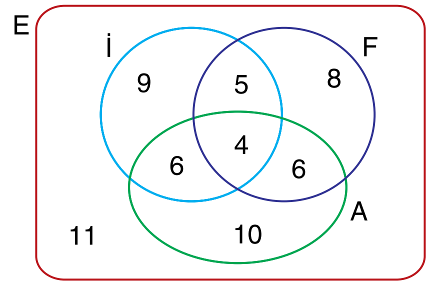
15. $s(A \setminus B) = 5\, s(A \cap B) = 3\, s(B \setminus A)$ ve $s(A \cup B) = 46$ olduğuna göre $A \cap B$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

16. Herkesin resim veya müzik kursuna katıldığı bir sınıfta yalnız resim kursuna katılanların sayısı, her iki kursa da katılanların sayısının 2 katı ve yalnız müzik kursuna katılanların sayısının 3 katıdır. Sınıf mevcudu 33 kişi olduğuna göre yalnız müzik kursuna katılanların sayısını bulunuz.

17. Bir sınıftaki öğrenciler futbol, basketbol veya voleybol sporlarından en az biriyle uğraşmaktadırlar. Bu sınıfta futbol oynayan 20 kişi, basketbol oynayan 19 kişi, voleybol oynayan 18 kişi vardır. Yalnız iki sporla uğraşanların sayısı 16 kişi ve her üç sporla da uğraşanların sayısı 6 kişi olduğuna göre sınıf mevcudunu bulunuz.

18. Herkesin en fazla bir tatlı yediği bir grupta, künefe yemeyen kişi sayısı 20, kadayıf yemeyen kişi sayısı 22, baklava yemeyen kişi sayısı 23'tür. Bu grupta hiç tatlı yemeyen 5 kişi olduğuna göre grupta künefe yiyenlerin sayısını bulunuz.

19.



Yukarıda verilen Venn şemasındaki sayılar, bulundukları en küçük kapalı bölgenin eleman sayısını göstermektedir.

İ → İngilizce bilenlerin kümesi,

F → Fransızca bilenlerin kümesi,

A → Almanca bilenlerin kümesi,

E → Evrensel küme

olmak üzere aşağıda istenenleri bulunuz.

a) Bu dillerden yalnız birini bilenlerin sayısını

b) Bu dillerden yalnız ikisini bilenlerin sayısını

c) Bu dillerden hiçbirini bilmeyenlerin sayısını

ç) Bu dillerden en az birini bilenlerin sayısını

d) Bu dillerden en fazla ikisini bilenlerin sayısını

e) Almanca bilmeyenlerin sayısını

f) İngilizce veya Fransızca bilmeyenlerin sayısını

g) Fransızca bilmeyenlerin sayısını

h) Yalnız İngilizce ve yalnız Fransızca bilenlerin sayısını

ı) Bu dillerden en fazla üçünü bilenlerin sayısını

2.2.2. İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

Harita üzerinde bir yerin bulunduğu yeri belirtmek için koordinat sisteminden yararlanılır. Günlük hayatta da birçok alanda koordinat sistemi ile dolayısıyla sıralı ikililerle karşılaşırız. Örneğin; bir tiyatro salonunda bir koltuğun yerinin belirlenmesinde, bir apartmanın daire numarasında, bir sınıftaki öğrencilerin boy-kilo belirlenmesinde, satranç oynarken oynadığımız taşın yerinin belirlenmesinde sıralı ikililerden yararlanabiliriz.

Örnek

2018-2019 futbol sezonunda Türkiye Spor Toto Süper Lig 10. haftada oynanan maç sonuçları yandaki tabloda gösterilmiştir. Buna göre sonuçlarla (Ev sahibi takım, misafir takım) biçiminde çiftler oluşturalım. Oluşturduğumuz çiftler arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Takımlar			Maç Sonuçları
Bursaspor	–	Aytemiz Alanyaspor	2 – 0
B.B. Erzurumspor	–	Kasımpaşa	1 – 1
Atiker Konyaspor	–	M. Başakşehir	0 – 1
Antalyaspor	–	Trabzonspor	1 – 1
Kayserispor	–	D.G. Sivasspor	2 – 0
E.Y. Malatyaspor	–	Galatasaray	2 – 0
Fenerbahçe	–	MKE Ankaragücü	1 – 3
Beşiktaş	–	Çaykur Rizespor	4 – 1
TM Akhisarspor	–	Göztepe	1 – 0

Kaynak : 30.10.2018 tarihli günlük gazeteler

Çözüm

İstenen çiftleri (2, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 0), (2, 0), (1, 3), (4, 1), (1, 0) biçiminde oluşturabiliriz. Bu duruma göre Bursaspor ile Aytemiz Alanyaspor arasındaki maçın sonucunu (2, 0) biçiminde gösteririz.

Burada (2, 0) yerine (0, 2) yazmak maçı Aytemiz Alanyaspor'un kazandığı anlamına geleceği için uygun değildir.

Bilgi

$A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ olmak üzere $a \in A$ ve $b \in B$ elemanları alınarak oluşturulan "(a, b)" biçimindeki yeni elemana **sıralı ikili** denir. Bu gösterimde a'ya birinci bileşen, b'ye ikinci bileşen denir. Sıralı ikililerde elemanların yazılış sırası önemlidir. $a \neq b$ için (a, b) ve (b, a) birbirinden farklı ikililerdir. Birinci bileşenleri birbirine, ikinci bileşenleri birbirine eşit olan ikililere **eşit ikililer** denir.

(a, b) ve (c, d) ikilileri birbirine eşit ise bu durum "(a, b) = (c, d)" biçiminde gösterilir.

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$ olur.

Örnek

(a, b) = (3, 8) olduğuna göre a ve b değerlerini bulalım.

Çözüm

İkililerin eşitliği tanımından a = 3 ve b = 8 olarak elde edilir.

Örnek

$(2x - 3, x + y) = (5, 9)$ olduğuna göre x ve y değerlerini bulalım.

Çözüm

$(2x - 3, x + y) = (5, 9) \Rightarrow \quad 2x - 3 = 5 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

$x + y = 9 \Rightarrow 4 + y = 9 \Rightarrow y = 5$ olarak bulunur.

Örnek

A = {Şenol, Rıza, Aykut}

B = {Everest Dağı, K2 Dağı, Manaslu Dağı}

kümeleri veriliyor.

A kümesindeki dağcıların her biri B kümesindeki her dağa tırmanmak istemektedir. Buna göre (Dağcı, Dağ) biçiminde oluşturulabilecek tüm ikilileri yazalım.

Çözüm

İkilileri

(Şenol, Everest Dağı), (Şenol, K2 Dağı), (Şenol, Manaslu Dağı),

(Rıza, Everest Dağı), (Rıza, K2 Dağı), (Rıza, Manaslu Dağı), (Aykut, Everest Dağı),

(Aykut, K2 Dağı), (Aykut, Manaslu Dağı) biçiminde oluştururuz.

Bilgi

$A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ olmak üzere 1. bileşeni A kümesinden, 2. bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan tüm sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye A ile B kümelerinin **kartezyen çarpım kümesi** denir.

Bu küme "A x B" biçiminde gösterilir ve "A kartezyen çarpım B" biçiminde okunur.

Bu küme ortak özellik yöntemi ile

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B\}$ biçiminde gösterilir.

Örnek

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ kümeleri verilsin.

Buna göre aşağıda istenenleri bulalım.

a) A x B, B x A ve s(A x B)

b) A x A ve s(A x A)

Çözüm

a) $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$

$a \neq b$ için $(a, b) \neq (b, a)$ olduğundan $A \times B \neq B \times A$ olur.

$$s(A \times B) = 12 = \underset{s(A)}{3} \cdot \underset{s(B)}{4}$$

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ elde edilir.

b) $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$$s(A \times A) = 9 = \underset{s(A)}{3} \cdot \underset{s(A)}{3}$$

$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) = [\,s(A)\,]^2$ elde edilir.

Bilgi

$A \neq \varnothing$ ve $B \neq \varnothing$, $A \neq B$ olacak biçimde iki küme olmak üzere

1) $A \times B \neq B \times A$

2) $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$

3) $s(A \times A) = [s(A)]^2$

4) $A \times B = \varnothing$ ise $A = \varnothing$ veya $B = \varnothing$

5) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

Örnek

$s(A) = 4$, $s(B) = 6$ olduğuna göre $s(A \times A)$ ve $s(A \times B)$'yi bulalım.

Çözüm

$s(A \times A) = [s(A)]^2$ olduğuna göre

$s(A \times A) = 4^2 = 16$

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ olduğundan

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 4 \cdot 6 = 24$ olarak elde edilir.

Örnek

$A \times B = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5), (a, 7), (b, 1), (b, 3), (b, 5), (b, 7), (c, 1), (c, 3), (c, 5), (c, 7)\}$ olduğuna göre A ve B kümelerini bulalım.

Çözüm

A x B kümesinin elemanlarının 1. bileşenleri A kümesinden, 2. bileşenleri B kümesinden seçileceğinden A ve B kümeleri,

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{1,3, 5, 7\}$ biçiminde elde edilir.

Örnek

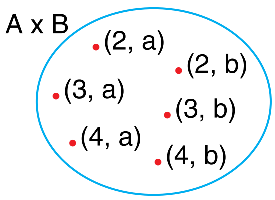
$A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{a, b\}$ kümeleri veriliyor.

A x B kümesini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösterip bu kümenin grafiğini çizelim.

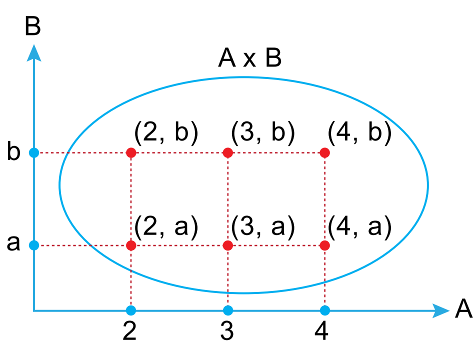
Çözüm

Liste yöntemi ile $A \times B = \{(2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$ biçiminde

Venn şeması ile



biçiminde gösterilir.



A x B kümesinin grafiğini çizmek için A kümesinin elemanlarını (1. bileşenleri) yatay eksen üzerine yerleştirip ekseni A olarak, B kümesinin elemanlarını (2. bileşenleri) dikey eksene yerleştirip ekseni B olarak isimlendiririz. Daha sonra A kümesinin her elemanından düşey ve kesikli, B kümesinin her elemanından yatay ve kesikli çizgiler çizeriz. En sonunda bu kesikli çizgilerin kesiştiği noktaları işaretleriz.

Bu şekilde elde edilen noktaların oluşturduğu grafik A x B'nin grafiğidir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki şıklarda istenenleri bulunuz.

a) $(2x, y + 1) = (4, 5)$ ise x =?, y = ?

b) $(x + y, \ x - y) = (5, 1)$ ise x = ?, y = ?

2. $A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (5, 1), (5, 4)\}$ kümesinin elemanlarını köşe kabul eden dikdörtgenin alanını bulunuz.

3. s(A) = 5, s(B) = 4 ise $s(A \times B)$ değerini bulunuz.

4. $A = \{x \mid 4 < x < 8, x \text{ bir rakam}\}$

$B = \{x \mid x \text{ bir asal rakam}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdaki istenenleri bulunuz.

a) $A \times A$

b) $A \times B$

c) $B \times A$

ç) $B \times B$

5. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$

olduğuna göre

a) $A \times A$

b) $B \times B$

c) $A \times B$

ç) $B \times A$ kümelerinin grafiklerini çiziniz.

6. $(2^{2n+2}, n + 25) = (64, 3^m)$

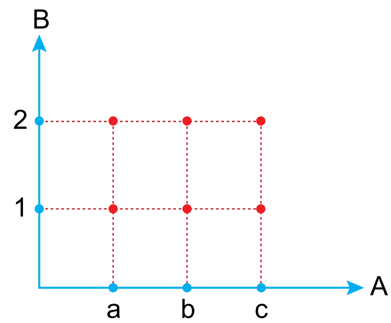
olduğuna göre m ve n değerlerini bulunuz.

7. s(A) = 7 ve $s(A \times B) = 35$ olduğuna göre s(B) değeri kaçtır?

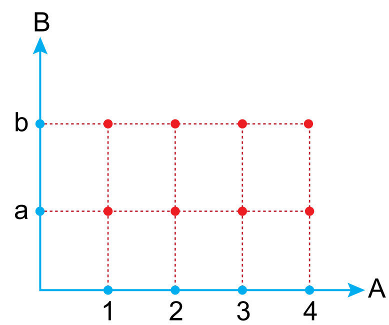
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8. Aşağıda verilen grafiklere göre $A \times B$ kümelerini bulunuz.

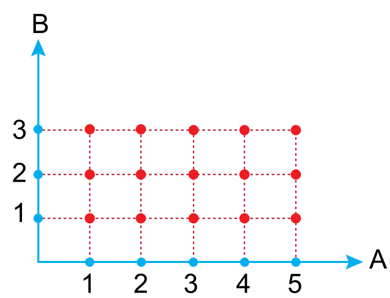
a)



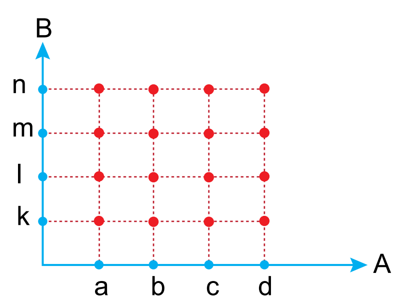
b)



c)



ç)



2. BÖLÜM ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi bir küme belirtir?

I. Bazı gözlüklü kız öğrenciler
II. Okulumuzdaki matematik öğretmenleri
III. Alfabemizdeki sesli harfler
IV. Yılın M ile başlayan ayları
V. Ankara'nın ilçeleri

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $A = \{x \mid x \leq 60,\ x = 2n,\ \ n \in N\}$

kümesi veriliyor.

Buna göre

B = {61'den küçük iki basamaklı çift doğal sayılar}

C = {61'den küçük çift doğal sayılar}

D = {6 ile 61 arasındaki çift doğal sayılar}

kümelerinden hangisi ya da hangileri A kümesine eşittir?

A) Yalnız B B) Yalnız C C) B ve C D) B ve D E) C ve D

3. Aşağıdaki ifadelerde doğru olanların başına "D" yanlış olanların başına "Y" yazınız.

(.......) Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit küme denir.

(.......) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ olmak üzere $a \in A$ ve $b \in B$ elemanları alınarak oluşturulan (a, b) biçimindeki yeni elemana sıralı ikili denir.

(.......) Sadece bir elemanı ortak olan kümelere ayrık kümeler denir.

(.......) A ve B gibi iki kümenin tüm elemanlarından oluşan kümeye bu kümelerin kesişim kümesi denir.

4. $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{a\}, \{2\}\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. $1 \in A$
II. $\{2\} \in A$
III. $a \in A$
IV. $2 \in A$
V. $\{1, 2, \{2\}\} \in A$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. 10 elemanlı bir kümenin alt küme sayısı kaçtır?

A) 64 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1024

6. Aşağıda verilen kümelerden kaç tanesi sonlu kümedir?

I. Ülkemizdeki tüm öğrencilerin oluşturduğu küme
II. Asal sayılar kümesi
III. Pozitif tam sayılar kümesi
IV. 5 ile 8 arasındaki gerçek sayılar kümesi
V. –50 000 ile 50 000 arasındaki tam sayılar kümesi

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. $s(A) = 2n - 4$ olmak üzere A kümesinin 256 tane alt kümesi olduğuna göre n kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8. Bir kümenin alt küme sayısı ile öz alt küme sayısı toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 16 B) 32 C) 64 D) 113 E) 127

9. $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin alt kümelerinden kaç tanesi a, b ve c elemanlarının üçünü birden kapsar?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 48 E) 64

10. A kümesinin eleman sayısı B kümesinin eleman sayısından 2 fazladır. A kümesinin alt küme sayısı B kümesinin alt küme sayısından 768 fazla olduğuna göre A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

11. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 eleman olarak bulunur 5 eleman olarak <u>bulunmaz</u>?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

12. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde c ve f elemanlarından yalnız biri bulunur?

A) 96 B) 84 C) 64 D) 48 E) 32

13. E evrensel küme $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$
II. $A \cup A = E$
III. $B \subseteq A$ ise $A \cap B = B$
IV. $s(A) + s(A') = s(E)$
V. $A \setminus B = A \cap B'$
VI. $A \cup E = E$
VII. $A \setminus E = A'$
VIII. $E \setminus E = A'$
IX. $A \setminus A = \varnothing$
X. $A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq B \setminus A$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

14. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ olmak üzere $A \setminus B$, $A \cap B$ ve $B \setminus A$ kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 16, 8 ve 32 olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

15. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ve

$B \cup C = \{c, d, e, f, k, l, m\}$ olduğuna göre

B kümesinin <u>en çok</u> kaç elemanı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

16. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\cup$ işleminin değişme özelliği vardır.
II. $\cap$ işleminin birleşme özelliği vardır.
III. $\cup$ işleminin $\cap$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.
IV. Kümelerde fark işleminin değişme özelliği vardır.
V. Her a, b elemanları için $(a, b) = (b, a)$ eşitliği doğrudur.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. $A \setminus C = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{c, d, e, f\}$ olduğuna göre $A \setminus (C \setminus B)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{a, b\}$ B) $\{e, f\}$
C) $\{a, b, c, d, e\}$ D) $\{a, b, c, d, f\}$
E) $\{a, b, c, d, e, f\}$

18. E evrensel küme

$A \subseteq E$, $B \subseteq E$ ve $C \subseteq E$ olmak üzere

$s(A) + s(C') = 16$

$s(B) + s(C) = 11$

$s(A') + s(B') = 27$

olduğuna göre s(E) kaçtır?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

19. A ve B kümeleri için

$s(A \setminus B) = 7,\ s(B) = 8$

olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 13 D) 15 E) 17

20. A, B ve C kümeleri için

$s(A) = 14,$

$s(B) = 16,$

$s(C) = 19,$

$s(A \cap B) = 9,$

$s(A \cap C) = 8,$

$s(B \cap C) = 6,$

$s(A \cap B \cap C) = 5$

olduğuna göre $s(A \cup B \cup C)$ kaçtır?

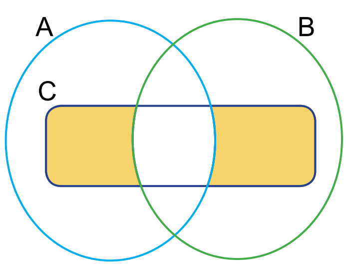
A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

21. $A \setminus B$ kümesinin tümleyeni aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) A' B) B' C) $A \cap B'$

D) $A' \cup B$ E) $(B \setminus A)'$

22.



Yukarıdaki Venn şemasında gösterilen taralı bölgeleri ifade eden küme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(A \cap B) \cap C$

B) $C \setminus (A \cap B)$

C) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

D) $(A \cup B) \setminus C$

E) $(A \cap B) \setminus C$

23. A ve B kümelerinin alt küme sayıları toplamı 384'tür. Kümelerin eleman sayıları birer artırılırsa alt küme sayıları toplamı kaç olur?

A) 464 B) 512 C) 604

D) 728 E) 768

24. $A \cap B = \{a, b\}$, $A \cap C = \{c, d, e\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{a, b, c, d, e\}$ B) $\{a, b, c, d\}$

C) $\{a, b\}$ D) $\{c, d, e\}$

E) $\{b, c, d, e\}$

25. $[A \cap (A \cap B)']' \cap (A \cap B)'$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

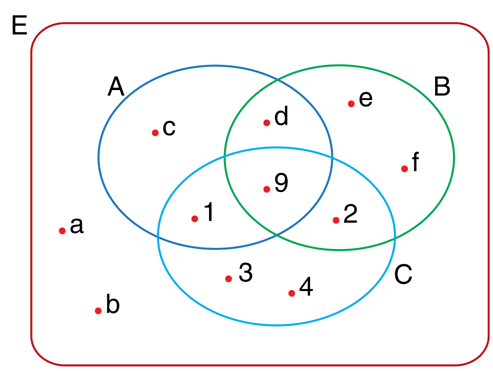
A) A B) A' C) B D) B' E) $\varnothing$

26. $(A \cap B') \cup (A \cup B)'$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) A' B) A C) B' D) B E) E

27.



Yukarıda verilen Venn şemasına göre aşağıdaki istenenleri bulunuz.

a) $(A \cup B) \setminus C$

b) $(A \cup B) \cup C$

c) $A' \cup B'$

28. A ve B, E evrensel kümesinin birer alt kümesi olmak üzere

$s(A \setminus B) = 10,$

$s((A \cup B)') = 7,$

$s(E) = 25$

olduğuna göre s(B) kaçtır?

A) 8 B) 11 C) 15 D) 17 E) 18

29. A, B ve C kümeleri için aşağıda verilen eşitliklerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

(.....) $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

(.....) $s(A \cup B \cup C) = s(A)+s(B)-(A \cap B \cap C)$

(.....) $A \times B = B \times A$

(.....) $A \times \varnothing = A$

(.....) $s(A \times B) = s(B \times A)$

(.....) $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$

(.....) $s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(A \cap B) + s(B \setminus A)$

(.....) $A \cup B = A \cap B$

(.....) $A \cup A' = E$

(.....) $A \setminus B = A' \cup B$

(.....) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(.....) $(A')' = E$

30. 70 kişilik bir grupta yalnız İngilizce bilenlerin sayısı yalnız Fransızca bilenlerin sayısının 3 katıdır. Fransızca bilenlerin sayısı 21 ve hiçbir dili bilmeyenlerin sayısı 4 olduğuna göre İngilizce bilenlerin sayısı kaçtır?

A) 52 B) 51 C) 50 D) 49 E) 48

31. A ve B, E evrensel kümesinin birer alt kümesi ve

$2 \cdot s(A \setminus B) = 3 \cdot s(A \cap B) = 5 \cdot s(B \setminus A)$

olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı <u>en az</u> kaçtır?

A) 6 B) 10 C) 15 D) 23 E) 31

32. 42 kişilik bir grupta Almanca ve Fransızca bilenler 17 kişi, yalnız Almanca bilenler 9 kişidir. Bu grupta herkes <u>en az</u> bir dil bildiğine göre yalnız Fransızca bilen kaç kişi vardır?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 29

33. 40 kişilik bir grupta gözlüklü kızların sayısı, gözlüksüz erkeklerin sayısının 2 katından 1 eksik, gözlüksüz kızların sayısından 1 fazladır. Gözlüklü erkeklerin sayısı 13 olduğuna göre gruptaki kızların sayısı kaçtır?

A) 24 B) 23 C) 22 D) 21 E) 20

34. $s(A) = 5$, $s(A \times B) = 30$

olduğuna göre s(B) kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 10 E) 15

35. $(3x - y, x + 2y) = (7, 7)$

olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

36 $A = \{a, b, c\}$ ve

$B = \{x \mid -2 < x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre $s(A \times B)$ kaçtır?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 16

37. $A = \{1, 5\}$, $B = \{2, 6\}$ veriliyor.

Buna göre A x B kümesinin elemanlarını köşe kabul eden dikdörtgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 30 B) 16 C) 12 D) 10 E) 6

38. $A = \{\varnothing, \cup, \cap, \in\}$ olduğuna göre

$(s(A))^2$ kaçtır?

A) 9 B) 12 C) 16 D) 20 E) 25

SAYILAR VE CEBİR

3. BÖLÜM

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Konular

3.1. Sayı Kümeleri
3.2. Bölünebilme Kuralları
3.3. Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler
3.4. Üslü İfadeler ve Denklemler
3.5. Denklemler ve Eşitsizliklerle İlgili Uygulamalar

Sembol ve Gösterimler

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}^-, \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$

EBOB, EKOK, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b),

$(-\infty, \infty)$, $|x|$, x^n, $\sqrt[n]{x^m}$, $x^{\frac{m}{n}}$, %, $a : b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$a : b = c : d$

Terimler ve Kavramlar

Doğal sayılar
Tam sayılar
Rasyonel sayılar
İrrasyonel sayılar
Gerçek (reel) sayılar
Bilinmeyen
Değişken
Denklem
Denklemin derecesi
Eşitsizlik
Gerçek sayı aralıkları
Çözüm kümesi
Mutlak değer
Üslü ifade
Taban
Üs
Köklü ifade
Rasyonel kuvvet
Oran
Orantı
Doğru orantı
Ters orantı
Yüzde

3. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Cebir; yapı, bağıntı ve nicelikle uğraşan bir matematik dalıdır. Günlük hayatta bilinmeyen değerlerin, simge ve harflerle kurgulanıp kurulan denklemlerle bulunması temeline dayanır.

Cebirin çok eski ve zengin bir tarihi vardır.

Aslında daha sayıları ve matematiği öğrenmeden önce belki de denklem kurmayı öğreniriz. Çocukluğumuzda oyuncaklarımızın dağıtımında veya anne ve babamızın bizlere hazırladığı yemeklerin ölçülerinde denklemlerden yararlanılır. Bu nedenle en basit işlemlerden en karmaşık hesaplamalara kadar denklemlerden faydalanılır. Örneğin yapılacak bir karışımın içindeki maddelerin oranından bütçemizin denkleştirilmesine, iki nokta arası uzaklığının hesaplanmasından, hava durumu tahminlerine ve coğrafi keşiflere hayatımızın hemen her alanında denklemler vardır.

Aslında sadece matematikten değil, diğer bilim dallarının tamamında denklem ve eşitsizliklerden yararlanılmaktadır.

El-Harezmi

Tam adı Ebu Cafer Muhammed bin Musa el-Harezmi olan bu büyük bilim insanı, Horosan'da (Özbekistan'ın Karizmi kentinde) doğmuştur. Hayatının büyük bir bölümü Bağdat'ta (Beytü'l Hikme'de) matematik, astronomi ve coğrafya konularında çalışarak geçmiştir.

Muhammed bin el-Harezmi
770 – 840 (Temsilî)

Cebirin kurucusu olan Harezmi'nin iki önemli matematik kitabı vardır: "Cebir" ve "Hint Hesabı". Harezm'de temel eğitimini alan Harezmi gençliğinin ilk yıllarında Bağdat'taki ileri bilim atmosferinin varlığını öğrenir.

İlmî konulara doyumsuz denilebilecek seviyede bir aşkla bağlı olan Harezmi, ilmî konularda çalışma idealini gerçekleştirmek için Bağdat'a gelir ve yerleşir. Devrinde bilginleri himayesi ile meşhur olan Abbasi Halifesi Mem'un, Harezmi'deki ilim kabiliyetinden haberdar olunca onu kendisi tarafından Eski Mısır, Mezopotamya, Grek ve Eski Hint medeniyetlerine ait eserlerle zenginleştirilmiş Bağdat Saray Kütüphanesinin idaresinde görevlendirir. Daha sonra da Bağdat Saray Kütüphanesindeki yabancı eserlerin tercümesini yapmak amacıyla kurulan bir tercüme akademisi olan Beyt'ül Hikme'de görevlendirilir. Böylece Harezmi Bağdat'ta inceleme ve araştırma yapabilmek için gerekli bütün maddi ve manevi imkânlara kavuşur. Burada hayata ait bütün endişelerden uzak olarak matematik ve astronomi ile ilgili araştırmalarına başlar.

Bağdat bilim atmosferi içerisinde kısa zamanda üne kavuşan Harezmi Şam'da bulunan Kasiyum Rasathanesi'nde çalışan bilim heyetinde ve yerkürenin bir derecelik meridyen yayı uzunluğunu ölçmek için Sincar Ovası'na giden bilim heyetinde bulunduğu gibi Hint matematiğini incelemek için Afganistan üzerinden Hindistan'a giden bilim heyetine başkanlık da etmiştir.

Harezmi, Latinceye çevrilen eserlerinden olan El-Kitab'ül-Muhtasar fi'l Hısab'il Cebri ve'l-Mukabele adlı eserinde ikinci dereceden bir bilinmeyenli ve iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümlerini inceler.

Harezmi matematiğin yanı sıra astronomi ve coğrafya ilimlerinde de eserler vermiştir. Astronomik cetvellerle ilgili kitaplar yazmış ve bu eserler 12. y.y.da Latinceye çevrilmiştir. Bunun yanı sıra Ptolemy'nin (Talemi) coğrafya kitabını düzeltmelerle yeniden yazmış, 70 tane bilim insanıyla birlikte çalışarak 830 yılında bir dünya haritası çizmiştir. Dünya'nın çevresini ve hacmini hesaplama çalışmalarında yer almıştır. Güneş saatleri, usturlaplar ve saatler üzerine yazılmış eserleri de vardır.

(Genel ağdan alınmıştır.)

3.1. SAYI KÜMELERİ

Bugün kullandığımız onluk sayma sisteminde bütün sayılar 0'dan 9'a kadar olan 10 rakamla yazılır. Çok kolay bir sistemdir. Bu nedenle sıfırın olmadığı bir sayma sistemi aslında bize biraz garip gelir. Eski dünya kültürlerinde birbirinden değişik sayma sistemleri kullanılmıştır. Ne var ki hiçbirinde sıfır rakamı yoktur. Sıfır gerçekte çok önemlidir ve onun keşfiyle birlikte matematik çok kolaylaşmıştır. Hindistan'da MS 7. yüzyılda keşfedilen sıfır, önceleri noktayla gösterilmiştir. Zamanla noktanın yerini çember almıştır. Arap matematikçiler de bu sistemi benimsemiş ve matematiğe büyük katkılarda bulunmuşlardır. 1200 yılı dolaylarında ünlü İtalyan matematikçi Fibonacci (Fibünaksi) sıfırı Avrupa'ya tanıtmıştır. Sıfırlı onluk sayma sistemi yüzlerce yıl içinde bütün dünyaya yayılmıştır.

(Genel ağdan alınmıştır.)

3.1.1. Sayı Kümelerinin Birbiriyle İlişkisi

Daha önce doğal sayıları, tam sayıları ve rasyonel sayıları sayı doğrusu üzerinde gösterme çalışmaları üzerinde durmuştuk. Ancak aklımıza "Rasyonel sayılar kümesinin elemanları sayı doğrusunu tam olarak doldurabilir mi?" veya "a bir tam sayı, b sıfırdan farklı bir tam sayı olmak üzere her sayı $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilir mi?" gibi sorular gelmiş olabilir. Biz burada sayı kümeleri arasındaki ilişkiyi inceleyerek bu tür sorulara cevap bulmaya çalışacağız.

Bilgi

$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesine **doğal sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{N}$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına **doğal sayı** denir.

$\{1, 2, 3, \dots\}$ kümesine **pozitif tam sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Z}^+$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına **pozitif tam sayı** denir.

$\{\dots, -3, -2, -1\}$ kümesine **negatif tam sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Z}^-$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ kümesinin her bir elemanına **negatif tam sayı** denir.

$\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesine **tam sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Z}$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına **tam sayı** denir.

Burada her doğal sayının aynı zamanda bir tam sayı olduğu görülmektedir.

Buna göre $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$'dir.

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen sayılara **rasyonel sayılar** denir.

Rasyonel sayılar "$\mathbb{Q}$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ kümesinin her bir elemanına **rasyonel sayı** denir.

Negatif rasyonel sayıların oluşturduğu kümeye **negatif rasyonel sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Q}^-$" simgesi ile gösterilir.

Pozitif rasyonel sayıların oluşturduğu kümeye **pozitif rasyonel sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Q}^+$" simgesi ile gösterilir.

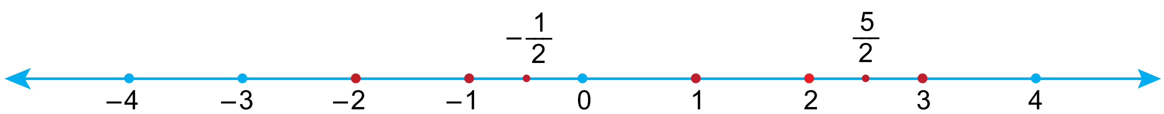
Bu durumda $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ olur.

Örnek

$-2, -1, -\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}$ ve 3 rasyonel sayılarını sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

Verilen rasyonel sayılar sayı doğrusunda,



biçiminde gösterilir.

Herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı bulunmasına rağmen rasyonel sayılar kümesi sayı doğrusunu tam olarak dolduramamaktadır. Sayı doğrusunda rasyonel sayı olmayan sayılardan birkaçının yerini gösterelim.

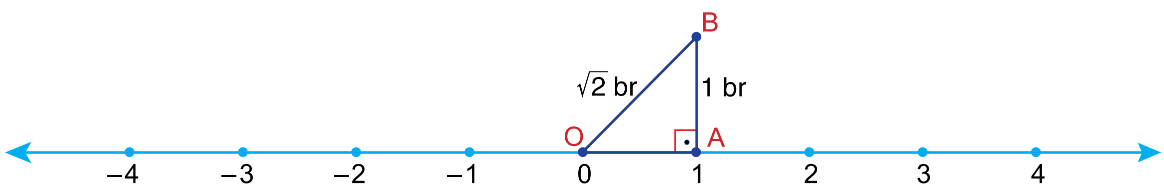
Örnek

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ sayılarının yerlerini sayı doğrusunda belirtelim.

Çözüm

Önce $\sqrt{2}$ sayısının yerini sayı doğrusunda belirleyelim.

Sayı doğrusu çizelim ve dik kenarlarından biri bu sayı doğrusunda olan ve dik kenar uzunlukları birer birim olan ikizkenar dik üçgen oluşturalım.



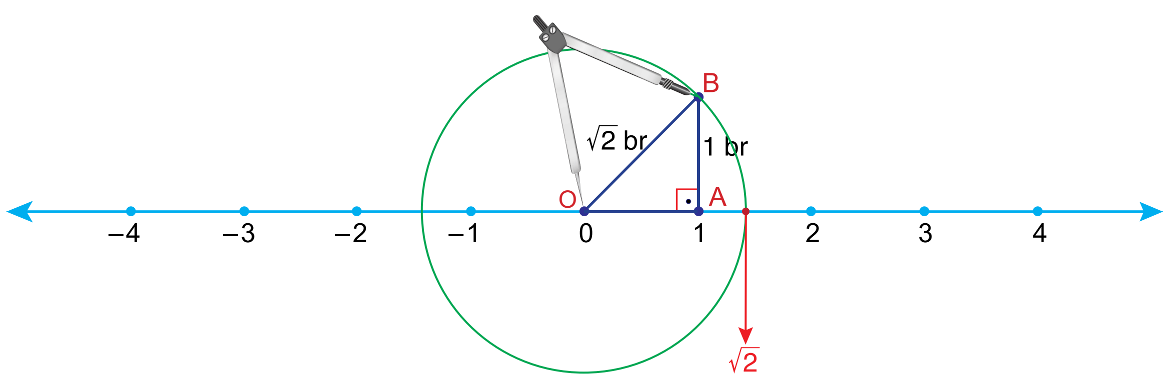
$|OA| = 1$ birim, $|AB| = 1$ birim olduğundan $|OB|$ Pisagor teoremi yardımıyla

$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2$

$|OB|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$|OB| = \sqrt{2}$ birim olarak elde edilir.

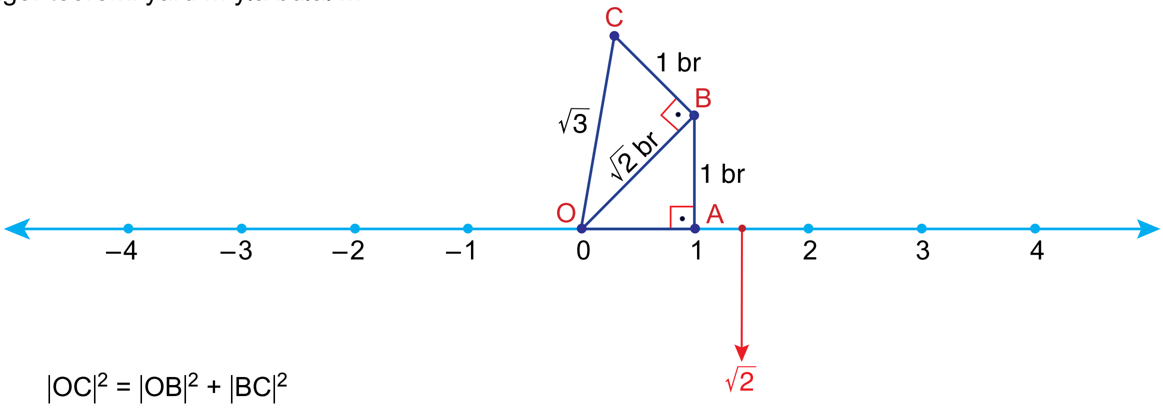
Pergelin sivri ucunu O noktasına diğer ucunu B noktasına koyarak O merkezli ve $|OB|$ yarıçaplı çemberi çizelim ve çemberin, sayı doğrusunu pozitif tarafta kestiği noktayı belirleyelim.



Belirlediğimiz nokta $\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusundaki yeridir.

$\sqrt{3}$ sayısının yerini sayı doğrusunda gösterelim.

Sayfa 90'daki son sayı doğrusu üzerinde B noktasında [CB] ⊥ [OB] olacak biçimde uzunluğu 1 birim olan BC doğru parçasını çizelim ve O ile C noktalarını birleştirelim. Elde edilen üçgende |OC|'nu Pisagor teoremi yardımıyla bulalım.

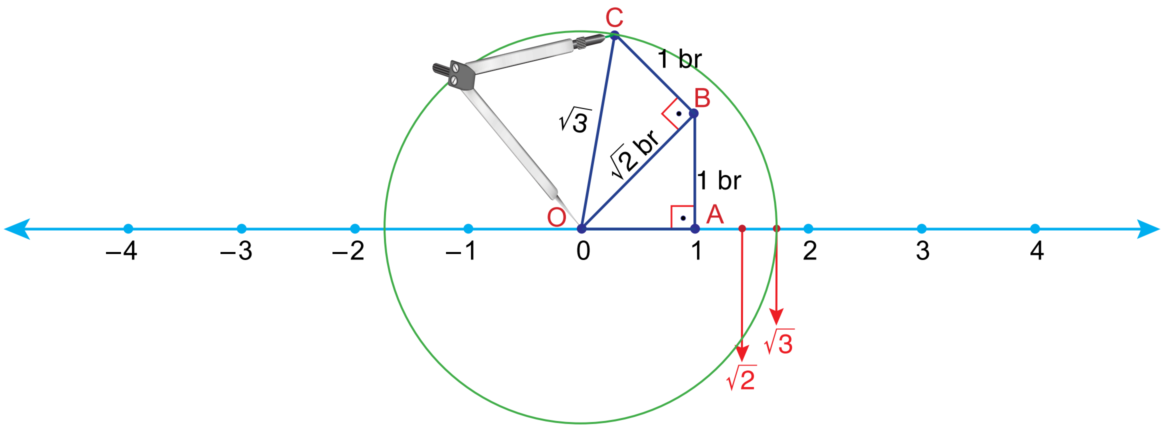


$|OC|^2 = |OB|^2 + |BC|^2$

$|OC|^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$

$|OC|^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow |OC| = \sqrt{3}$ birim olarak bulunur.

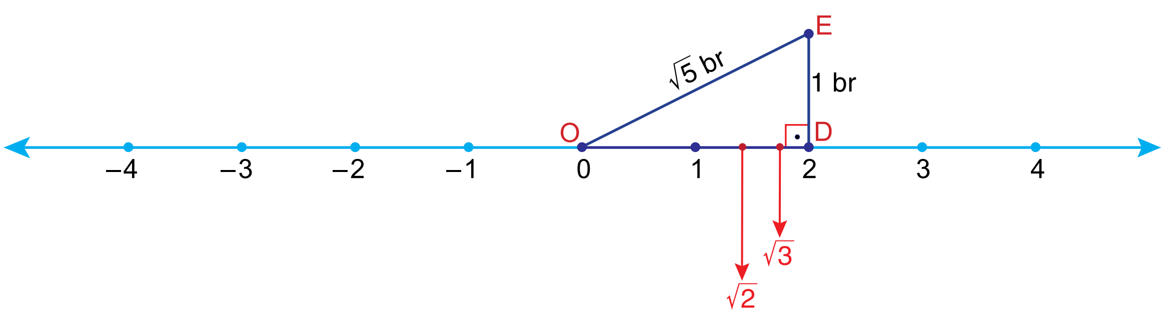
Pergelimizin sivri ucunu O noktasına, diğer ucunu C noktasına koyarak |OC| yarıçaplı çemberi çizelim. Çemberin sayı doğrusunu pozitif tarafta kestiği noktayı belirleyelim.



Belirlediğimiz nokta $\sqrt{3}$ sayısının sayı doğrusundaki yeridir.

Şimdi de $\sqrt{5}$ sayısının yerini sayı doğrusunda gösterelim.

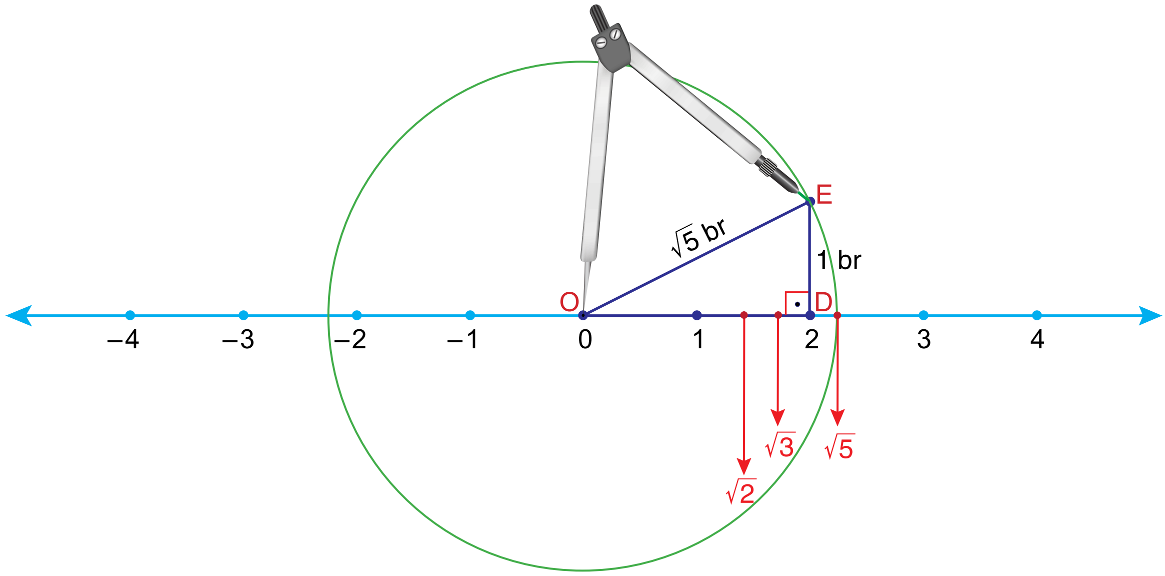
Sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi dik kenar uzunluklarından birinin uzunluğu 2 birim, diğerinin uzunluğu 1 birim olan ODE dik üçgenini çizelim ve Pisagor teoremi yardımıyla |OE|'nu bulalım.



$|OE|^2 = |ED|^2 + |OD|^2$

$|OE|^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad |OE| = \sqrt{5}$ birim olarak elde edilir.

Pergelimizin sivri ucunu O noktasına, diğer ucunu E noktasına koyarak |OE| yarıçaplı çemberi çizelim. Çemberin sayı doğrusunu pozitif tarafta kestiği noktayı belirleyelim.



Belirlediğimiz nokta $\sqrt{5}$ sayısının sayı doğrusundaki yeridir.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{5}$ gibi sayılar irrasyonel sayılardır.

Bilgi

a, b $\in \mathbb{Z}$, b $\neq$ 0 olmak üzere

$\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir ve " $\mathbb{Q}'$ " simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşiminden oluşan kümeye **gerçek (reel) sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{R}$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ kümesinin her bir elemanına **gerçek (reel) sayı** denir.

Pozitif gerçek sayıların oluşturduğu kümeye **pozitif gerçek sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{R}^+$" simgesi ile gösterilir.

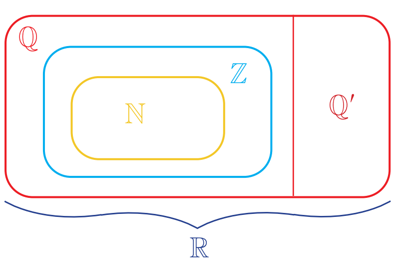
Negatif gerçek sayıların oluşturduğu kümeye **negatif gerçek sayılar kümesi** denir ve " $\mathbb{R}^-$ " simgesi ile gösterilir.

Bu durumda $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ olur.

Örnek

Sayı kümelerinin arasındaki ilişkiyi Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm



Bilgi

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$ olur.

Örnek

Toplamları 19 olan iki doğal sayının çarpımlarının alacağı en büyük ve en küçük değerlerini bulalım.

Çözüm

Toplamları sabit olan iki doğal sayı arasındaki fark ne kadar az olursa çarpımları o kadar büyük olur. Bu sayılar arasındaki fark ne kadar çok olursa çarpımları o kadar küçük olur.

Buna göre sayılardan birini 10, diğerini 9 seçersek bu iki doğal sayının çarpımı en fazla $10 \cdot 9 = 90$ olur.

Sayılardan birini 19, diğerini 0 seçersek çarpımları en az $19 \cdot 0 = 0$ olur.

Örnek

Çarpımları 18 olan iki doğal sayının toplamının alacağı en küçük ve en büyük değerlerini bulalım.

Çözüm

Çarpımları sabit olan iki doğal sayı arasındaki fark ne kadar az olursa toplamları o kadar küçük olur. Bu sayıların arasındaki fark ne kadar çok olursa toplamları o kadar büyük olur.

Bu durumda sayıları 3 ve 6 olarak seçersek toplamları en az $3 + 6 = 9$

sayıları 18 ve 1 olarak seçersek toplamları en fazla $18 + 1 = 19$ olarak elde edilir.

Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Özellikleri

Bilgi

Toplama İşleminin Özellikleri

1) $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ için $(a + b) \in \mathbb{R}$ olur.

Gerçek sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

$3 \in \mathbb{R}$, $4 \in \mathbb{R}$ için $3 + 4 = 7 \in \mathbb{R}$ olur.

2) $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ olur.

Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

$3 + 8 = 8 + 3$

$11 = 11$

3) $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$ olur.

Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

$(3 + 5) + 6 = 3 + (5 + 6)$

$8 + 6 = 3 + 11$

$14 = 14$

4) $\forall\ a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olur.

Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin birim (etkisiz) elemanı sıfırdır.

$7 + 0 = 0 + 7 = 7$ olur.

5) $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$, b $\neq$ 0 için a + (– a) = (– a) + a = 0 olur.

a $\in \mathbb{R}$'nin toplama işlemine göre tersi –a $\in \mathbb{R}$'dir.

4 + (–4) = –4 + 4 = 0 olur.

Çarpma İşleminin Özellikleri

1) $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için (a · b) $\in \mathbb{R}$ olur.

Gerçek sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

$3 \in \mathbb{R}$, $4 \in \mathbb{R}$ için $3 \cdot 4 = 12 \in \mathbb{R}$ olur.

2) $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot b = b \cdot a$ olur.

Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

$3 \cdot 8 = 8 \cdot 3$

$24 = 24$

3) $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ olur.

Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

$(3 \cdot 5) \cdot 6 = 3 \cdot (5 \cdot 6)$

$15 \cdot 6 = 3 \cdot 30$

90 = 90 olur.

4) $\forall$ a $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin birim (etkisiz) elemanı “1”dir.

$7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = 7$ olur.

5) $\forall$ a $\in \mathbb{R}$ için a · 0 = 0 · a = 0'dır.

Gerçek sayılar kümesinde sıfır çarpma işleminin yutan elemanıdır.

$3 \cdot 0 = 0 \cdot 3 = 0$ olur.

6) $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$, b $\neq$ 0 için $b \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot b = 1$, b $\in \mathbb{R}$, b $\neq$ 0'in çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{b}$'dir.

$5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$ olur.

7) $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, $(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$ olur.

Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

$7 \cdot (5 - 3) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 3$

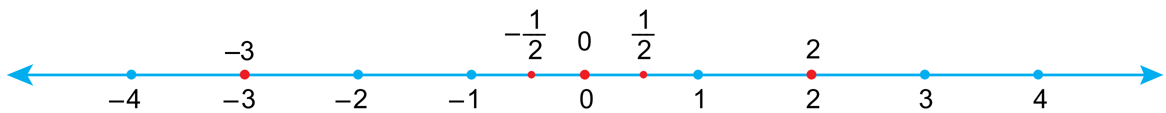
$7 \cdot 2 = 35 - 21$

14 = 14 olur.

Örnek

$-3, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2$ gerçek sayılarını sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

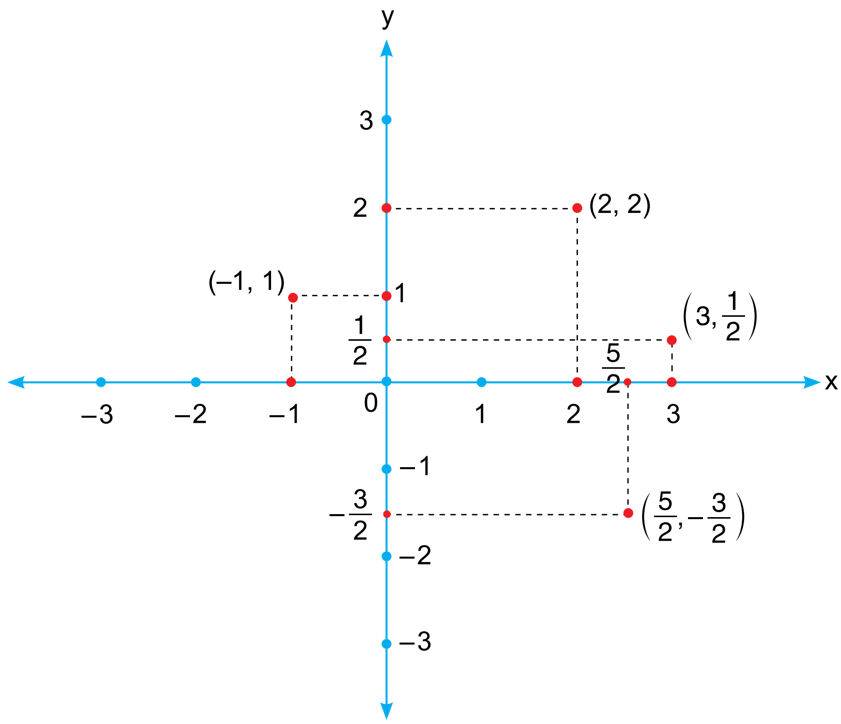
Çözüm



Örnek

(2, 2), (–1, 1), $\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ikililerini kartezyen koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm



Bilgi

a, b ∈ ℝ olmak üzere (a, b) biçimindeki her sıralı ikili kartezyen koordinat sisteminde bir noktaya karşılık gelir. Kartezyen koordinat sistemi sıfır noktasında birbiriyle dik kesişen iki sayı doğrusu ile elde edilir. (a, b) şeklindeki tüm sıralı ikililerin oluşturduğu küme ℝ x ℝ kümesini oluşturur.

ℝ x ℝ ifadesi $\mathbb{R}^2$ biçiminde de gösterilir.

ℝ'nin geometrik temsili sayı doğrusu, ℝ x ℝ'nin geometrik temsili ise kartezyen koordinat sistemidir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdakilerden hangisi rasyonel sayı değildir?

A) –3 B) $-\frac{5}{3}$ C) 7 D) 3,17 E) $\sqrt{2}$

2. $\frac{5}{7}$ sayısı $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinden kaç tanesinin elemanıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D" yanlış olanların başına "Y" yazınız.

(......) Her doğal sayı bir irrasyonel sayıdır.

(......) Her tam sayı bir rasyonel sayıdır.

(......) Her irrasyonel sayı bir gerçek (reel) sayıdır.

(......) Her doğal sayı bir tam sayıdır.

(......) Her rasyonel sayı bir gerçek sayıdır.

4. Toplamları 20 olan iki doğal sayının çarpımının alacağı <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değerleri bulunuz.

5. $9 \cdot (8 - 5) = 9 \cdot 8 - 9 \cdot 5$

işleminde aşağıdaki özelliklerden hangisi kullanılmıştır?

A) Çarpma işleminin birleşme özelliği

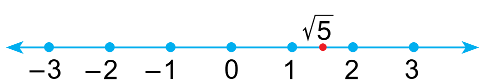
B) Toplama işleminin birleşme özelliği

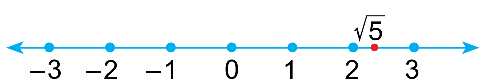
C) Çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği

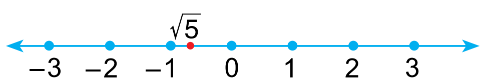
D) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği

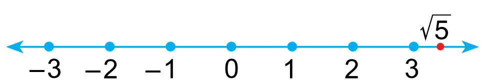
E) Toplama işleminin değişme özelliği

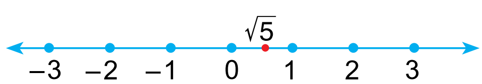
6. $\sqrt{5}$ sayısının sayı doğrusunda gösterimi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiş olabilir?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

7. Çarpımları 24 olan iki doğal sayının toplamının alacağı <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değerleri bulunuz.

8. $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$ sayılarını sayı doğrusunda gösteriniz.

9. $-7, -\frac{5}{2}, -2, 0, 1, 2, \frac{7}{2}$ ve $\frac{9}{2}$ sayılarını sayı doğrusunda gösteriniz.

10. $(3,\ 0),\ (-1,\ 2),\ (0,\ 4),\ \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right),\ (-4,\ -3),\ \left(\frac{-11}{4}, 5\right)$ sıralı ikilileri kartezyen koordinat sisteminde gösteriniz.

11. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. Negatif bir gerçek sayı ile pozitif bir gerçek sayının toplamı sıfırdır.

II. Gerçek sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

III. Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

IV. Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin birim elemanı sıfırdır.

V. $a \in \mathbb{R}$ gerçek sayısının toplama işlemine göre tersi $-a \in \mathbb{R}$'dir.

VI. $a \in \mathbb{R}$ gerçek sayısının çarpma işlemine göre tersi $-a \in \mathbb{R}$'dir.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. I. 3 II. $\sqrt{17}$

III. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ IV. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

V. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ VI. $\frac{10}{3}$

Yukarıda verilen sayılardan kaç tanesi rasyonel sayıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.2. BÖLÜNEBİLME KURALLARI

3.2.1. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları

Örnek

211 sayısının 4 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 211 & 4 \\ \cline{2-2} -\ 20 & 52 \\ \cline{1-1} 011 & \\ -\ \ \ 8 & \\ \cline{1-1} 003 & \end{array}$$

211 sayısının 4'e bölümünden kalan 3, bölüm ise 52 olarak elde edilir.

Örnek

189 sayısının 9 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 189 & 9 \\ \cline{2-2} -\ 18 & 21 \\ \cline{1-1} 009 & \\ -\ \ \ 9 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

189 sayısının 9 ile bölümünden bölüm 21, kalan ise 0 olarak elde edilir. Bu durumda 189 sayısı 9'a bölünebilir diyebiliriz.

Bilgi

A, B, C, K birer doğal sayı ve $0 \le K < B$ olmak üzere A sayısının B ile bölümünden bölüm C ve kalan K ise bunu

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} - \quad & C \\ \cline{1-1} K & \end{array}$$

veya $A = B \cdot C + K$ biçiminde gösteririz.

A'ya bölünen, B'ye bölen, C'ye bölüm, K'ye kalan denir.

Eğer $K = 0$ ise A sayısı B sayısına bölünebilir.

Örnek

A sayısının 13'e bölümünden bölüm 7 ve kalan 9 olduğuna göre A sayısını bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} A & 13 \\ \cline{2-2} - \quad & 7 \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

ise

$$\begin{aligned} A &= 13 \cdot 7 + 9 \\ &= 91 + 9 \\ &= 100 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} - & 7 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Yandaki bölme işlemine göre a’nın alacağı <u>en küçük</u> değeri bulalım.

Çözüm

$a = 7 \cdot b + 6$ ve $6 < b$ olacağından b’nin alacağı en küçük değer için a en küçük değerini alacaktır. b’nin alacağı en küçük değer 7 olur.

Bu durumda a’nın alacağı en küçük değer

$a = 7 \cdot 7 + 6 = 55$ olarak elde edilir.

Örnek

12, 15 ve 233 sayılarının 2 ile bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ \cline{2-2} -12 & 6 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Kalan : 0

$$\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ \cline{2-2} -14 & 7 \\ \cline{1-1} 01 & \end{array}$$

Kalan : 1

$$\begin{array}{r|l} 233 & 2 \\ \cline{2-2} -2 & 116 \\ \cline{1-1} 03 & \\ -2 & \\ \cline{1-1} 13 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 01 & \end{array}$$

Kalan : 1

Bilgi

Bir sayının birler basamağı çift ise (Birler basamağı $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ kümesinin elemanı ise) bu sayı **2 ile bölünebilir.** Birler basamağı tek olan sayıların 2 ile bölümünden kalan 1’dir.

Örnek

2m5n dört basamaklı sayısı 2 ile bölünebildiğine göre m + n toplamının alacağı <u>en büyük</u> değeri bulalım.

Çözüm

2m5n dört basamaklı sayısı 2 ile bölünebildiğine göre n; 0, 2, 4, 6, 8 değerlerini alabilir.

m, n’den bağımsız olarak istediği değeri alabileceğinden m = 9 için n = 8 alırsak m + n toplamının alacağı en büyük değer m + n = 9 + 8 = 17 olarak elde edilir.

Örnek

42 ve 82 sayılarının 3 ile bölümünden kalanlar ile bu sayıların rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{rl} 42 & \big|\ 3 \\ -\ 3 & \big|\ 14 \\ \hline 12 & \\ -\ 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Kalan : 0

$4 + 2 = 6$

$$\begin{array}{rl} 6 & \big|\ 3 \\ -\ 6 & \big|\ 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Kalan : 0

$$\begin{array}{rl} 82 & \big|\ 3 \\ -\ 6 & \big|\ 27 \\ \hline 22 & \\ -\ 21 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Kalan : 1

$8 + 2 = 10$

$$\begin{array}{rl} 10 & \big|\ 3 \\ -\ 9 & \big|\ 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Kalan : 1

Bilgi

Bir sayının rakamları toplamı 3'ün katı ise bu sayı **3 ile bölünebilir.**

Bir sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalan, bu sayının 3 ile bölümünden kalana eşittir.

Örnek

Beş basamaklı 34m75 sayısı 3 ile bölünebildiğine göre m'nin alacağı değerleri bulalım.

Çözüm

$3 + 4 + m + 7 + 5 = 19 + m$ ifadesi 3'ün katı olması gerekir.

Bu durumda m'nin alacağı değerler 2, 5 veya 8 olur.

Örnek

12 basamaklı 555…5 sayısının 3 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

12 basamaklı 555…5 sayısının rakamları toplamı $12 \cdot 5 = 60$ ve

60, 3 ile bölünebildiği için verilen sayının 3 ile bölümünden kalan 0'dır.

Örnek

572 ve 783 sayıları ile bu sayıların son iki basamağında oluşan sayıların 4 ile bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{rl} 572 & \big|\ 4 \\ -\ 4 & \big|\ 143 \\ \hline 17 & \\ -\ 16 & \\ \hline 12 & \\ -\ 12 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

Kalan : 0

$$\begin{array}{rl} 72 & \big|\ 4 \\ -\ 4 & \big|\ 18 \\ \hline 32 & \\ -\ 32 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

Kalan : 0

$$\begin{array}{rl} 783 & \big|\ 4 \\ -\ 4 & \big|\ 195 \\ \hline 38 & \\ -\ 36 & \\ \hline 023 & \\ -\ 20 & \\ \hline 03 & \end{array}$$

Kalan : 3

$$\begin{array}{rl} 83 & \big|\ 4 \\ -\ 8 & \big|\ 20 \\ \hline 03 & \end{array}$$

Kalan : 3

Bilgi

Bir sayının son iki basamağında elde edilen sayı 4’ün katı veya 00 ise bu sayı **4 ile bölünebilir.**

Bir sayının son iki basamağında elde edilen sayının 4 ile bölümünden kalanla, o sayının 4’e bölümünden kalan birbirlerine eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 87m4 sayısı 4 ile bölünüyor ise m’nin alacağı değerler toplamını bulalım.

Çözüm

87m4 sayının 4’e bölünebilmesi için son iki basamakta elde edilen sayı yani m4 sayısının 4 ile bölünmesi gerekir.

Buna göre m yerine 0, 2, 4, 6 veya 8 gelebileceğinden m’nin alacağı değerler toplamı

0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20 olarak elde edilir.

Örnek

565m dört basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre m’nin alacağı değerleri bulalım.

Çözüm

565m sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 ise 5m iki basamaklı sayısının da 4 ile bölümünden kalan 3 olur. Bu koşulu sağlayan sayılar 51, 55 ve 59 olduğundan m yerine 1, 5 veya 9 gelmelidir.

Örnek

40, 65 ve 79 sayılarının ve bu sayıların birler basamağının 5’e bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \cline{2-2} -40 & 8 \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

Kalan : 0

0’ın 5’e bölümünden kalan 0’dır.

$$\begin{array}{r|l} 65 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 13 \\ \cline{1-1} 15 & \\ -15 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

Kalan : 0

5’in 5’e bölümünden kalan 0’dır.

$$\begin{array}{r|l} 79 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 15 \\ \cline{1-1} 29 & \\ -25 & \\ \cline{1-1} 04 & \end{array}$$

Kalan : 4

9’un 5’e bölümünden kalan 4’tür.

Bilgi

Bir sayının birler basamağındaki rakam “0” veya “5” ise o sayı **5 ile bölünebilir.**

Bir sayının 5’e bölümünden kalan ile sayının birler basamağındaki rakamın 5’e bölümünden kalan birbirlerine eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 756m sayısı 5 ile bölünüyor ise m'nin alacağı değerleri bulalım.

Çözüm

756m sayısının 5 ile bölünebilmesi için m, 0 veya 5 değerini almalıdır.

Örnek

Dört basamaklı 459m sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre m'nin alacağı değerleri bulalım.

Çözüm

3 ve 8 rakamlarının 5'e bölümünden kalan 3 olduğundan m, 3 veya 8 değerlerini alır.

Örnek

7568 ve 11386 sayıları ile bu sayıların son üç basamağında oluşan sayıların 8 ile bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 7568 & 8 \\ \cline{2-2} -\ 72 & 946 \\ \cline{1-1} 036 & \\ -\ 32 & \\ \cline{1-1} 048 & \\ -\ 48 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

Kalan : 0

$$\begin{array}{r|l} 568 & 8 \\ \cline{2-2} -\ 56 & 71 \\ \cline{1-1} 008 & \\ -\ 8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Kalan : 0

$$\begin{array}{r|l} 11386 & 8 \\ \cline{2-2} -\ 8 & 1423 \\ \cline{1-1} 033 & \\ -\ 32 & \\ \cline{1-1} 018 & \\ -\ 16 & \\ \cline{1-1} 026 & \\ -\ 24 & \\ \cline{1-1} 02 & \end{array}$$

Kalan : 2

$$\begin{array}{r|l} 386 & 8 \\ \cline{2-2} -\ 32 & 48 \\ \cline{1-1} 066 & \\ -\ 64 & \\ \cline{1-1} 02 & \end{array}$$

Kalan : 2

Bilgi

Bir sayının son üç basamağında elde edilen sayı 8'in katı veya 000 ise o sayı **8 ile bölünebilir.**

Bir sayının 8 ile bölümünden kalan, o sayının son üç basamağında oluşan sayının 8 ile bölümünden kalana eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 14m4 sayısı 8 ile bölünebildiğine göre m'nin alacağı değerleri bulalım.

Çözüm

14m4 sayısının 8 ile bölünebilmesi için son üç basamağında elde edilen 4m4 üç basamaklı sayının 8 ile bölünmesi gerekir. Buna göre 4m4 sayısını 4m4 = 400 + 10m + 4 biçiminde çözümleyelim.

400 sayısı 8 ile bölünebilir. Bu durumda 10m + 4 = 8k olması için m, 2 veya 6 değerlerini almalıdır.

Örnek

657 ve 15478 sayıları ile bu sayıların rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 657 & 9 \\ \cline{2-2} -\ 63 & 73 \\ \cline{1-1} 027 & \\ -\ 27 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

Kalan : 0

$6 + 5 + 7 = 18$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 9 \\ \cline{2-2} -18 & 2 \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

Kalan : 0

$$\begin{array}{r|l} 15478 & 9 \\ \cline{2-2} -\ 9 & 1719 \\ \cline{1-1} 064 & \\ -\ 63 & \\ \cline{1-1} 017 & \\ -\ 9 & \\ \cline{1-1} 088 & \\ -\ 81 & \\ \cline{1-1} 07 & \end{array}$$

Kalan : 7

$1 + 5 + 4 + 7 + 8 = 25$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 9 \\ \cline{2-2} -18 & 2 \\ \cline{1-1} 07 & \end{array}$$

Kalan : 7

Bilgi

Bir sayının rakamları toplamı 9'un bir katı ise o sayı **9 ile bölünebilir.**

Bir sayının 9 ile bölümünden kalan, o sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 75m8 sayısı 9 ile bölünebildiğine göre m'nin alacağı değeri bulalım.

Çözüm

75m8 $\longrightarrow$ $7 + 5 + m + 8 = 20 + m$ toplamının 9 ile bölünebilmesi için $m = 7$ olmalıdır.

Örnek

Beş basamaklı A2A4A sayısı 9'a bölünebildiğine göre A'nın alacağı değerleri bulalım.

Çözüm

A2A4A $\longrightarrow$ $A + 2 + A + 4 + A = 3A + 6$ sayısı 9'a bölünebildiğine göre

$3A + 6 = 9k$ olması gerekir.

Bu durumda A'nın hangi değerleri için bu koşulu sağladığını bulmalıyız.

A, 1, 4 veya 7 değerlerini almalıdır.

Örnek

7A53 dört basamaklı sayısının 9'a bölümünden kalan 3 olduğuna göre A'nın alacağı değeri bulalım.

Çözüm

7A53 $\longrightarrow$ $7 + A + 5 + 3 = 15 + A = 9k + 3$

$k = 2$ için $15 + A = 21$

$A = 6$ olmalıdır.

Örnek

5A27B beş basamaklı sayısı 9 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 4 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre A'nın alacağı değerleri bulalım.

Çözüm

Bu şekilde birden çok bölünebilme kuralının uygulanacağı sorularda varsa önce birler basamağı ile ilgili kurala, sonra son iki basamakla ilgili kurala,sonra son üç basamağı ile ilgili kurala daha sonra tüm basamaklarla ilgili kurala bakılır.

Bu durumda önce 4 ile ilgili kurala bakmalıyız.

5A27B sayısının 4 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre 7B sayısında B = 0, B = 4 veya B = 8 olmalıdır.

B = 0 ise sayı 5A270 olacaktır. Bu durumda

5A270 $\longrightarrow$ 5 + A + 2 + 7 + 0 = 14 + A $\longrightarrow$ 4 değerlerini alır.

B = 4 ise sayı 5A274 olacaktır. Bu durumda

5A274 $\longrightarrow$ 5 + A + 2 + 7 + 4 = 18 + A $\longrightarrow$ 0 ve 9 değerlerini alır.

B = 8 ise sayı 5A278 olacaktır. Bu durumda

5A278 $\longrightarrow$ 5 + A + 2 + 7 + 8 = 22 + A $\longrightarrow$ 5 değerini alır.

Bu durumda A; 0, 4, 5 ve 9 değerlerini alır.

Örnek

Aşağıda bazı sayıların 10 ile bölümünden kalanlar bulunmuştur. İnceleyelim.

Çözüm

90 sayısı 10 ile bölünebilir.

178 = 170 + 8 olduğundan 178 sayısının 10 ile bölümünden kalan 8'dir.

3163 = 3160 + 3 olduğundan 3163 sayısının 10 ile bölümünden kalan 3'tür.

Bilgi

Bir sayının birler basamağındaki rakam "0" ise o sayı **10 ile bölünebilir.**

Bir sayının 10 ile bölümünden kalan o sayının birler basamağındaki rakama eşittir.

Örnek

160 ve 15745 sayılarının 10 ile bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

160 sayısının birler basamağındaki rakam "0" olduğundan 160 sayısı 10 ile bölünebilir.

15745 sayısının birler basamağındaki rakam 5 olduğundan 15745 sayısının 10 ile bölümünden kalan 5'tir.

Bilgi

Verilen sayının rakamları, birler basamağından başlayarak sağdan sola doğru “+” ve “–” işareti ile sınıflandırılır. “+”lı rakamların toplamından “–”li rakamların toplamı çıkartılır. Fark 11’in katı ise o sayı **11 ile bölünebilir.** Elde edilen fark 11’in katı değilse o sayının 11’e bölümünden kalana eşittir. Eğer fark “–” ise 11 ile toplanır. Elde edilen sonuç sayının 11 ile bölümünden kalanı verir.

Örnek

16632 sayısının 11 ile bölünüp bölünemediğini bulalım.

Çözüm

$\underset{+-+-+}{16632} \longrightarrow (2 + 6 + 1) - (3 + 6)$

$9 - 9 = 0$ olduğundan 16632 sayısı 11 ile bölünebilir.

Örnek

7329 ve 6341 sayılarının 11 ile bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

$\underset{-+-+}{7329} \longrightarrow (9 + 3) - (7 + 2)$

$12 - 9 = 3$ olduğundan 7329 sayısının 11 ile bölümünden kalan 3’tür.

$\underset{-+-+}{6341} \longrightarrow (3 + 1) - (6 + 4)$

$4 - 10 = -6$ olduğundan 6341 sayısının 11 ile bölümünden kalan $11 - 6 = 5$ olarak bulunur.

Bilgi

$A, B, C \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

A’nın C’ye bölümünden kalan k_1,

B’nin C’ye bölümünden kalan k_2 ise

A + B’nin C’ye bölümünden kalan $k_1 + k_2$

$A \cdot B$’nin C’ye bölümünden kalan $k_1 \cdot k_2$’dir.

Eğer $k_1 + k_2$ ve $k_1 \cdot k_2$ sayıları C’den büyük çıkarsa sonuç C’ye bölünerek kalan bulunur.

Örnek

$176378 \cdot 518647$ çarpımının 9 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

$176378 \longrightarrow 1 + 7 + 6 + 3 + 7 + 8 = 32$ olduğundan 176378 sayısının 9 ile bölümünden kalan 5

$518647 \longrightarrow 5 + 1 + 8 + 6 + 4 + 7 = 31$ olduğundan 518647 sayısının 9 ile bölümünden kalan 4 olur. Bu durumda

$176378 \cdot 518647$ çarpımının 9 ile bölümünden kalan $5 \cdot 4 = 20 = 18 + 2$ olduğundan kalan 2 olur.

Örnek

x doğal sayısının 5 ile bölümünden kalan 3, y doğal sayısının 5 ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre $x + y$ ve $x \cdot y$ sayılarının 5 ile bölümünden kalanları bulalım.

Çözüm

$x + y$ sayısının 5 ile bölümünden kalan $1 + 3 = 4$ ve

$x \cdot y$ sayısının 5 ile bölümünden kalan $1 \cdot 3 = 3$ olarak bulunur.

Örnek

A sayısının 8 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre A + 4 sayısının 8 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

A sayısının 8 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre $A = 8p + 3$ $(p \in \mathbb{Z}^{+})$ olur.

Bu durumda $A + 4 = 8p + 3 + 4 = 8p + 7$ olacağından A + 4 sayısının 8 ile bölümünden kalan 7 olarak bulunur.

Bilgi

1'den büyük, 1 ve kendisinden başka doğal sayı böleni olmayan pozitif tam sayılara **asal sayı** denir.

1'den başka ortak böleni olmayan en az iki pozitif tam sayıya, **aralarında asal sayılar** denir.

Aralarında asal iki sayıya bölünebilen sayılar, bu sayıların çarpımına da bölünebilir.

Örnek

Aşağıda bazı asal sayılar ve aralarında asal sayılar verilmiştir. İnceleyelim.

Çözüm

Bazı asal sayılar: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 ve 61

Aralarında asal sayılardan bazıları: 1 ile 3, 2 ile 9, 4 ile 5, 9 ile 10, 18 ile 23 ve 25 ile 26

Örnek

Aşağıda yapılan işlemleri inceleyelim.

Çözüm

2 ve 3 ile bölünebilen sayı $2 \cdot 3 = 6$ ile de bölünebilir.

3 ve 4 ile bölünebilen sayı $3 \cdot 4 = 12$ ile de bölünebilir.

3 ve 5 ile bölünebilen sayı $3 \cdot 5 = 15$ ile de bölünebilir.

2 ve 9 ile bölünebilen sayı $2 \cdot 9 = 18$ ile de bölünebilir.

4 ve 5 ile bölünebilen sayı $4 \cdot 5 = 20$ ile de bölünebilir.

3 ve 8 ile bölünebilen sayı $3 \cdot 8 = 24$ ile de bölünebilir.

4 ve 9 ile bölünebilen sayı $4 \cdot 9 = 36$ ile de bölünebilir.

Örnek

1752 sayısının 12 ile bölünüp bölünemeyeceğini bulalım.

Çözüm

$12 = 3 \cdot 4$ olduğundan sayının hem 3'e hem de 4'e bölünmesi gerekir.

$1752 \longrightarrow$ 52, 4 ile bölünebilir. Bu durumda 1752 sayısı 4'e bölünebilir.

$1752 \longrightarrow 1 + 7 + 5 + 2 = 15$ olduğundan 1752 sayısı 3'e bölünebilir.

Hem 3'e hem de 4'e bölünebildiği için 1752 sayısı 12'ye bölünebilir.

Örnek

Dört basamaklı 8m4n sayısı 15 ile bölündüğüne göre m'nin alacağı en büyük değeri bulalım.

Çözüm

Sayı 15 ile bölünebildiğine göre $15 = 3 \cdot 5$ olduğundan hem 3'e hem de 5'e bölünmelidir. Bu durumda sayı 5'e bölündüğünde n, 0 veya 5 olmalıdır.

$n = 0$ için $8m40 \longrightarrow 8 + 4 + m = 12 + m$

$\longrightarrow$ 0, 3, 6 veya 9 olur.

$n = 5$ için $8m45 \longrightarrow 8 + 5 + 4 + m = 17 + m$

$\longrightarrow$ 1, 4 veya 7 olur.

Bu durumda m'nin alacağı en büyük değer 9 olarak bulunur.

Örnek

8436 dört basamaklı sayısının 6 ile bölünüp bölünemediğini bulalım.

Çözüm

$6 = 2 \cdot 3$ olduğundan sayının hem 2'ye hem de 3'e bölünüp bölünemediğine bakmalıyız.

Sayının birler basamağı 6 olduğundan 2 ile bölünebilir.

$8 + 4 + 3 + 6 = 21$ olduğundan sayı 3 ile bölünebilir. Bu durumda sayı 6 ile bölünebilir.

Örnek

Dört basamaklı 7A3B sayısı 12 ile bölünebildiğine göre A + B toplamının alacağı en büyük değeri bulalım.

Çözüm

$12 = 3 \cdot 4$ olduğundan sayı hem 3 hem de 4 ile bölünmelidir.

7A3B sayısı 4'e bölünebildiğinden $B = 2$ veya $B = 6$ olmalıdır.

$B = 2$ için $7A32 \longrightarrow 7 + 3 + 2 + A = 12 + A$

$\longrightarrow$ 0, 3, 6, 9 olur.

$B = 6$ için $7A36 \longrightarrow 7 + 3 + 6 + A = 16 + A$

$\longrightarrow$ 2, 5, 8 olur. Bu durumda $A + B$ toplamının alacağı en büyük değer $6 + 8 = 14$ olarak bulunur.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. $\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} - & 5 \\ \hline 9 & \end{array}$

Yandaki bölme işlemine göre A'nın alacağı en küçük değeri bulunuz.

2. Rakamları farklı 23764C altı basamaklı sayısı 2 ile bölünebildiğine göre C'nin alacağı değerleri bulunuz.

3. A573 dört basamaklı sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 ise A'nın alacağı değerleri bulunuz.

4. Rakamları farklı beş basamaklı 478m4 sayısı 4 ile bölünebildiğine göre m'nin alacağı değerleri bunuz.

5. Rakamları farklı beş basamaklı a65bc sayısı 4 ile bölünebildiğine göre a + b + c toplamının alacağı en büyük değer kaçtır?

6. A doğal sayısının 9 ile bölümünden kalan 7, B doğal sayısının 9 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre;

a) A + B sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.

b) A·B sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.

7. Bir A doğal sayısının 11 ile bölümünden kalan 8'dir.

Buna göre aşağıdaki sayıların 11 ile bölümünden kalanları bulunuz.

a) A + 3 b) 2A + 6

c) 3A + 1 ç) 3A – 3

d) 4A – 1 e) $A^2 + A$

f) $A^2 + A + 2$ g) A + 11

8. Rakamları farklı beş basamaklı 5738B sayısı 5 ile bölündüğüne göre B'nin alacağı değerleri bulunuz.

9. 1768754322 on basamaklı sayısının 8 ile bölümünden kalanı bulunuz.

10. Altı basamaklı A7532B sayısının 9 ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre A + B toplamının kaç farklı değer alacağını bulunuz.

11. Beş basamaklı 51A8B sayısı 18 ile bölünebildiğine göre A'nın kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

12. Üç basamaklı 37d sayısı 18 ile bölünebildiğine göre d kaçtır?

13. 11 basamaklı A = 12453789321 sayısı veriliyor.

Buna göre 3A + 5 sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.

14. Beş basamaklı A475B sayısının 36 ile bölümünden kalan 13 olduğuna göre A'nın alacağı değerleri bulunuz.

15. Dört basamaklı A15B sayısı 15 ile bölünebildiğine göre A + B toplamının alacağı en büyük değeri bulunuz.

16. 23 basamaklı 555…5 doğal sayısının 3 ile bölümünden kalanla, 4 ile bölümünden kalanın toplamını bulunuz.

3.2.2. Tam Sayılarda EBOB ve EKOK

Örnek

72 sayısını asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazalım.

Çözüm

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ olduğundan 72 sayısı asal çarpanlarının çarpımı olarak

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ biçiminde yazılır.

Örnek

12 ve 18 sayılarının ortak bölenlerini bulalım.

Çözüm

12 ⟶ 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 12

18 ⟶ 1 – 2 – 3 – 6 – 9 – 18

Her iki sayının ortak bölenleri yuvarlak içine alınmıştır. Bu bölenler içindeki en büyük olan sayı bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğüdür.

Bilgi

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne, bu sayıların **en büyük ortak böleni** denir. Kısaca "EBOB" ile ifade edilir.

a ve b sayılarının EBOB'u "EBOB (a, b)" veya "$(a, b)_{EBOB}$" biçiminde gösterilir.

Örnek

60 ve 126 sayılarının EBOB'unu bulalım.

Çözüm

60	126	2
30	63	2
15	63	3
5	21	3
5	7	5
1	7	7
1	1	

Verilen sayılar bu şekilde aynı anda asal çarpanlarına ayrılır. Her iki sayının ortak asal çarpanları belirlenir (Ortak asal çarpanlar yuvarlak içine alınmıştır). Ortak asal çarpanların çarpımı bize verilen sayıların EBOB'unu verir.

EBOB $(60, 126) = 2 \cdot 3 = 6$ olur.

Veya sayılar,

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ biçiminde asal çarpanların çarpımı olarak yazılır.

Ortak çarpanlardan en küçük üslü olanlarının çarpımı bize sayıların EBOB'unu verir.

Bu durumda EBOB $(60, 126) = 2 \cdot 3 = 6$ olarak elde edilir.

Örnek

$A = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$

$B = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11$

sayılarının EBOB'unu bulalım.

Çözüm

EBOB (A, B) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 8 \cdot 9 \cdot 25 = 1800$ olarak elde edilir.

Örnek

24 ve 36 sayılarının ortak katlarını bulalım.

Çözüm

24 ⟶ 24 – 48 – 72 – 96 – 120 – 144 – …

36 ⟶ 36 – 72 – 108 – 144 – 180 – …

24 ve 36'nın ortak katlarından bazıları yuvarlak içine alınmıştır.

Bu sayılardan en küçüğü 24 ve 36'nın ortak katlarının en küçüğüdür.

Bilgi

Sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne, bu sayıların **en küçük ortak katı** denir. Kısaca "EKOK" ile ifade edilir.

a ve b sayılarının EKOK'u, "EKOK (a, b)" veya "$(a, b)_{EKOK}$" biçiminde gösterilir.

Örnek

21 ve 45 sayılarının EKOK'unu bulalım.

Çözüm

21	45	3
7	15	3
7	5	5
7	1	7
1	1	

Verilen sayılar bu şekilde aynı anda asal çarpanlarına ayrıldıktan sonra tüm asal çarpanların çarpımı sayıların EKOK'unu verir.

EKOK (21, 45) = $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 315$ olur.

Veya sayılar,

$21 = 3 \cdot 7$

$45 = 3^2 \cdot 5$ biçiminde asal çarpanların çarpımı olarak yazıldığında en büyük üslü ortak çarpanlar ile ortak olmayanların çarpımı bize sayıların EKOK'unu verir. Bu durumda

EKOK (21, 45) = $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$ olarak elde edilir.

Örnek

$A = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

$B = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2$

sayılarının EKOK'unu bulalım.

Çözüm

EKOK (A, B) = $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ biçiminde elde edilir.

Örnek

120 ve 150 sayılarının EBOB ve EKOK'unu bulalım. Bulduğumuz değerlerin çarpımını $120 \cdot 150$ ile karşılaştıralım.

Çözüm

120	150	2
60	75	2
30	75	2
15	75	3
5	25	5
1	5	5
1	1	

Bu durumda

EBOB (120, 150) = $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

EKOK (120, 150) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 600$ olarak bulunur.

$30 \cdot 600 = 18\,000$

$120 \cdot 150 = 18\,000$ olduğundan

$120 \cdot 150$ = EBOB (120, 150) $\cdot$ EKOK (120, 150) elde edilir.

Bilgi

A ve B sayılarının çarpımı, bu sayıların EBOB'u ile EKOK'unun çarpımına eşittir.

$A \cdot B$ = EBOB (A, B) $\cdot$ EKOK (A, B) olur.

Örnek

40 ile 63 sayılarının EBOB ve EKOK'unu bulalım.

Çözüm

40	63	2
20	63	2
10	63	2
5	63	3
5	21	3
5	7	5
1	7	7
1	1	

Bu durumda

EKOK (40, 63) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$= 2520 = 40 \cdot 63$

EBOB (40, 63) = 1 olarak elde edilir.

Bilgi

Aralarında asal iki sayının EBOB'u 1'e, EKOK'u ise bu sayıların çarpımına eşittir.

A ve B aralarında asal iki sayı olmak üzere

EBOB (A, B) = 1,   EKOK (A, B) = A·B olur.

Örnek

20 ile 40 sayılarının EBOB ve EKOK'unu bulalım.

Çözüm

20	40	2
10	20	2
5	10	2
5	5	5
1	1	1

Bu durumda

EBOB (20, 40) = 2·2·5 = 20

EKOK (20, 40) = 2·2·2·5 = 40 olarak bulunur.

Bilgi

Birbirinin katı olan iki pozitif tam sayının EKOK'u büyük sayıya, EBOB'u küçük sayıya eşittir.

A, B $\in \mathbb{Z}^+$ ve A, B'nin bir katı ise

EBOB (A, B) = B ,   EKOK (A, B) = A'dır.

Örnek

EBOB (a, b) = 15, EKOK (a, b) = 450 olduğuna göre a + b toplamının alacağı <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değerleri bulalım.

Çözüm

EBOB (a, b) = 15 $\Rightarrow$ a = 15x , b = 15y (x ve y aralarında asal sayılardır.)

EKOK (a,b) = 450 $\Rightarrow$ a·b = 15·450 $\Rightarrow$ $15x\cdot\overset{1}{\cancel{15}}y = 15\cdot\overset{30}{\cancel{450}}$

$\cancel{15}x\cdot y = \cancel{15}\cdot 30$

$x\cdot y = 30$ olur.

a + b toplamının en az olması için x ve y'nin arasındaki fark en az olmalıdır.

x = 5, y = 6 seçilirse a = 15·5 = 75, b = 15·6 = 90 olur. Bu durumda

a + b'nin alacağı en küçük değer 75 + 90 = 165 olarak bulunur.

a + b toplamının en çok olması için x ve y'nin arasındaki fark en çok olmalıdır.

x = 1, y = 30 seçilirse a = 15·1 = 15, y = 15·30 = 450 olur.

Bu durumda a + b toplamının alacağı en büyük değer 15 + 450 = 465 olarak bulunur.

Örnek

a ve b birbirinden farklı doğal sayılar olmak üzere

EKOK (a, b) = 108 olduğuna göre a + b toplamının alacağı en büyük ve en küçük değerleri bulalım.

Çözüm

a + b toplamının en büyük değeri alması için a ve b mümkün olduğunca büyük olmalıdır. Bu durumda a = EKOK (a, b) = 108 alınırsa b'de 108'i bölen en büyük sayı olmalıdır.

108'i bölen 108'den farklı en büyük sayı 54 olacağından b = 54 olur.

Buradan a + b toplamının alacağı en büyük değer a + b = 108 + 54 = 162 olarak elde edilir.

a + b'nin en küçük değeri alması için a ve b mümkün olduğunca küçük alınmalıdır

a ve b aralarında asal iki sayı olarak alınırsa a + b toplamı en küçük değerini alır.

Bu durumda $108 = 4 \cdot 27$ olduğunda a = 4, b = 27 alınırsa a + b'nin en küçük değeri 4 + 27 = 31 olarak bulunur.

Örnek

6, 7 ve 8 ile tam bölünebilen en küçük pozitif tam sayıyı bulalım.

Çözüm

6, 7 ve 8'e tam bölünebilen en küçük pozitif tam sayıya A dersek A = EKOK(6, 7, 8) olur.

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Bu durumda

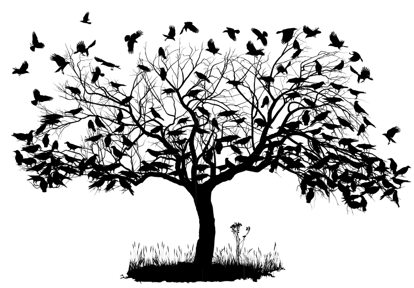
$\Rightarrow$ A = EKOK (6, 7, 8) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

= 168 olarak elde edilir.

Örnek

Bir ağaçtaki kuşlar beşer, altışar ve yedişer sayıldığında her defasında 3 kuş artmaktadır.

Buna göre ağaçta en az kaç kuş olduğunu bulalım.



Çözüm

Kuş sayısına A diyelim.

A = 5m + 3 = 6n + 3 = 7p + 3 olduğundan A'nın 5, 6 ve 7'ye bölündüğünde 3 kalanını veren en küçük doğal sayı olduğu görülmektedir.

A = 5m + 3 = 6n +3 = 7p + 3 $\Rightarrow$ A – 3 = 5m = 6n = 7p olur.

Buradan A – 3 = EKOK (5, 6, 7) = $5 \cdot 6 \cdot 7$ = 210 $\Rightarrow$ A = 210 + 3 = 213 olur.

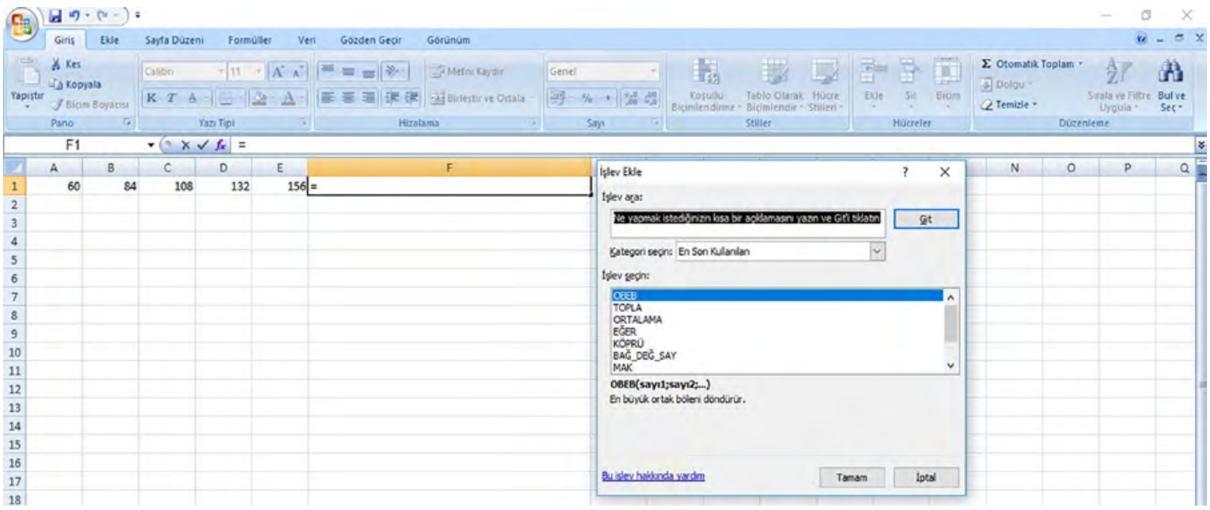
Ağaçta en az 213 kuş vardır.

Örnek

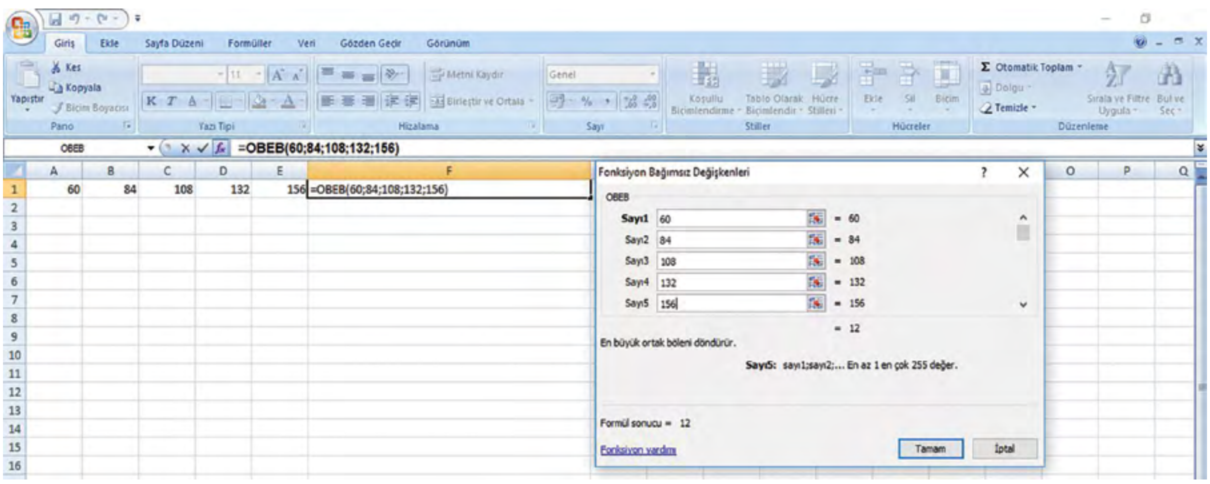
60, 84, 108, 132 ve 156 sayılarının EBOB'unu bir elektronik tablolama programı yardımıyla bulalım.

Çözüm

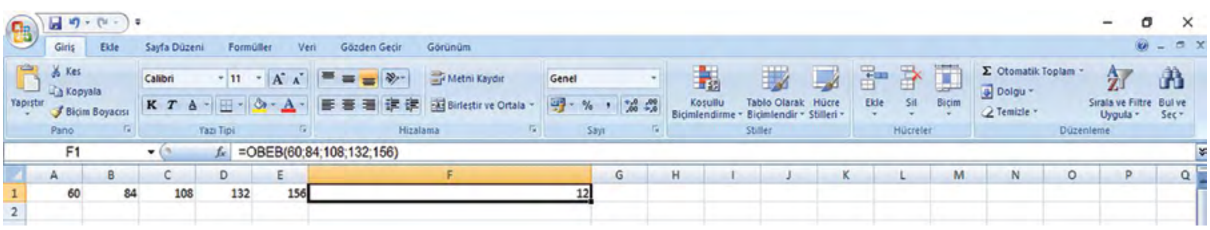
Bilgisayarımızda bir elektronik tablolama programı açalım. Daha sonra ekrandaki A sütununa 60, B sütununa 84, C sütununa 108, D sütununa 132 ve E sütununa 156 sayılarını yazalım daha sonra F sütununa ardından fx e tıklayalım.



Yukarıda açılan pencerede EBOB veya OBEB sekmesini seçip ardından tamama tıklayalım.



Açılan yeni pencerede sayı 1 satırına 60, sayı 2 satırına 84, sayı 3 satırına 108, sayı 4 satırına 132 ve sayı 5 satırına 156 yazalım. Ardından tamama tıklayalım.



F sütunundaki sayı hakkında neler söyleyebilirsiniz.

Örnek

Ali Bey, kenar uzunlukları 80 m ve 180 m olan dikdörtgen biçimindeki bahçesinin çevresine köşelere de birer adet gelecek biçimde, eşit aralıklarla ağaç dikecektir.

Buna göre Ali Bey'in en az kaç ağaca ihtiyacı olduğunu bulalım.

Çözüm

Ağaçlar eşit aralıklarla dikileceğinden ağaçlar arası mesafe 80 ve 180 sayılarının EBOB'u olmalıdır. Buna göre

80	180	2
40	90	2
20	45	2
10	45	2
5	45	3
5	15	3
5	5	5
1	1	

EBOB (80, 180) = $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ bulunur.

$$\text{Ağaç sayısı} = \frac{\text{Bahçenin çevresi}}{\text{EBOB (80, 180)}} = \frac{80 + 80 + 180 + 180}{20}$$

$$= \frac{\overset{26}{\cancel{520}}}{\underset{1}{\cancel{20}}} = 26 \text{ olarak elde edilir.}$$

Ali Bey'in en az 26 ağaca ihtiyacı vardır.

Örnek

Esra Hanım, bakkalına aldığı 108 kg ayçiçek yağı, 132 kg zeytinyağı ve 180 kg fındık yağını hiç artmayacak ve birbirine karışmayacak biçimde eş hacimli tenekelere doldurup satmak istemektedir.

Buna göre bu iş için Esra Hanım'ın en az kaç tenekeye ihtiyacı olduğunu bulalım.

Çözüm

Tenekelerin hacmi a kg olsun. Bu durumda a, 108, 132 ve 180 sayılarını tam bölmelidir. Ayrıca teneke sayısının en az olması için a'nın en büyük olması gerekir.

O hâlde a = EBOB (108, 132, 180) olmalıdır.

108	132	180	2
54	66	90	2
27	33	45	3
9	11	15	3
3	11	5	3
1	11	5	5
1	11	1	11
1	1	1	

Buna göre EBOB (108, 132, 180) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ = a olur.

$$\text{Teneke sayısı} = \frac{108 + 132 + 180}{12} = \frac{\overset{35}{\cancel{420}}}{\underset{1}{\cancel{12}}} = 35 \text{ olarak elde edilir.}$$

Örnek

Erol Öğretmen sınıfında dörtgenler konusunu işlerken öğrencilerine 12 cm ve 15 cm boyutlarında dikdörtgen biçiminde bir miktar karton vermiştir. Erol Öğretmen, öğrencilerinden bu kartonları kullanarak; verilen kartonlardan daha büyük ve mümkün olan <u>en küçük</u> alanlı bir kare yapmalarını istemektedir.

Buna göre bu iş için öğrencilerin dikdörtgen biçimindeki kartonlardan <u>en az</u> kaçar tane kullanabileceğini bulalım.

Çözüm

Oluşturulacak karenin bir kenar uzunluğunun 12 ve 15 sayılarına tam bölünebilmesi yani

EKOK (12, 15) olması gerekir. Karton sayısını ise karenin alanını dikdörtgenin alanına bölerek bulabiliriz.

Buna göre

12	15	2
6	15	2
3	15	3
1	5	5
	1	

Karenin bir kenarının uzunluğu EKOK (12, 15) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ bulunur.

$$\text{Karton sayısı} = \frac{\text{Karenin alanı}}{\text{Dikdörtgenin alanı}}$$

$$= \frac{\cancelto{5}{60} \cdot 60}{\cancelto{1}{12} \cdot 15} = \frac{5 \cdot \cancelto{4}{60}}{\cancelto{1}{15}}$$

$$= 5 \cdot 4 = 20 \text{ bulunur.}$$

Örnek

a, b ve c doğal sayılar olmak üzere

$K = 4a + 2 = 5b + 3 = 7c + 5$ olduğuna göre K'nin alacağı <u>en küçük</u> değeri bulalım.

Çözüm

$K = 4a + 2 = 5b + 3 = 7c + 5$ eşitliğinde her tarafa 2 eklersek

$K + 2 = 4a + 2 + 2 = 5b + 3 + 2 = 7c + 5 + 2$

$K + 2 = 4a + 4 = 5b + 5 = 7c + 7 \Rightarrow K + 2 = 4(a + 1) = 5(b + 1) = 7(c + 1)$ olur.

Bu durumda K + 2'nin 4, 5 ve 7 ile tam bölünen bir sayı olduğu görülür.

K'nin en küçük olması için K + 2 = EKOK (4, 5, 7) olması gerekir.

Buna göre

K + 2 = EKOK (4, 5, 7) = $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$

$K = 140 - 2 = 138$ olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. 72, 108 ve 144 sayılarının EBOB ve EKOK'unu bulunuz.

2. A sayısı 4, 5 ve 9 ile tam bölünebilen bir sayıdır. A sayısının 380'den büyük olduğu bilindiğine göre A nın alacağı en küçük değeri bulunuz.

3. a, b ve c birer doğal sayı olmak üzere

$$K = 3a + 1 = 5a + 3 = 8a + 6$$

olduğuna göre K'nin alacağı en küçük doğal sayı değerini bulunuz.

4. EBOB (a, b) = 24

EKOK (a, b) = 144

olduğuna göre a + b toplamının alacağı en küçük ve en büyük değeri bulunuz.

5. 36 ve a sayıları için EBOB (36, a) = 12 ve EKOK (36, a) = 180

olduğuna göre a sayısı kaçtır?

A) 30 B) 48 C) 60 D) 72 E) 84

6. A ve B ardışık doğal sayılardır.

EBOB (A, B) + EKOK (A, B) = 273

olduğuna göre küçük sayı kaçtır?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

7. EBOB (a, b) = 1 ve $a \cdot b = 30$

olduğuna göre bu koşulu sağlayan kaç farklı (a, b) ikilisinin olduğunu bulunuz.

8. a ve b pozitif tam sayıdır.

EBOB (a, b) = 15 ve

a + b = 105

olduğuna göre a – b farkının en büyük değerini bulunuz.

9. 240 litre süt, 200 litre su ve 100 litre meyve suyu hiç artmayacak ve birbirlerine karışmayacak şekilde şişelere doldurulacaktır.

Buna göre en az kaç şişeye ihtiyaç olduğunu bulunuz.

10. Boyutları 54 m, 72 m ve 90 m olan dikdörtgenler prizması biçimindeki bir depo, küp biçiminde eşit hacimli yağ tenekeleriyle hiç boşluk kalmayacak biçimde doldurulacakır.

Buna göre deponun en fazla kaç tane yağ tenekesi alacağını bulunuz.

11. Ömer Bey, kenar uzunlukları 108 m ve 240 m olan tarlasını eşit alanlı kare biçiminde parsellere ayırarak hayır kurumlarına bağış yapmak istemektedir.

Buna göre tarladan en az kaç parsel elde edileceğini bulunuz.

12. Bir marangoz, boyutları 120 cm, 100 cm ve 80 cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki bir kütükten eş büyüklükte küp şeklinde parçalar elde edecektir.

Buna göre bu marangoz en az kaç tane parça elde edebilir?

A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 150

3.2.3. Gerçek Hayatta Periyodik Olarak Tekrar Eden Durumları İçeren Problemler

Örnek

Bugün günlerden pazar olduğuna göre 104 gün sonra hangi gün olacağını bulalım.

Çözüm

Bir hafta 7 gün olduğuna göre her 7 gün sonra pazar günü olacaktır.

Bu durumda 104’ü 7’ye böleriz. Pazar günü 0. gün kabul edilerek, kalan günler pazardan itibaren sayılır.

Buna göre

$$\begin{array}{r|l} 104 & 7 \\ \cline{2-2} -7 & 14 \\ \cline{1-1} 034 & \\ -28 & \\ \cline{1-1} 06 & \end{array}$$

0	1	2	3	4	5	6
Pazar	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi

Kalan 6 olduğundan 104 gün sonra cumartesi günü olacaktır.

Örnek

Bir doktor 5 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini cuma günü tutan doktorun 25. nöbetini hangi gün tutacağını bulalım.

Çözüm

Doktor ilk nöbetini tuttuğuna göre geriye $25 - 1 = 24$ nöbeti kalmıştır.

Her 5 günde bir nöbet tuttuğuna göre 24. nöbetini tutması için $24 \cdot 5 = 120$ gün geçmelidir.

Buna göre doktor 25. nöbetini

$$\begin{array}{r|l} 120 & 7 \\ \cline{2-2} -7 & 17 \\ \cline{1-1} 050 & \\ -49 & \\ \cline{1-1} 01 & \end{array}$$

0	1
Cuma	Cumartesi

Kalan 1 olduğundan cumartesi günü tutacaktır.

Örnek

İki hemşireden biri 4 günde, diğeri 6 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetlerini birlikte çarşamba günü tutan bu iki hemşirenin birlikte 12. nöbetlerini hangi gün tutacağını bulalım.

Çözüm

İki hemşirenin birlikte nöbet tutabilmesi için 4 ve 6 sayılarının EKOK'u kadar bir zaman geçmesi gerekir. Bu hemşireler ilk nöbetlerini birlikte tuttuklarına göre geriye birlikte tutacakları 12 – 1 = 11 nöbetleri kalmıştır.

Buna göre EKOK(4, 6) = 12 $\Rightarrow$ 12. nöbetlerini $11 \cdot 12 = 132$ gün sonra tutacaklardır.

$$\begin{array}{r|l} 132 & 7 \\ \cline{2-2} -\ \ 7 & 18 \\ \cline{1-1} 062 & \\ -\ \ 56 & \\ \cline{1-1} 06 & \end{array}$$

0	1	2	3	4	5	6
Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar	Pazartesi	Salı

Kalan 6 olduğundan bu iki hemşire birlikte 12. nöbetlerini salı günü tutacaklardır.

Örnek

$\frac{13}{7}$ kesrinin ondalık açılımında virgülden sonraki 2613. rakamı bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 13 & 7 \\ \cline{2-2} -\ \ 7 & 1{,}8571428\ldots \\ \cline{1-1} 060 & \\ -\ \ 56 & \\ \cline{1-1} 040 & \\ -\ \ 35 & \\ \cline{1-1} 050 & \\ -\ \ 49 & \\ \cline{1-1} 010 & \\ -\ \ 7 & \\ \cline{1-1} 030 & \\ -\ \ 28 & \\ \cline{1-1} 020 & \\ -\ \ 14 & \\ \cline{1-1} 060 & \\ -\ \ 56 & \\ \cline{1-1} 04 & \end{array}$$

İşlemini incelediğimizde ondalık açılımda virgülden sonraki rakamların 6 rakamdan sonra tekrar ettiğini görürüz. Buna göre

$$\begin{array}{r|l} 2613 & 6 \\ \cline{2-2} -\ \ 24 & 435 \\ \cline{1-1} 021 & \\ -\ \ 18 & \\ \cline{1-1} 33 & \\ -\ \ 30 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Bölme işleminde kalan 3 olduğundan virgülden sonraki 2613. rakam virgülden sonraki 3. rakam olacaktır.

Bu durumda $\frac{13}{7}$ kesrinin ondalık açılımında virgülden sonraki 2613. rakam, virgülden sonraki 3. rakam olan 7 olarak elde edilir.

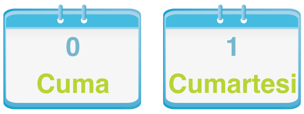
Örnek

9 Eylül 2022 Cuma doğum gününü kutlayan Burak'ın bir sonraki doğum gününü hangi gün kutlayacağını bulalım.

Çözüm

İki tarih arasında geçen gün sayısını bulacağız. 2023 Şubat ayı 28 gün olduğundan Burak bir sonraki doğum gününü 365 gün sonra kutlayacaktır. Buna göre

$$\begin{array}{r|l} 365 & 7 \\ \cline{2-2} -35 & 52 \\ \cline{1-1} 015 & \\ -14 & \\ \cline{1-1} 01 & \end{array}$$



Kalan 1 olduğundan Burak 2018 yılında doğum gününü Cumartesi günü kutlayacaktır.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. 19 Nisan 2022 Salı tarihinde doğum gününü kutlayan Barış, 2023 yılında doğum gününü hangi gün kutlar? (2023 yılı şubat ayı 28 gündür.)

A) Çarşamba
B) Perşembe
C) Cuma
D) Cumartesi
E) Pazar

2. Akrebin 5'i gösterdiği bir andan 90 saat sonra akrebin kaçı göstereceğini bulunuz.

3. Dairesel bir pistin etrafını Ali 12 dakikada, Selçuk 15 dakikada, Murat ise 18 dakikada koşmaktadır.

Buna göre bu üç arkadaşın birlikte aynı noktadan aynı yöne koşmaya başladıktan kaç dakika sonra tekrar aynı noktada buluşacaklarını bulunuz.

4. $\frac{15}{14}$ kesrinin ondalık açılımında virgülden sonraki 585. rakamı bulunuz.

5. Selçuk'un yıllık izni 30 gündür. İzninin ilk günü çarşamba olduğuna göre Selçuk'un izninin hangi gün biteceğini bulunuz.

6. 123456789123456789… biçiminde her dokuz rakamda bir tekrarlanan sayının soldan 553. basamağındaki rakamı bulunuz.

7. Biri 5 günde bir diğeri 8 günde bir nöbet tutan iki asker ilk nöbetlerini perşembe günü tuttuklarına göre bu iki askerin birlikte 7. nöbetlerini hangi gün tutacaklarını bulunuz.

8. Bir yıl içinde en çok kaç tane pazar günü vardır?

A) 50 B) 51 C) 52 D) 53 E) 54

3.3. BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

3.3.1. Gerçek Sayılar Kümesinde Aralık Kavramı

Örnek

Yukarıda verilen sayı doğrusunda 1 ve 7 dâhil olmak üzere 1 ile 7 arasındaki

a) Doğal sayıların kümesini

b) Gerçek sayıların kümesini yazalım.

Çözüm

a) Doğal sayılar kümesine A diyelim. Bu durumda kümeyi

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ biçiminde gösteririz.

b) Gerçek sayılar kümesine B diyelim. Bu durumda kümeyi

$B = \{x \mid 1 \leq x \leq 7,\ x \in \mathbb{R}\}$ biçiminde gösteririz.

Bilgi

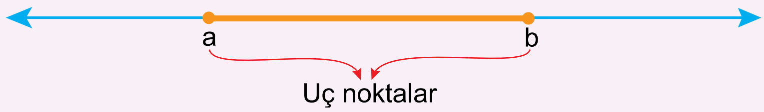
Sayı doğrusunda farklı iki nokta arasındaki tüm gerçek sayıların oluşturduğu alt kümeye aralık denir. Aralıklar, verilen kümenin uç noktalarının kümeye ait olup olmadıklarına göre adlandırılır.

a, b ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

1) Uç noktaların aralığa dahil olduğu kümelere **kapalı aralık** denir.

$A = \{x \mid a \leq x \leq b$ ve $x, a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir kapalı aralık belirtir ve $[a, b]$ biçiminde gösterilir.

Kapalı aralık sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



2) Uç noktaların aralığa dâhil olmadığı kümelere **açık aralık** denir.

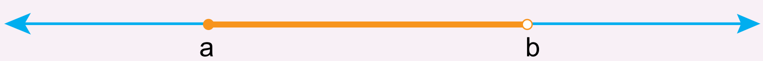
$A = \{x \mid a < x < b$ ve $x, a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir açık aralık belirtir ve (a, b) biçiminde gösterilir.

Açık aralık sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.

3) Uç noktalardan birinin dâhil olduğu kümelere **yarı açık aralık** denir.

$A = \{x \mid a < x \leq b$ ve $x, a, b \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \mid a \leq x < b$ ve $x, a, b \in \mathbb{R}\}$ kümeleri yarı açık aralık belirtir ve sırasıyla $(a, b]$ ve $[a, b)$ biçiminde gösterilir.

Bu aralıklar sayı doğrusunda sırasıyla aşağıdaki gibi gösterilir.



Örnek

Aşağıdaki kümeleri aralık olarak ve sayı doğrusunda gösterelim.

a) $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 8,\ x \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{x \mid 2 < x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{x \mid 2 < x \leq 8,\ x \in \mathbb{R}\}$

ç) $Ç = \{x \mid 2 \leq x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$

Çözüm

a) $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 8,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları 2 ile 8 dâhil olmak üzere 2 ile 8 arasındaki tüm gerçek sayılardır. Bu küme aralık olarak $[2, 8]$ biçiminde gösterilir.

Kümeyi sayı doğrusunda,

biçiminde gösteririz.

b) $B = \{x \mid 2 < x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları 2 ile 8 arasındaki tüm gerçek sayılardır. Bu küme aralık olarak $(2, 8)$ biçiminde gösterilir.

Kümeyi sayı doğrusunda,

biçiminde gösteririz.

c) $C = \{x \mid 2 < x \leq 8,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları 8 dâhil olmak üzere 2 ile 8 arasındaki tüm gerçek sayılardır. Bu küme aralık olarak $(2, 8]$ biçiminde gösterilir.

Kümeyi sayı doğrusunda,

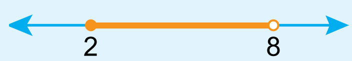
biçiminde gösteririz.

ç) $Ç = \{x \mid 2 \leq x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları 2 dâhil olmak üzere 2 ile 8 arasındaki tüm gerçek sayılardır. Bu küme aralık olarak $[2, 8)$ biçiminde gösterilir.

Kümeyi sayı doğrusunda,

biçiminde gösteririz

Yapılan işlemleri aşağıdaki gibi tabloda gösterelim.

Aralığın Eşitsizlik ile Gösterimi	Aralığın Tipi	Aralığın Gösterimi	Aralığın Küme Olarak Gösterimi	Aralığın Sayı Doğrusunda Gösterimi
$2 \leq x \leq 8$	Kapalı aralık	$[2, 8]$	$\{x \mid 2 \leq x \leq 8,\ x \in \mathbb{R}\}$	
$2 < x < 8$	Açık aralık	$(2, 8)$	$\{x \mid 2 < x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$	
$2 < x \leq 8$	Yarı açık aralık	$(2, 8]$	$\{x \mid 2 < x \leq 8,\ x \in \mathbb{R}\}$	
$2 \leq x < 8$	Yarı açık aralık	$[2, 8)$	$\{x \mid 2 \leq x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$	

Örnek

Aşağıda uç noktalarından birinin ya da her ikisinin sınırlandırılmadığı aralıkları sayı doğrusunda gösterelim.

a) $(-\infty, \infty)$ b) (a, ∞) c) $[a, \infty)$ ç) $(-\infty, a)$ d) $(-\infty, a]$

Çözüm

a) 

b) 

c) 

ç) 

d) 

Bilgi

Bir x gerçek sayısı gittikçe büyüyen değerler alıyorsa bu “∞” sembolü ile gittikçe küçülen değerler alıyorsa bu “−∞” sembolü ile gösterilir.

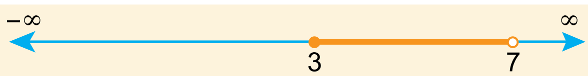
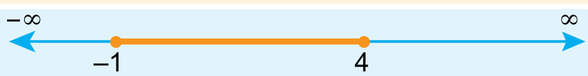
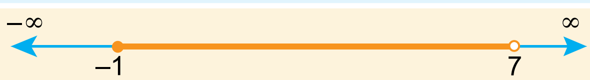
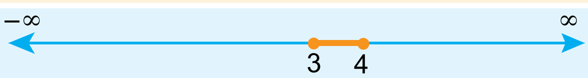
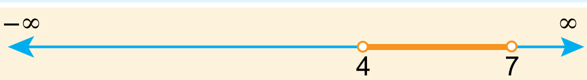
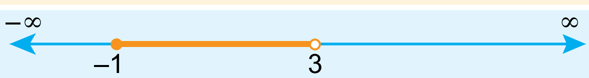
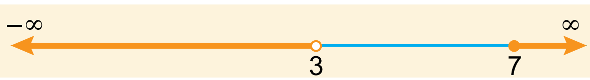
“∞” → artı sonsuz “−∞” → eksi sonsuz diye okunur.

Örnek

$A = [3, 7)$, $B = [-1, 4]$ aralıklarını kullanarak aşağıda istenen kümeleri sayı doğrusunda gösterip aralık olarak ifade edelim.

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ ç) $B \setminus A$ d) A'

Çözüm

	Sayı Doğrusunda Gösterimi	Aralık Olarak Gösterimi
		$A = [3, 7)$
		$B = [-1, 4]$
a)		$A \cup B = [-1, 7)$
b)		$A \cap B = [3, 4]$
c)		$A \setminus B = (4, 7)$
ç)		$B \setminus A = [-1, 3)$
d)		$A' = (-\infty, 3) \cup [7, \infty)$

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıda verilen tablodaki boşlukları uygun biçimde doldurunuz.

Aralığın Tipi	Aralığın Gösterimi	Aralığın Eşitsizlik ile Gösterimi
....	[−3, 4]	....
....	....	2 < x < 8
....	[−2, 7)	....
....	(4, 10]	....
....	....	− 1 < x ≤ 8

2. A = [−2, 6] ve B = (0, 9) aralıklarını kullanarak aşağıda verilen kümeleri sayı doğrusunda gösterip aralık olarak ifade ediniz.

a) A ∪ B

b) A ∩ B

c) A \ B

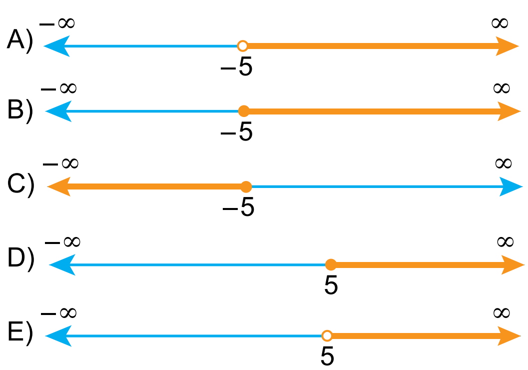
ç) B \ A

d) B'

e) B ∩ A

f) B ∪ B

3. [−5, ∞) aralığının sayı doğrusunda gösterilişi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?



4. A = [− 2, 5] , B = (3, 8) olduğuna göre

A ∪ B kümesi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) [– 2, 8] B) [– 2, 8) C) (– 2, 8)
D) (– 2, 8] E) [5, 8)

5. A = [5, 10] olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi A' kümesine eşittir?

A) (−∞, 5] ∪ [10, ∞)

B) (5, 10)

C) (−∞, 5) ∪ (10, ∞)

D) (−∞, 5] ∪ (10, ∞)

E) (−∞, 5) ∪ [10, ∞)

6. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. Kapalı aralıkta uç noktaların ikisi de aralığa dâhildir.

II. Açık aralıkta uç noktaların ikisi de aralığa dâhil değildir.

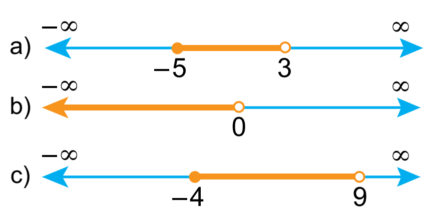
III. Yarı açık aralıkta uç noktalardan biri aralığa dâhildir.

IV. Bir x gerçek sayısı gittikçe büyüyen değerler alıyorsa bunu “∞” sembolü ile gösteririz.

V. Bir x gerçek sayısı gittikçe küçülen değerler alıyorsa bunu “– ∞” sembolü ile gösteririz.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. Aşağıda verilen sayı doğrularında kahverengi olarak gösterilen kısımları aralık olarak yazınız.



3.3.2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

Bilgi

Bir veya daha fazla değişken içeren iki niceliğin birbirine eşitliğinin gösterildiği matematiksel ifadelere **denklem** denir.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = 0$ biçiminde ifade edilebilen denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Denklemi sağlayan x değişkenine **denklemin kökü** denir. Köklerin kümesine denklemin **çözüm kümesi denir** ve ÇK ile gösterilir.

$ax + b = 0$ denkleminde;

1) $a \neq 0$ ise denklemin bir kökü vardır ve $ÇK = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ olur.

2) $a = b = 0$ ise x değişkenine hangi sayı verilirse verilsin denklemi sağlar ve $ÇK = \mathbb{R}$ olur.

3) $a = 0$, $b \neq 0$ ise $ÇK = \varnothing$ olur.

Örnek

$4x - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini doğal sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8$

$x = 2 \in \mathbb{N}$ olduğundan denklemin doğal sayılar kümesinde $ÇK = \{2\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$2x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini doğal sayılar kümesinde ve tam sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4$

$x = -2 \notin \mathbb{N}$ olduğundan denklemin doğal sayılar kümesinde $ÇK = \varnothing$, tam sayılar kümesinde $ÇK = \{-2\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$3x - 5 = 12$ denkleminin çözüm kümesini tam sayılar kümesinde ve gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$3x - 5 = 12$

$3x = 17$

$x = \frac{17}{3} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan denklemin tam sayılar kümesinde $ÇK = \varnothing$, gerçek sayılar kümesinde $ÇK = \left\{\frac{17}{3}\right\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$3(4x-1)-8=4\cdot(3x-2)-3$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}3(4x-1)-8&=4(3x-2)-3\\12x-3-8&=12x-8-3\\12x-11&=12x-11\\12x-12x&=11-11\\0&=0\end{aligned}$$

Verilen denklem, x'in her değeri için sağlandığından ÇK = $\mathbb{R}$ olarak elde edilir.

Örnek

$4x-3=2(2x+4)$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}4x-3&=4x+8\\4x-4x&=3+8\\0&=11\end{aligned}$$

Verilen denklem, x'in hiçbir değeri için sağlanmadığından ÇK = $\varnothing$ olarak elde edilir.

Örnek

$\dfrac{2x-8}{3x-12}=\dfrac{2}{3}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\frac{2x-8}{3x-12}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3(2x-8)=2(3x-12)$$

$$\begin{aligned}6x-24&=6x-24\\6x-6x&=24-24\\0&=0\end{aligned}$$

Çözümü incelediğimizde denklemin, x'in her değeri için sağlandığı görülmektedir. Ancak $x=4$ değeri paydayı sıfır yaptığı için çözüm kümesine dâhil edilmez.

Bu durumda ÇK = $\mathbb{R}-\{4\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$(m-7)x+2n+4=0$ denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ ise m ve n değerlerini bulalım.

Çözüm

$ax+b=0$ denkleminde $a=b=0$ ise ÇK = $\mathbb{R}$ olacağından

$(m-7)x+2n+4=0$ denkleminde ÇK = $\mathbb{R}$ olması için

$m-7=0$ ve $2n+4=0$

$m=7$ $\quad 2n=-4\Rightarrow n=-2$ olmalıdır.

Örnek

$3x - 11 = 2ax + 5$ denkleminin çözüm kümesi $\varnothing$ ise a'nın alacağı değeri bulalım.

Çözüm

$ax + b = 0$ denkleminde ÇK = $\varnothing$ ise $a = 0,\ b \neq 0$ olmalıdır.

$3x - 11 = 2ax + 5$

$3x - 2ax = 11 + 5$

$(3 - 2a)x - 16 = 0$ denkleminin ÇK = $\varnothing$ $\Rightarrow 3 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{3}{2}$ değerini alır.

Bilgi

Bir niceliğin diğer bir nicelikten küçük veya büyük olduğunu belirten ifadelere **eşitsizlik** denir.

Eşitsizlikler "$<$, $\leq$, $>$, $\geq$" sembolleri kullanılarak ifade edilir.

$a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ olmak üzere

$ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ biçimindeki eşitsizliklere

birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.

Örnek

$3 < 5$ eşitsizliğinin,

a) her iki yanına 7 ekleyelim.

b) her iki yanında 2 çıkaralım.

Çözüm

a) $3 < 5 \ \Rightarrow \ 3 + 7 < 5 + 7 \ \Rightarrow \ 10 < 12$

b) $3 < 5 \ \Rightarrow \ 3 - 2 < 5 - 2 \ \Rightarrow \ 1 < 3$ elde edilir.

Bilgi

Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı gerçek sayı eklenir veya her iki yanından aynı gerçek sayı çıkarılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$a < b \ \Leftrightarrow a + c < b + c$ ve $a - c < b - c$ olur.

Örnek

$4 < 7$ eşitsizliğinin her iki yanını,

a) 3 ile çarpalım.

b) -3 ile çarpalım.

Çözüm

a) $4 < 7 \ \Rightarrow \ 4 \cdot 3 < 7 \cdot 3 \ \Rightarrow \ 12 < 21$

b) $4 < 7 \ \Rightarrow 4 \cdot (-3) > 7 \cdot (-3) \ \Rightarrow \ -12 > -21$ elde edilir.

Bilgi

Bir eşitsizliğin her iki yanı pozitif bir gerçek sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizliğin yönü değişmez.

Bir eşitsizliğin her iki yanı negatif bir gerçek sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizliğin yönü değişir.

$\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$, c > 0 için $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ olur.

$\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$, c < 0 için $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ olur.

Örnek

$3 < 7$ ve $4 < 9$ eşitsizliklerini taraf tarafa toplayalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r} 3 < 7 \\ + \quad 4 < 9 \\ \hline \end{array}$$

$3 + 4 < 7 + 9 \Rightarrow 7 < 16$ elde edilir.

Bilgi

Eşitsizliklerin yönü aynı olmak koşuluyla iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

$\forall$ a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ için

$a < b$ ve $c < d \Rightarrow a + c < b + d$ olur.

Örnek

x, y $\in \mathbb{R}$ olmak üzere $2 < x < 5$ ve $1 < y < 4$ olduğuna göre $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ toplamının hangi aralıkta değerler alabileceğini bulalım.

Çözüm

$2 < x < 5 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

$1 < y < 4 \Rightarrow 1 > \frac{1}{y} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{y} < 1$ eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \\ + \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{y} < 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{(4)}{\frac{1}{5}} + \underset{(5)}{\frac{1}{4}} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \underset{(1)}{\frac{1}{2}} + \underset{(2)}{\frac{1}{1}} \Rightarrow \frac{4+5}{20} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1+2}{2}$$

$\frac{9}{20} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{3}{2}$ olarak bulunur.

Bilgi

a ile b aynı işaretli ve sıfırdan farklı iki gerçek sayı olmak üzere $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur.

Örnek

$3x - 7 < 5$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulup sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

$3x - 7 < 5 \Rightarrow 3x < 7 + 5 \Rightarrow 3x < 12 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow ÇK = (-\infty, 4)$ olur.

Şimdi bu kümeyi sayı doğrusunda gösterelim.

Örnek

$-6 \leq 5x + 9 < 24$ eşitsizliğinin çözüm kümesini doğal sayılar, tam sayılar ve gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$-6 \leq 5x + 9 < 24 \Rightarrow -6 - 9 < 5x < 24 - 9$

$$\frac{-15}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{15}{5} \Rightarrow -3 < x < 3 \text{ olarak elde edilir.}$$

Buna göre eşitsizliğin,

doğal sayılar kümesinde $ÇK = \{0, 1, 2\}$

tam sayılar kümesinde $ÇK = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

gerçek sayılar kümesinde $ÇK = (-3, 3)$ olarak bulunur.

Örnek

$-1 \leq 2x - 9 \leq 5$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$-1 \leq 2x - 9 \leq 5 \Rightarrow -1 + 9 \leq 2x \leq 5 + 9 \Rightarrow \frac{8}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{14}{2} \Rightarrow 4 \leq x \leq 7$ olur.

Bu durumda $ÇK = [4, 7]$ olarak elde edilir.

Örnek

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$-2 < x < 5$ ve $1 < y < 6$

olduğuna göre $3x + 2y$ toplamının hangi aralıkta değerler alabileceğini bulalım.

Çözüm

$-2 < x < 5 \Rightarrow 3 \cdot (-2) < 3 \cdot x < 3 \cdot 5 \Rightarrow -6 < 3x < 15$

$1 < y < 6 \Rightarrow 2 \cdot 1 < 2 \cdot y < 2 \cdot 6 \Rightarrow 2 < 2y < 12$ eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{rl} & -6 < 3x < 15 \\ + & \quad 2 < 2y < 12 \\ \hline & -4 < 3x + 2y < 27 \end{array}$$

elde edilir.

Örnek

$x, y \in \mathbb{R}$

$x + 2y - 12 = 0$ ve $-4 < x < 8$ olduğuna göre y'nin hangi aralıkta değerler alabileceğini bulalım.

Çözüm

$x + 2y - 12 = 0 \Rightarrow x = -2y + 12$ olur.

Bu değeri eşitsizlikte yerine yazarsak y'nin alacağı değer aralığı

$$-4 < -2y + 12 < 8 \Rightarrow -4 - 12 < -2y < 8 - 12$$

$$\Rightarrow \frac{-16}{-2} > \frac{-2y}{-2} > \frac{-4}{-2} \Rightarrow 8 > y > 2$$

$2 < y < 8$ olarak elde edilir.

Örnek

$x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$-5 < x < 7$ ve $2 < y < 10$

olduğuna göre $5x - 3y$ ifadesinin alacağı <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değerleri bulalım.

Çözüm

$5x - 3y$ ifadesinin alacağı en büyük değer için x'in en büyük, y'nin en küçük, değerini alması gerekir. Bu durumda $x, y \in \mathbb{Z}$ olduğu için;

x'in en büyük değeri 6, y'nin en küçük değeri 3 olacağından

$5x - 3y$ ifadesinin alacağı en büyük değer $5 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 30 - 9 = 21$ olur.

$5x - 3y$ ifadesinin alacağı en küçük değer için x'in en küçük, y'nin en büyük değerini alması gerekir.

Bu durumda $x, y \in \mathbb{Z}$ olduğu için

x'in en küçük değeri -4, y'nin en büyük değeri 9 olacağından

$5x - 3y$ ifadesinin alacağı en küçük değer $5(-4) - 3 \cdot 9 = -20 - 27 = -47$ olarak elde edilir.

Örnek

$-4 < x < 5$, $3 < y < 8$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \cdot y$ çarpımının hangi aralıkta değerler alabileceğini bulalım.

Çözüm

Bu tür sorularda eşitsizliklerin uç değerleri çarpılır.

Buna göre $-4 \cdot 3 = -12$, $-4 \cdot 8 = -32$, $5 \cdot 3 = 15$, $5 \cdot 8 = 40$ olduğundan $x \cdot y$ değeri bu değerlerden en büyüğü ile en küçüğü arasında değerler alacağından $x \cdot y$ ifadesi $(-32, 40)$ aralığında değerler alır.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$, $4 < x < 7$ olduğuna göre x^2nin hangi aralıkta değerler alabileceğini bulalım.

Çözüm

Eşitsizlikte her iki tarafın karesini aldığımızda $4 < x < 7 \Rightarrow 16 < x^2 < 49$ olacağından x^2, $(16, 49)$ aralığında değerler alır.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. $4x - 5 = 2(x - 7) + 8$

denkleminin çözüm kümesini tam sayılar kümesinde bulunuz.

2. $3(4x - 5) + 1 = 4(3x - 4) + 2$

denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

3. $\dfrac{x-4}{4} - \dfrac{x+2}{3} = -1$

olduğuna göre x değerini bulunuz.

4. $(2a - 8)x + 3b - 12 = 0$

denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ ise a + b toplamını bulunuz.

5. $3x - 9 = 0$ ve $4ax + 12 = 0$

denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise a değerini bulunuz.

6. $-2 \le \dfrac{4-2x}{5} < 4$

eşitsizliğinde x'in hangi aralıkta değerler alabileceğini bulunuz.

7. $x, y \in \mathbb{R}$ ve

$-1 < x < 6$

$-4 < y < 8$

olduğuna göre

a) $2x + 3y$

b) $3x - 2y$

ifadelerinin hangi aralıkta değerler alabileceğini bulunuz.

8. $(3m - 9)x + 5n - 7 = 3$ denklemi her x gerçek sayısı için sağlandığına göre m + n toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9. $x, y \in \mathbb{R}$ ve

$-11 < x < 11,$

$-13 < y < 15$

olduğuna göre $x \cdot y$'nin hangi aralıkta değerler alabileceğini bulunuz.

10. $x, y \in \mathbb{R}$ ve

$3x - y + 6 = 0$

$9 \le y \le 18$

olduğuna göre x'in hangi aralıkta değerler alabileceğini bulunuz.

11. $x \in \mathbb{R}$ ve $1 < x < 4$

olduğuna göre x^2 ifadesinin hangi aralıkta değerler alabileceğini bulunuz.

12. $x \in \mathbb{R}$ ve $-1 < x < 7$

olduğuna göre $4x - 3$ ifadesinin alacağı tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 277 B) 278 C) 279 D) 280 E) 281

13. $3x - 4 \le 17$ eşitsizliğini sağlayan en büyük üç tam sayının toplamı kaçtır?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

14. a ve b birer doğal sayı olmak üzere

$a + b < 6$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı (a, b) ikilisi yazılabilir?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

15. $ax + 7x - 5 = x + 3$ denkleminin çözüm kümesi $\{1\}$ ise a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.3.3. Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

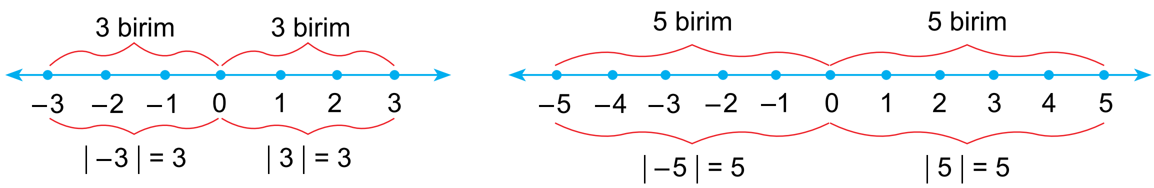
Bilgi

Sayı doğrusu üzerinde bir x gerçek sayısının sıfır noktasına (orijin veya başlangıç noktasına) olan uzaklığına bu sayının **mutlak değeri** denir ve $|x|$ ile gösterilir.

Örnek

$-5, -3, 3$ ve 5 sayılarının sayı doğrusunda başlangıç noktasına olan uzaklıklarını bulalım.

Çözüm



Bilgi

$$x \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olur.}$$

Örnek

Aşağıda mutlak değer içinde verilen sayıları mutlak değer dışına çıkaralım.

a) $|9|$

b) $|-7|$

c) $|\sqrt{5} - 3|$

ç) $|\sqrt{5} - 2|$

d) $a < b \Rightarrow |a - b|$

Çözüm

a) $|9| = 9$

b) $|-7| = -(-7) = 7$

c) $\sqrt{5} < 3$ olduğundan $|\sqrt{5} - 3| = -\sqrt{5} + 3$ olur.

ç) $\sqrt{5} > 2$ olduğundan $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$ olur.

d) $a < b \Rightarrow a - b < 0$ olduğundan $|a - b| = -a + b$ olur.

Örnek

$x < 4$ olduğuna göre $|x - 4|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$x < 4 \Rightarrow x - 4 < 4 - 4 \Rightarrow x - 4 < 0$ olacağından $|x - 4| = -x + 4$ olur.

Örnek

$a < 0$ olduğuna göre $|a| + |-2a| + |3a|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$a < 0 \Rightarrow -2a > 0$ ve $3a < 0$ olur. Bu durumda

$|a| + |-2a| + |3a| = -a + (-2a) - 3a = -6a$ olur.

Örnek

$2 < x < 3$ olduğuna göre $|x - 2| + |x - 3|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$2 < x \Rightarrow 2 - 2 < x - 2 \Rightarrow 0 < x - 2$ ve

$x < 3 \Rightarrow x - 3 < 3 - 3 \Rightarrow x - 3 < 0$ olacağından

$|x - 2| + |x - 3| = x - 2 + (-x + 3) = x - 2 - x + 3 = 1$ olarak bulunur.

Örnek

$a < b < c$ olmak üzere $|a - b| + |b - c| + |c - a|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$a < b \Rightarrow a - b < 0,$

$b < c \Rightarrow b - c < 0,$

$a < c \Rightarrow c - a > 0$ olacağından

$|a - b| + |b - c| + |c - a| = -a + \cancel{b} - \cancel{b} + c + c - a$

$= 2c - 2a$ olarak elde edilir.

Örnek

$-5, 0, \frac{4}{5}$ ve $\frac{6}{7}$ sayılarının mutlak değerini bulalım. Bulduğumuz değerleri “0” ile karşılaştıralım.

Çözüm

$|-5| = 5 > 0$, $|0| = 0$, $\left|\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5} > 0$, $\left|\frac{6}{7}\right| = \frac{6}{7} > 0$

Bilgi

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0$'dır.

Örnek

$|3x-21|$ ifadesinin en küçük değeri için x'in alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

Mutlak değerli ifadenin alacağı en küçük değer sıfırdır.

Bu durumda $|3x-21|=0 \Rightarrow 3x-21=0 \Rightarrow 3x=21 \Rightarrow x=7$ olarak bulunur.

Örnek

$$|a-3|+|2b-6|+|3c-7|=0$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c değerlerini bulalım.

Çözüm

Mutlak değerli ifadeler negatif olamayacağından, eşitliğin sağlanabilmesi için her bir mutlak değerli ifadenin sıfıra eşit olması gerekir.

Bu durumda

$|a-3|=0$ $a-3=0$ $a=3$

$|2b-6|=0$ $2b-6=0$ $2b=6$ $b=3$

$|3c-7|=0$ $3c-7=0$ $3c=7$ $c=\frac{7}{3}$ olarak elde edilir.

Örnek

$|x|=5$ eşitliğinde x'in alacağı değerleri bulalım.

Çözüm

Başlangıç noktasına uzaklığı 5 birim olan iki sayı –5 ve 5 olduğundan $x=5$ veya $x=-5$ elde edilir.

Bilgi

$\forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$|x|=a \Rightarrow x=a$ veya $x=-a$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen eşitliklerde x'in alacağı değerleri bulalım.

a) $|x-7|=11$ b) $|2x-5|=9$

Çözüm

a) $|x-7|=11 \Rightarrow x-7=11$, $x=18$ veya $x-7=-11$, $x=-4$

b) $|2x-5|=9 \Rightarrow 2x-5=9$, $2x=14$, $x=7$ veya $2x-5=-9$, $2x=-4$, $x=-2$ olarak elde edilir.

Mutlak Değerin Özellikleri

Bilgi

$x, y \in \mathbb{R}$, $n \in Z$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

1) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

2) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ veya $x \le -a$

3) $a \le |x| \le b \Leftrightarrow a \le x \le b$ veya $-b \le x \le -a$

4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

5) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $(y \ne 0)$

6) $|x| = |-x|$

7) $|x^n| = |x|^n$

8) $|x + y| \le |x| + |y|$

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2x - 1| \le 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|2x - 1| \le 5 \Rightarrow -5 \le 2x - 1 \le 5$

$-5 + 1 \le 2x \le 5 + 1$

$-4 \le 2x \le 6$

$-2 \le x \le 3$ olacağından

ÇK = $[-2, 3]$ olarak elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x - 1| \le 2$ ve $|y + 2| \le 4$

olduğuna göre $x + y$ ifadesinin hangi aralıkta değerler alabileceğini bulalım.

Çözüm

$|x - 1| \le 2 \Rightarrow -2 \le x - 1 \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 3$

$|y + 2| \le 4 \Rightarrow -4 \le y + 2 \le 4 \Rightarrow -6 \le y \le 2$ olur.

Şimdi eşitsizlikleri taraf tarafa toplayarak $x + y$ ifadesinin hangi aralıkta değerler alabileceğini bulalım.

$$\begin{array}{rl} & -1 \le x \le 3 \\ + & -6 \le y \le 2 \\ \hline & -7 \le x + y \le 5 \end{array}$$

$-7 \le x + y \le 5$ olarak elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2x - 8| \geq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulup sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

$$|2x-8| \geq 4 \Rightarrow 2x - 8 \geq 4 \quad \text{veya} \quad 2x - 8 \leq -4$$

$$2x \geq 8 + 4 \qquad 2x \leq 8 - 4$$

$$2x \geq 12 \qquad 2x \leq 4$$

$$x \geq 6 \qquad x \leq 2$$

Bu durumda eşitsizliğin $\text{ÇK} = (-\infty, 2] \cup [6, \infty)$ olarak elde edilir.

Çözüm kümesini sayı doğrusunda

biçiminde gösteririz.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2 < |3x - 1| \leq 8$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$2 < |3x-1| \leq 8 \Rightarrow 2 < 3x - 1 \leq 8 \quad \text{veya} \quad -8 \leq 3x - 1 < -2$$

$$3 < 3x \leq 9 \qquad -7 \leq 3x < -1$$

$$1 < x \leq 3 \qquad \frac{-7}{3} \leq x < \frac{-1}{3} \text{ olur.}$$

Bu durumda eşitsizliğin $\text{ÇK} = \left[-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, 3]$ olarak bulunur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\left|\frac{8}{x-3}\right| \geq 4$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

$$\left|\frac{8}{x-3}\right| \geq 4 \Rightarrow \frac{|8|}{|x-3|} \geq 4 \Rightarrow 8 \geq 4 \cdot |x-3|$$

$$2 \geq |x-3|$$

$$|x-3| \leq 2$$

$$-2 \leq x - 3 \leq 2$$

$$-2 + 3 \leq x \leq 2 + 3$$

$$1 \leq x \leq 5$$

Bu aralıktaki tam sayılar 1, 2, 3, 4 ve 5'tir. Ancak x = 3 değeri paydayı sıfır yaptığı için çözüm kümesine dâhil edilmez. Bu durumda x'in alacağı tam sayı değerleri 1, 2, 4 ve 5 olacağından bu değerlerin toplamı, 1 + 2 + 4 + 5 = 12 olarak elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|4x - 16| = 8$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|4x - 16| = 8 \Rightarrow |4(x-4)| = 8$$
$$|4| \cdot |x - 4| = 8$$
$$|x - 4| = 2$$
$$x - 4 = 2 \quad \text{veya} \quad x - 4 = -2$$
$$x = 6 \qquad\qquad x = 2$$

olduğundan denklemin ÇK = $\{2, 6\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|3 - 2x| + |2x - 3| = 8$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|3 - 2x| = |-(2x - 3)| = |2x - 3|$ olduğundan

$$|3 - 2x| + |2x - 3| = 8$$
$$|2x - 3| + |2x - 3| = 8$$
$$2 \cdot |2x - 3| = 8$$
$$|2x - 3| = 4$$
$$2x - 3 = 4 \quad \text{veya} \quad 2x - 3 = -4$$
$$2x = 7 \qquad\qquad 2x = -1$$
$$x = \frac{7}{2} \qquad\qquad x = -\frac{1}{2}$$

olduğundan denklemin ÇK = $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x^2 - 6x + 9| = 16$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|x^2 - 6x + 9| = |(x - 3)^2| = |x - 3|^2$ olacağından

$$|x^2 - 6x + 9| = 16 \Rightarrow |x - 3|^2 = 16$$

$|x - 3| = 4$ veya $|x - 3| = -4$ bulunur.

Mutlak değerli ifade negatif olamayacağından $|x - 3| = -4$ denkleminin ÇK = $\varnothing$ olur.

$$|x - 3| = 4 \Rightarrow x - 3 = 4 \quad \text{veya} \quad x - 3 = -4$$
$$x = 7 \qquad\qquad x = -1$$ bulunur.

Bu durumda denklemin ÇK = $\{-1, 7\}$ olarak elde edilir.

Örnek

a ve b sıfırdan farklı birer gerçek sayı olduğuna göre $\dfrac{|a+b|}{|a|+|b|}$ ifadesinin alacağı <u>en büyük</u> değeri bulalım.

Çözüm

$|a+b| \leq |a| + |b|$ olduğundan $\dfrac{|a+b|}{|a|+|b|} \leq \dfrac{|a|+|b|}{|a|+|b|} = 1$ bulunur.

Bu durumda verilen ifadenin alacağı en büyük değer 1 olarak elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $||x-3|-2| = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$||x-3|-2| = 4 \Rightarrow |x-3|-2 = 4$ veya $|x-3|-2 = -4$

$|x-3| = 6$ $\qquad$ $|x-3| = -2$

$x-3 = 6$ veya $x-3 = -6$ $\qquad$ ÇK = $\varnothing$

$x = 9$ $\qquad$ $x = -3$

olduğundan denklemin ÇK = $\{-3, 9\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|3x-7| = 2x-1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|3x-7| = 2x-1 \Rightarrow 3x-7 = 2x-1$ veya $3x-7 = 1-2x$

$x = 6$ $\qquad$ $5x = 8$

$x = \dfrac{8}{5}$ bulunur.

Hem mutlak değer içinde hem de mutlak değer dışında değişken bulunan ifadelerde, değişkenin alacağı değerler ifadede değişkenin yerine yazılarak ifadeyi sağlayıp sağlamadığına bakılır, ifadeyi sağlamayan değerler çözüm kümesine dâhil edilmez.

Bu durumda $x = 6$ için $|3x-7| = 2x-1$

$|3 \cdot 6 - 7| = 2 \cdot 6 - 1$

$11 = 11$ sağlar.

$x = \dfrac{8}{5}$ için $\left|3 \cdot \dfrac{8}{5} - 7\right| = 2 \cdot \dfrac{8}{5} - 1$

$\left|\dfrac{24}{5} - 7\right| = \dfrac{16}{5} - 1$

$\dfrac{11}{5} = \dfrac{11}{5}$ sağlar.

Bulunan bu iki değer de ifadeyi sağladığından denklemin ÇK = $\left\{\dfrac{8}{5}, 6\right\}$ olarak bulunur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x+2| = 3x+2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|x+2| = 3x+2 \Rightarrow x+2 = 3x+2 \quad \text{veya} \quad x+2 = -3x-2$$

$$2x = 0 \qquad\qquad 4x = -4$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = -1 \text{ bulunur.}$$

Bulduğumuz bu değerlerin denklemi sağlayıp sağlamadığına bakalım.

$x = 0$ için $|0+2| = 3 \cdot 0 + 2$

$2 = 2$ olduğundan 0 denklemi sağlar.

$x = -1$ için $|-1+2| = 3 \cdot (-1) + 2$

$1 = -1$ olduğundan -1 denklemi sağlamaz.

Bu durumda denklemin $ÇK = \{0\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$A = |x-3| + |2x-8|$ olduğuna göre A'nın alacağı en küçük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ için $A = |3-3| + |2 \cdot 3 - 8|$

$= 0 + |-2| = 2$

$2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$ için $A = |4-3| + |2 \cdot 4 - 8|$

$= |1| + 0 = 1$ olduğundan

A'nın alacağı en küçük tam sayı değeri 1 olarak bulunur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|3x-5| = 5-3x$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$-(3x-5) = 5-3x$ olduğundan (Mutlak değerin içi -1 ile çarpılarak mutlak değer dışına çıkarılmıştır.)

$|3x-5| = 5-3x$ denkleminde $3x - 5 \leq 0$ olmalıdır.

Bu durumda

$$3x - 5 \leq 0$$

$$3x \leq 5$$

$$x \leq \frac{5}{3} \text{ olur.}$$

Denklemin $ÇK = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıda verilen mutlak değerli ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a) $|\sqrt{7} - 3|$

b) $|\sqrt{7} - 4|$

c) $|x^2 + 2|$

ç) $|1 - \sqrt{5}|$

d) $|\sqrt{17} - 7| + |\sqrt{17} + 9|$

2. Aşağıda verilen mutlak değerli ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a) $3 < x < 4 \Rightarrow |x - 3| + |x - 4|$

b) $x < y < z \Rightarrow |x - y| + |y - z| - |x - z|$

c) $x < y < 0 \Rightarrow \dfrac{|-2x|}{x} + \dfrac{|3y|}{y} - \dfrac{|6y|}{y}$

3. $A = |3x - 5| + |x - 7| + |2x - 11|$

olduğuna göre x = 3 için A'nın alacağı değeri bulunuz.

4. Aşağıda verilen mutlak değerli ifadelerin alacağı en küçük değerleri bulunuz.

a) $|x - 7|$

b) $|x - 3| + |x - 5|$

c) $|2x - 4| + |3x - 9|$

ç) $|5x + 11| + |4x - 10|$

5. Sayı doğrusunda 3x – 1 ve 11 sayıları arasındaki uzaklık 12 birim olduğuna göre x'in alabileceği değerleri bulunuz.

6. $|11x - 22| + |3y + 9| = 0$

olduğuna göre x + y toplamını bulunuz.

7. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $||x - 5| - 3| = 7$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

8. Aşağıdaki ifadelerin çözüm kümelerini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

a) $|3x - 4| < 4$

b) $2|x| + 3 \leq 5$

c) $3|x| + 4 > 5$

ç) $|2x - 6| = 12$

d) $|2x - 3| + x = 4$

e) $|7x - 1| + 6 = 20$

f) $|x^2 - 8x + 16| = 0$

g) $|x - 11| = 11 - x$

9. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\left|\dfrac{10}{x - 4}\right| \geq 5$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

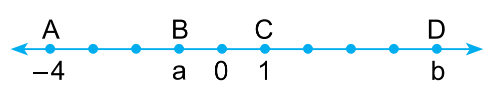
10. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|3x - 3| + |7x - 7| = 10$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

11. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x^2 - 25| - |x - 5| = 0$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

12.



Yukarıdaki sayı doğrusunda verilenlere göre $|AB| + |CD|$ ifadesi aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?

A) $|a + 4| + |b - 1|$

B) $|a + b - 4|$

C) $|a - 4| + |b + 1|$

D) $|a + b + 1|$

E) $|a + b| + 3$

3.3.4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlik Sistemlerinin Çözüm Kümeleri

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere

$ax + by + c = 0$ biçimindeki ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

Denklemi sağlayan (x, y) ikililerinin kümesine **denklemin çözüm kümesi** denir.

Örnek

$$2x - y - 4 = 0$$

denklemini sağlayan (x, y) ikililerinden bazılarını bulalım.

Çözüm

$2x - y - 4 = 0$ denklemi birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemdir.

Bu denklemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

Bu sonsuz elemanların birkaçını bulmaya çalışalım.

$x = 0$ için $2 \cdot 0 - y - 4 = 0 \Rightarrow -y - 4 = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (0, -4)$

$x = 1$ için $2 \cdot 1 - y - 4 = 0 \Rightarrow 2 - y - 4 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (1, -2)$ bulunur.

Örnek

$$3x - y - 3 = 0$$

denkleminin grafiğini analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin grafikleri, analitik düzlemde bir doğru belirtir. Bir doğrunun çizilebilmesi için iki nokta yeterlidir. Bu durumda grafiği çizmek için denklemi sağlayan iki nokta bulalım.

$3x - y - 3 = 0$ denkleminde

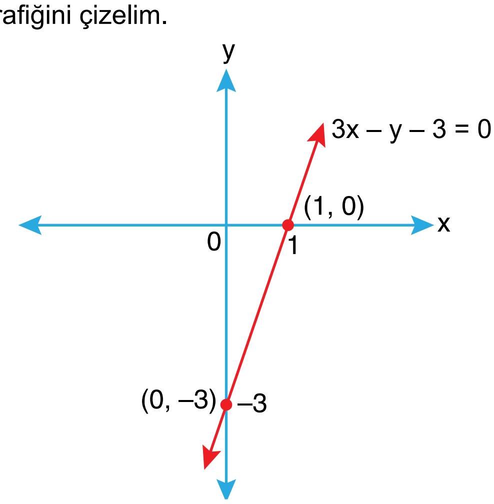
$x = 0$ için

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot 0 - y - 3 &= 0 \\ -y - 3 &= 0 \\ y &= -3 \end{aligned}\right\} (0, -3)$$

$y = 0$ için

$$\left.\begin{aligned} 3x - 0 - 3 &= 0 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}\right\} (1, 0)$$

Şimdi noktaları analitik düzlemde gösterip denklemin grafiğini çizelim.



Bilgi

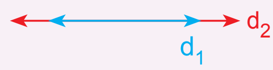
$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $e \neq 0$, olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} d_1 : ax + by + c = 0 \\ d_2 : dx + ey + f = 0 \end{array}\right\}$$ sistemine birinci dereceden **iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

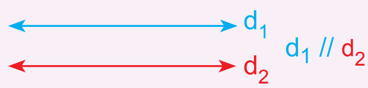
Bu iki denklemi aynı anda sağlayan (x, y) sıralı ikilileri varsa bu sıralı ikililerinin oluşturduğu küme, bu denklem sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

Verilen denklem sisteminde,

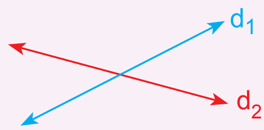
1) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise doğrular çakışıktır ve sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.



2) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ ise doğrular paraleldir ve sistemin çözüm kümesi boş kümedir.



3) $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise doğrular bir noktada kesişirler ve sistemin çözüm kümesi bir elemanlıdır.



Denklem sisteminin çözüm kümesini bulmak için yerine koyma, yok etme ve grafikle çözüm gibi yöntemler kullanılır.

Örnek

$$\left.\begin{array}{r} (3 - a)x + 4y - 6 = 0 \\ 8x + 2by + 3 = 0 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise a ve b değerlerini bulalım.

Çözüm

Sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise $\frac{3-a}{8} = \frac{4}{2b} = \frac{-6}{3}$ eşitliği sağlanmalıdır.

$\frac{3-a}{8} = \frac{-6}{3} \Rightarrow 9 - 3a = -48 \Rightarrow 3a = 57 \Rightarrow a = 19$

$\frac{4}{2b} = \frac{-6}{3} \Rightarrow 12 = -12b \Rightarrow b = -1$ olarak elde edilir.

Örnek

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y = 7 \\ 3mx + 6y = 1 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme ise m değerini bulalım.

Çözüm

Sistemin çözüm kümesi boş küme ise $\frac{3}{3m} = \frac{3}{6}$ eşitliği sağlanmalıdır.

Bu durumda $\frac{3}{3m} = \frac{3}{6} \Rightarrow 18 = 9m \Rightarrow m = 2$ olarak elde edilir.

Örnek

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 11 \\ x - 3y = 9 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme yöntemi ile bulalım.

Yok etme yönteminde verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerden birinin katsayısı mutlak değerce eşit ve ters işaretli olacak biçimde eşitlenir. Daha sonra denklemler taraf tarafa toplanarak değişken yok edilir ve bir bilinmeyenli denklem elde edilir. Bu denklemdeki değişkenin değeri bulunur.

Bulunan bu değer, denklemlerden birinde yerine yazılarak diğer değişkenin değeri bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} 1/\ 3x - y = 11 \\ -3/\ x - 3y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \cancel{3x} - y = 11 \\ + \quad -\cancel{3x} + 9y = -27 \\ \hline 8y = -16 \end{array} \Rightarrow y = -2 \text{ bulunur.}$$

Bulduğumuz bu y değerini denklemlerden birinde yerine yazalım.

$$3x - (-2) = 11$$
$$3x + 2 = 11$$
$$3x = 9$$
$$x = 3 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda denklem sisteminin ÇK $= \{(3, -2)\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 5 \\ 3x + 2y = 10 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Denklem sisteminin çözüm kümesini yerine koyma yöntemi ile bulalım.

Yerine koyma yönteminde sistemi oluşturan denklemlerden birinde, bilinmeyenlerden biri yalnız bırakılır. Bu değer diğer denklemde yerine yazılır. Elde edilen bir bilinmeyenli denklem çözülerek değişkenin değeri bulunur. Bulduğumuz bu değer denklemlerden birinde yerine yazılarak diğer değişkenin değeri bulunur.

$x - y = 5 \Rightarrow x = y + 5$ bulduğumuz bu değeri diğer denklemde yerine yazalım.

$$3(y + 5) + 2y = 10 \Rightarrow 3y + 15 + 2y = 10$$
$$5y = -5$$
$$y = -1 \text{ bulunur.}$$

Bu değeri denklemlerden birinde yerine yazalım.

$x - (-1) = 5 \Rightarrow x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4$ bulunur.

Bu durumda denklem sisteminin ÇK $= \{(4, -1)\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 12 \\ -x + 2y = 3 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Çözümü yok etme yöntemi ile yapalım.

Denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$\begin{array}{rl} & x + 3y = 12 \\ + & -x + 2y = 3 \\ \hline & 5y = 15 \Rightarrow y = 3 \text{ olur.} \end{array}$$

Bulduğumuz bu değeri denklemlerin birinde yerine yazalım.

$x + 3 \cdot 3 = 12$

$\Rightarrow x = 3$ olur.

Bu durumda denklem sisteminin ÇK = {(3, 3)} olarak elde edilir.

Örnek

$\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 3x - 2y = 6 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

İşlemi yerine koyma yöntemi ile bulalım.

$x + y = 7$ denkleminde $x = 7 - y$ değerini diğer denklemde yerine yazalım.

$3 \cdot (7 - y) - 2y = 6$

$\Rightarrow 21 - 3y - 2y = 6$

$\Rightarrow 15 = 5y \Rightarrow y = 3$ olur.

Bu durumda denklem sisteminin ÇK = {(4, 3)} olarak elde edilir.

Örnek

$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 25 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{r} 2/\ 4x - 3y = 5 \\ 3/\ 3x + 2y = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl} & 8x - 6y = 10 \\ + & 9x + 6y = 75 \\ \hline & 17x = 85 \Rightarrow \end{array}$$

$x = 5$ değerini denklemlerden birinde yerine koyalım.

$4 \cdot 5 + 3y = 5$

$3y = -15 \Rightarrow y = -5$

Bu durumda denklem sisteminin ÇK = {(5, – 5)} olarak elde edilir.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} 2y - x &= 4 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini grafik yardımıyla bulalım.

Çözüm:

$2y - x = 4$ denkleminde

$$\left.\begin{aligned} &x = 0 \text{ için} \\ &2y - 0 = 4 \\ &y = 2 \end{aligned}\right\} (0, 2)$$

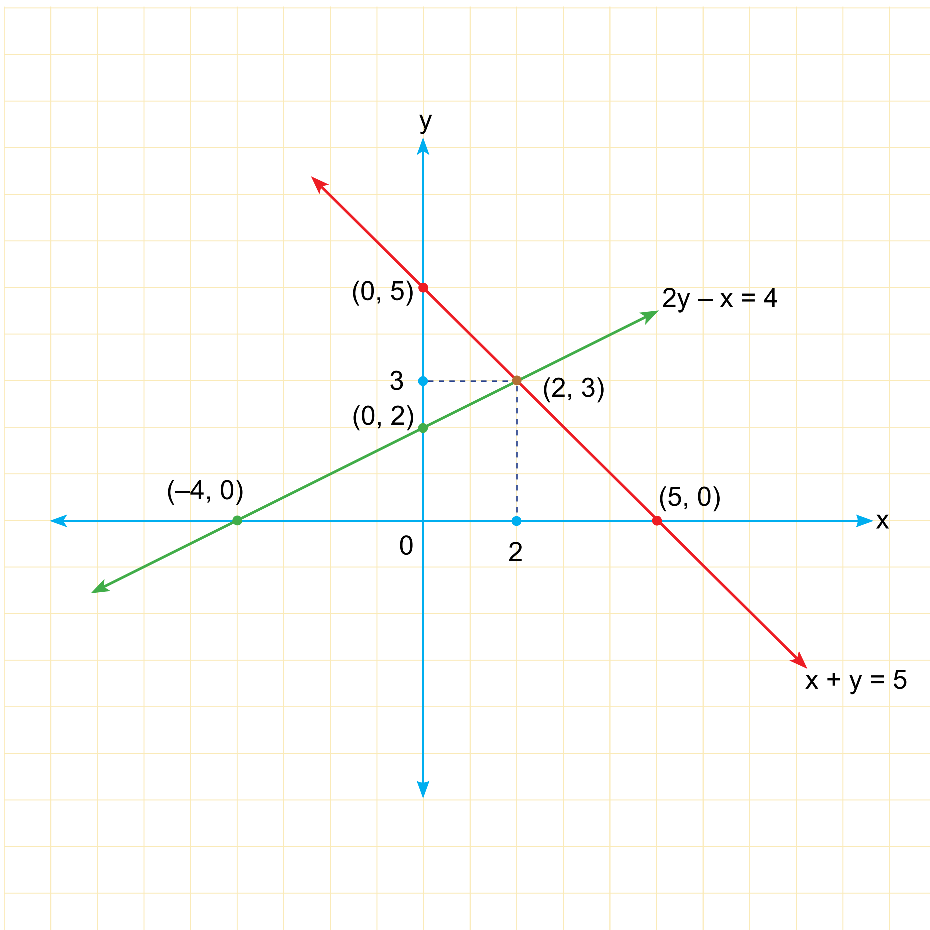
$$\left.\begin{aligned} &y = 0 \text{ için} \\ &2 \cdot 0 - x = 4 \\ &x = -4 \end{aligned}\right\} (-4, 0)$$

$x + y = 5$ denkleminde

$$\left.\begin{aligned} &x = 0 \text{ için} \\ &0 + y = 5 \\ &y = 5 \end{aligned}\right\} (0, 5)$$

$$\left.\begin{aligned} &y = 0 \text{ için} \\ &x + 0 = 5 \\ &x = 5 \end{aligned}\right\} (5, 0)$$

Bulduğumuz noktaları aynı analitik düzlemde gösterip denklemlerin grafiklerini çizelim.



Grafik incelendiğinde denklem sisteminin ÇK = $\{(2, 3)\}$ olduğu görülür.

Örnek

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 9 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulup koordinat düzleminde gösterelim.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{r} -3/\; x + y = 4 \\ 3x + 3y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} -\cancel{3x} - \cancel{3y} = -12 \\ + \quad \cancel{3x} + \cancel{3y} = 9 \\ \hline 0 = -3 \end{array}$$

olduğundan denklem sisteminin ÇK = ∅ olur.

Şimdi denklemlerin grafiklerini çizelim.

$x + y = 4$ denkleminde

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ için} \\ 0 + y = 4 \\ y = 4 \end{array}\right\} (0, 4)$$

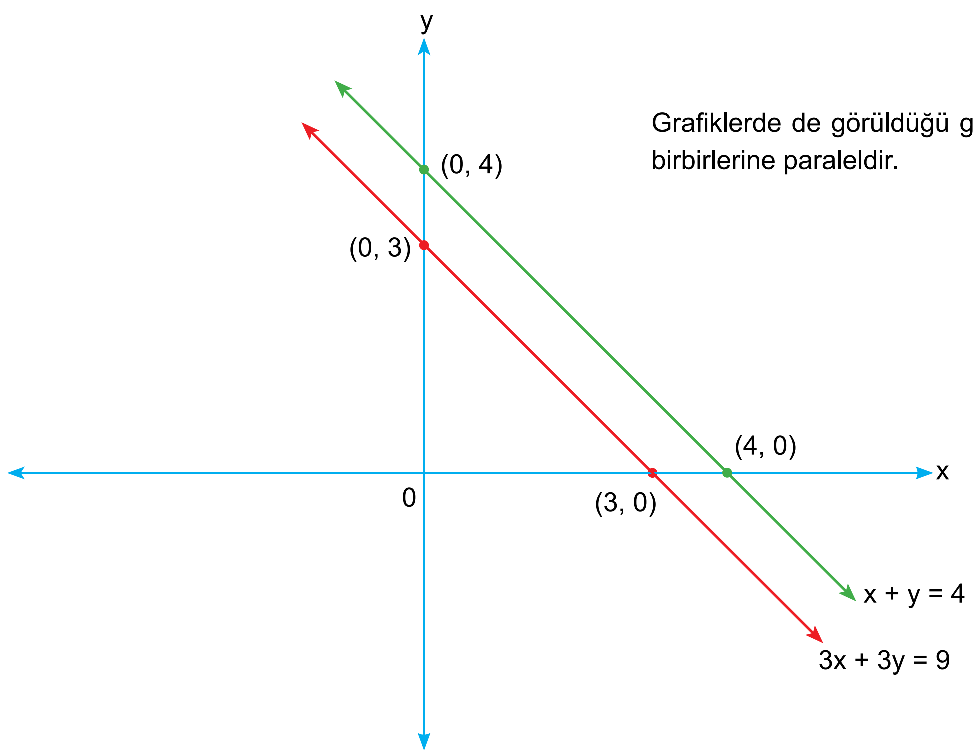
$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \text{ için} \\ x + 0 = 4 \\ x = 4 \end{array}\right\} (4, 0)$$

$3x + 3y = 9$ denkleminde

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ için} \\ 3 \cdot 0 + 3y = 9 \\ y = 3 \end{array}\right\} (0, 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \text{ için} \\ 3 \cdot x + 3 \cdot 0 = 9 \\ x = 3 \end{array}\right\} (3, 0)$$

Bulduğumuz noktaları aynı analitik düzlemde gösterip denklemlerin grafiklerini çizelim.



Grafiklerde de görüldüğü gibi doğrular birbirlerine paraleldir.

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere

$ax + by + c < 0$, $ax + by + c > 0$

$ax + by + c \leq 0$, $ax + by + c \geq 0$

ifadelerinin her birine **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

Değişkenleri aynı olan birinci dereceden en az iki eşitsizlikten oluşan ifadeye **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemi** denir.

Örnek

$x + 3y \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösterelim.

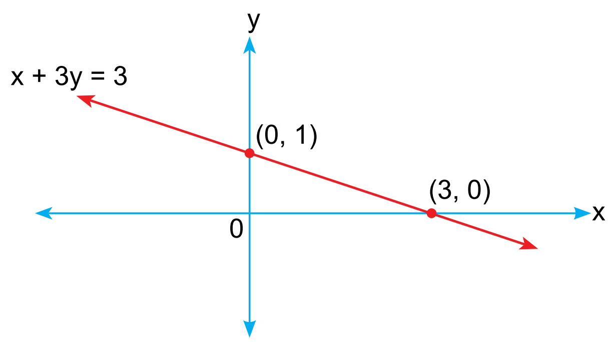
Çözüm

Önce $x + 3y = 3$ doğrusunun grafiğini çizelim.

$x + 3y = 3$ denkleminde

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \text{ için} \\ 0 + 3y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} (0, 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \text{ için} \\ x + 3 \cdot 0 = 3 \\ x = 3 \end{array}\right\} (3, 0)$$



Eşitsizliklerin grafiği analitik düzlemde taranarak belirtilir.

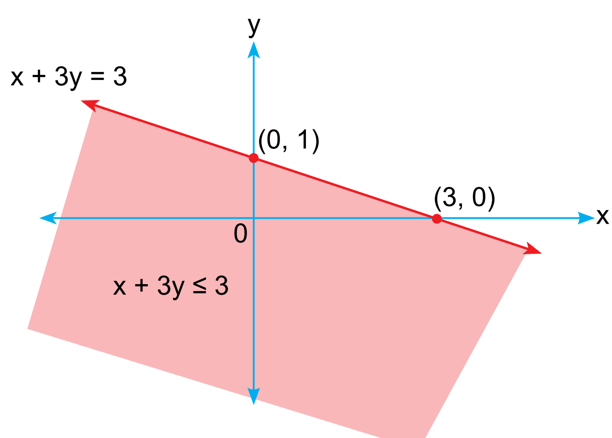
Çizilen doğru analitik düzlemi iki bölgeye ayırmıştır. Hangi bölgeyi tarayacağımıza karar vermek için doğrunun analitik düzlemde ayırdığı bölgelerin birinde bir nokta seçilir. Seçilen nokta, verilen eşitsizlikte yerine yazılır. Eğer eşitsizlik sağlanıyor ise bu noktanın bulunduğu bölge, sağlanmıyor ise noktanın bulunmadığı bölge taranır.

Eşitsizlikte "≤, ≥" sembollerinden biri varsa doğru düz çizilir. "<, >" sembollerinden biri varsa doğru kesikli çizgilerle çizilir.

Düz çizgi, doğru üzerindeki noktaların çözüm kümesine ait olduğunu, kesikli çizgi ise doğru üzerindeki noktaların çözüm kümesine ait olmadığını gösterir.

(0, 0) noktasını alalım.

$0 + 3 \cdot 0 \leq 3 \;\Rightarrow\; 0 \leq 3$ olduğundan (0, 0) noktasının bulunduğu bölgeyi tarayacağız.



Örnek

$x - y > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm

Önce $x - y = 2$ doğrusunun grafiğini çizelim.

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ için} \\ 0 - y = 2 \\ y = -2 \end{array}\right\}(0, -2)$ $\left.\begin{array}{l} y = 0 \text{ için} \\ x - 0 = 2 \\ x = 2 \end{array}\right\}(2, 0)$

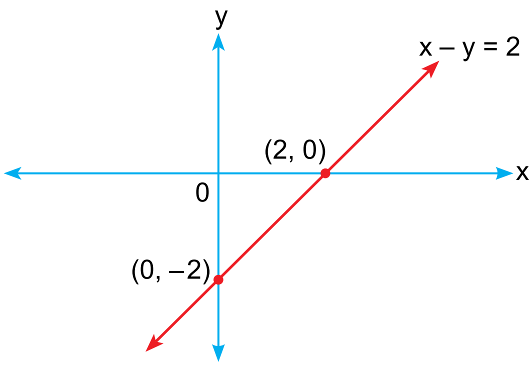
$x - y > 2$

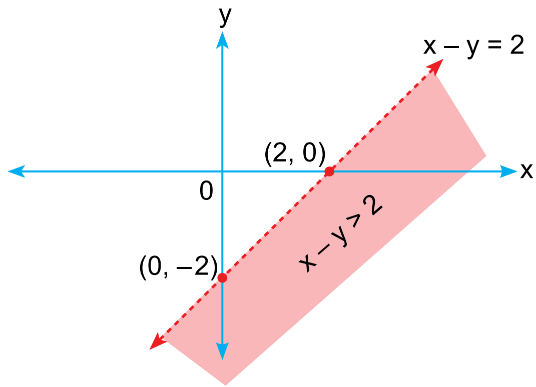
Analitik düzlemde (0, 0) noktasını alalım.

Buna göre

$0 - 0 > 2$ yanlış olduğundan (0, 0) noktasının bulunmadığı bölgeyi tarayacağız.

Doğrunun grafiğini de kesik kesik çizeceğiz.





Örnek

$\left.\begin{array}{l} 3x - y \le 6 \\ x + y \ge 4 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Eşitizlik sisteminin çözüm kümesi bulunurken her iki eşitsizliğin de çözüm kümeleri bulunur. Bu çözüm kümeleri aynı analitik düzlemde gösterilir. İki çözüm kümesinin kesişimi, eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

$3x - y \le 6$

x	0	2
y	– 6	0

(0, 0) için

$3 \cdot 0 - 0 \le 6$

$0 \le 6$ doğru

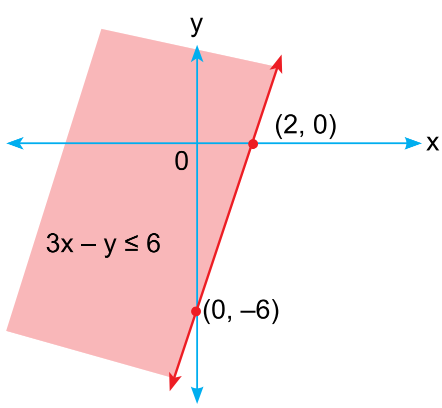
$x + y \ge 4$

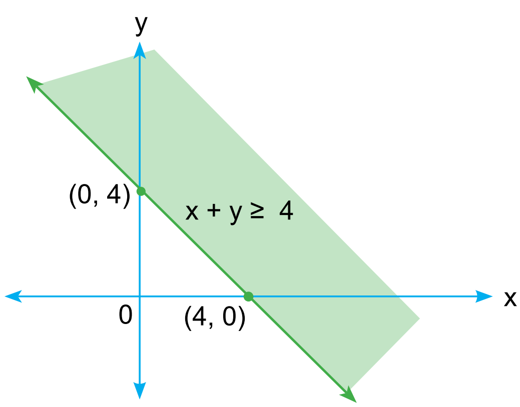
x	0	4
y	4	0

(0, 0) için

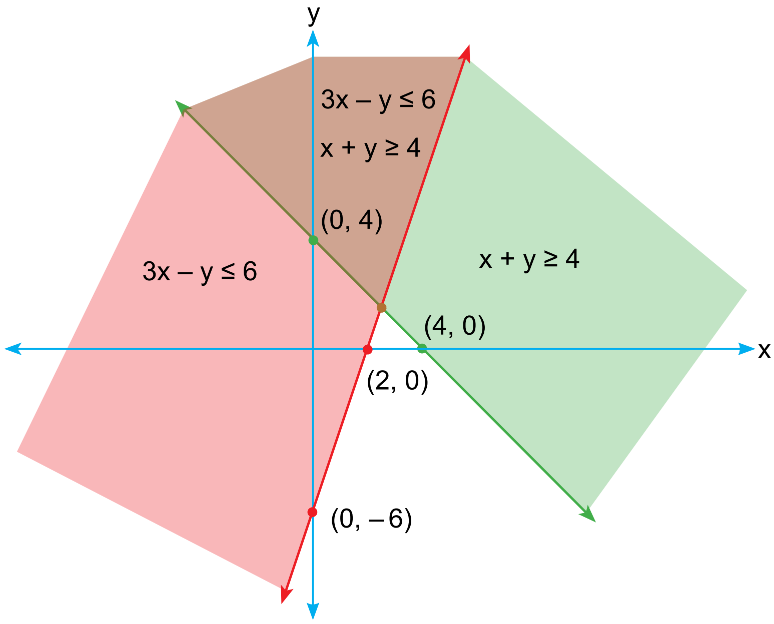
$0 + 0 \ge 4$

$0 \ge 4$ yanlış





Şimdi bu iki grafiği aynı analitik düzlemde gösterelim.



Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, her iki doğru ile iki rengin kesişimi olan bölgedir.

Örnek

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y < 4 \\ 4x - 2y \geq 12 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$2x - y < 4$

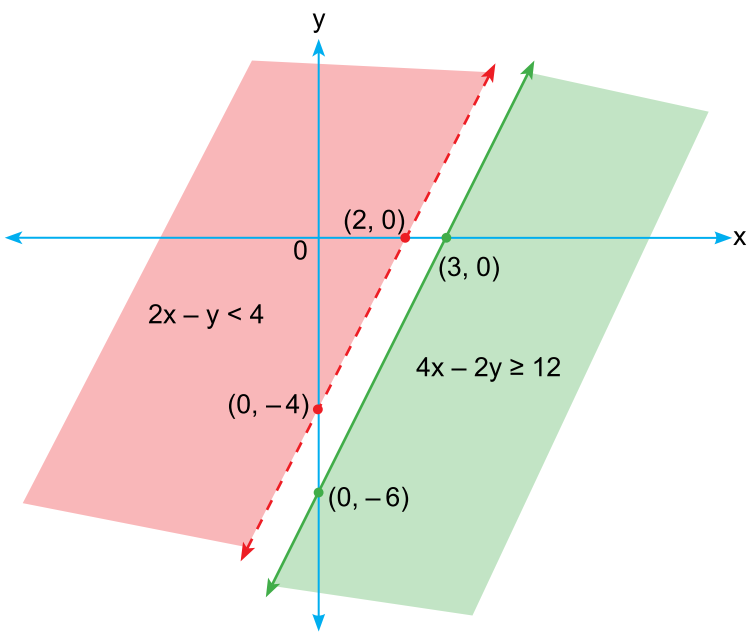
x	0	2
y	– 4	0

(0, 0) için
$2 \cdot 0 - 0 < 4$
$0 < 4$ doğru

$4x - 2y \geq 12$

x	0	3
y	– 6	0

(0, 0) için
$4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \geq 12$
$0 \geq 12$ yanlış



Her iki eşitsizliğin belirttiği ortak bölge bulunmadığı için eşitsizlik sisteminin ÇK = ∅ olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. $3x - 2y = 12$ denklemini aşağıdaki noktalardan hangisi sağlar?

A) (6, 3) B) (3, 6) C) (3, 3) D) (6, 6) E) (4, 6)

2. $4x - 5y = 20$ denkleminin grafiğini çiziniz.

3. $4x + 3y \leq 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

4.
$$kx + 3y = 9$$
$$3x - my = 5$$
denklem sisteminin ÇK = { (2, 1) } olduğuna göre k ve m değerlerini bulunuz.

5.
$$(2a + 4)x + 4y = 8$$
$$(2a - 2)x + 8y = 10$$
denklem sisteminin ÇK = ∅ olduğuna göre a değerini bulunuz.

6.
$$(m + 3)x + 2y = 5$$
$$2x + 3y = n + 8$$
denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise m + n toplamını bulunuz.

7.
$$(a + 3)x + 8y - 5 = 0$$
$$3x + 6y - 7 = 0$$
denklem sisteminin çözüm kümesi tek elemanlı olduğuna göre a aşağıdaki değerlerden hangisini <u>alamaz</u>?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. Aşağıda verilen eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulup analitik düzlemde gösteriniz.

a) $3x - 4y \leq 24$
$x + y \geq 4$

b) $3x + 5y < 15$
$2x - y > 6$

c) $x + y \geq 6$
$3x + 3y \leq 8$

ç) $x - 3y \leq -8$
$3x + y \geq 6$

d) $2x - 2y > 6$
$x - y < 6$

e) $3x + 2y \leq 12$
$x + y > 4$

9. Aşağıda verilen denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $3x - 2y = 23$
$x + y = 7$

b) $x - y = 1$
$4x + 3y = 11$

c) $2x + 3y = 6$
$3x - 4y = 12$

ç) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 2$
$x - 5y = 10$

d) $x + y = 5$
$3x - 2y = 5$

e) $2x + y = 7$
$4x + 2y = 10$

f) $x - 2y = 7$
$3x - 6y = 21$

3.4. ÜSLÜ İFADELER VE DENKLEMLER

3.4.1. Üslü İfadeleri İçeren Denklemler

Bilgi

$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

x^n ifadesine üslü ifade denir ve $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ \ldots \cdot x}_{n \text{ tane } x}$ biçiminde hesaplanır.

x^n ifadesinde x'e taban, n'ye üs veya kuvvet denir.

Negatif gerçek sayıların tek tam sayı kuvvetleri negatif gerçek sayı, çift tam sayı kuvvetleri pozitif gerçek sayıdır.

$x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$(-x)^{2n} = x^{2n}$

$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen üslü sayıların eşitlerini bulalım.

a) 2^6 b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ c) $(-7)^4$ ç) $(-3)^5$ d) -3^4

Çözüm

a) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

c) $(-7)^4 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = 2401$

ç) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

d) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

Bilgi

$x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ olur.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) 4^{-1} b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ ç) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

Çözüm

a) $4^{-1} = \frac{1}{4}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}$ ç) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Bilgi

$a, b, c, x \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$ax^m + bx^m - cx^m = (a + b - c)x^m$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $6x^3 + 4x^3 - 5x^3$ b) $4x^m + 7x^m - 5x^m - 3x^m$

Çözüm

a) $6x^3 + 4x^3 - 5x^3 = (6 + 4 - 5)x^3 = 5x^3$

b) $4x^m + 7x^m - 5x^m - 3x^m = (4 + 7 - 5 - 3)x^m = 3x^m$

Bilgi

1) $x \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

2) $x, y \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$ olur.

Örnek

Bilgi kutusunda verilen özelliklerin doğruluğunu gösterelim.

1) $x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}$

$= \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m + n \text{ tane}} = x^{m+n}$ elde edilir.

2) $x^m \cdot y^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{m \text{ tane}}$

$= \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{m \text{ tane}} = (x \cdot y)^m$ elde edilir.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $5^4 \cdot 5^6$ b) $3^5 \cdot 4^5$

Çözüm

a) $5^4 \cdot 5^6 = 5^{4+6} = 5^{10}$

b) $3^5 \cdot 4^5 = (3 \cdot 4)^5 = 12^5$

Örnek

$x \neq 0$ olmak üzere

$$x^5 \cdot (-x)^8 \cdot x^{-7} \cdot x^9 \cdot x^{-10} \cdot x^{11}$$

işleminin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} x^5 \cdot (-x)^8 \cdot x^{-7} \cdot x^9 \cdot x^{-10} \cdot x^{11} &= x^5 \cdot x^8 \cdot x^{-7} \cdot x^9 \cdot x^{-10} \cdot x^{11} \\ &= x^{5+8-7+9-10+11} \\ &= x^{33-17} \\ &= x^{16} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi

1) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

2) $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \text{ olur.}$$

Örnek

Bilgi kutusunda verilen özelliklerin doğruluğunu gösterelim.

1) $n < m$ olsun.

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}} = \frac{\overbrace{\cancel{(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots x)}}^{n \text{ tane}} \cdot \overbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots x)}^{m-n \text{ tane}}}{\underbrace{\cancel{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}}_{n \text{ tane}}}$$

$$= \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m-n \text{ tane}} = x^{m-n} \text{ elde edilir.}$$

2) $$\frac{x^n}{y^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ tane}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ tane}}} = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x}{y}\right)}_{n \text{ tane}} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \text{ elde edilir.}$$

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $\dfrac{4^8}{4^5}$ b) $\dfrac{5^4}{5^{-5}}$ c) $\dfrac{6^5}{3^5}$ ç) $\dfrac{(-20)^7}{(-5)^7}$

Çözüm

a) $\dfrac{4^8}{4^5} = 4^{8-5} = 4^3$

b) $\dfrac{5^4}{5^{-5}} = 5^{4-(-5)} = 5^9$

c) $\dfrac{6^5}{3^5} = \left(\dfrac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

ç) $\dfrac{(-20)^7}{(-5)^7} = \left(\dfrac{-20}{-5}\right)^7 = 4^7$

Örnek

$\dfrac{18\cdot\ 4^5+21\cdot\ 4^5+25\cdot\ 4^5}{4\cdot\ 4^2\cdot\ 4^3}$ işleminin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

$$\frac{18\cdot4^5+21\cdot4^5+25\cdot4^5}{4\cdot4^2\cdot4^3}=\frac{(18+21+25)4^5}{4^{1+2+3}}=\frac{64\cdot4^5}{4^6}$$
$$=\frac{4^3\cdot4^5}{4^6}$$
$$=\frac{4^{3+5}}{4^6}$$
$$=\frac{4^8}{4^6}$$
$$=4^{8-6}$$
$= 4^2$ elde edilir.

Bilgi

$x\in\mathbb{R}$, m, $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$(x^n)^m=(x^m)^n=x^{m\cdot n}$ olur.

Örnek

Bilgi kutusunda verilen özelliğin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm

$(x^n)^m=\underbrace{x^n\cdot x^n\cdot x^n\cdot\ldots\cdot x^n}_{m\ \text{tane}}=x^{\overbrace{n+n+n+\ldots+n}^{m\ \text{tane}}}=x^{m\cdot n}$ elde edilir.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $(3^2)^5$ b) $(4^{-3})^4$ c) $((-2)^3)^4$ ç) $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^5$

Çözüm

a) $(3^2)^5=3^{2\cdot5}=3^{10}$

b) $(4^{-3})^4=4^{-12}$

c) $((-2)^3)^4=2^{12}$

ç) $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^5=-\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$

Örnek

$3^x = a$ ise 81^x ifadesinin değerini a cinsinden bulalım.

Çözüm

$81^x = (3^4)^x = (3^x)^4 = a^4$ olarak elde edilir.

Örnek

$2^x = a$, $3^x = b$, $5^x = c$ olmak üzere 450^x ifadesinin değerini a, b ve c cinsinden bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Bigg\} \; 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\begin{aligned} 450^x &= (2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)^x = 2^x \cdot (3^2)^x \cdot (5^2)^x \\ &= 2^x \cdot (3^x)^2 \cdot (5^x)^2 \\ &= a \cdot b^2 \cdot c^2 \text{ olarak elde edilir.} \end{aligned}$$

Örnek

$2^{x+1} = a$ ise 64^{x+1} ifadesinin değerini a cinsinden bulalım.

Çözüm

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2 \cdot 2^x = a \Rightarrow 2^x = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} 64^{x+1} = 64^x \cdot 64^1 = 64 \cdot 64^x &= 2^6 \cdot (2^6)^x \\ &= 2^6 \cdot (2^x)^6 \\ &= 2^6 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^6 \\ &= \cancel{2^6} \cdot \frac{a^6}{\cancel{2^6}} \\ &= a^6 \text{ olarak elde edilir.} \end{aligned}$$

Bilgi

1) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$x^1 = x$, $1^x = 1$

2). $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere

$x^0 = 1$ olur. (0^0 belirsizdir.)

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) 3^1 b) 128^0 c) $\left(-\frac{1}{17}\right)^1$ ç) 1^{78} d) 1^{-9} e) 148^0

Çözüm

a) $3^1 = 3$

b) $128^0 = 1$

c) $\left(-\frac{1}{17}\right)^1 = -\frac{1}{17}$

ç) $1^{78} = 1$

d) $1^{-9} = 1$

e) $(148)^0 = 1$

Bilgi

$x \notin \{-1, 0, 1\}$, $y \notin \{-1, 0, 1\}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ olmak üzere

1) $x^m = x^n \Rightarrow m = n$

2) $x^n = y^n \Rightarrow \begin{cases} x = y & , \text{ n tek ise} \\ x = \mp y & , \text{ n çift ise} \end{cases}$

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2^{3x+5} = 256$ olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm

$2^{3x+5} = 2^8 \Rightarrow 3x + 5 = 8 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$ olarak bulunur.

Örnek

$5^x + 5^{x+2} - 5^{x+1} = 525$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$5^x + 5^{x+2} - 5^{x+1} = 525 \Rightarrow 5^x + 5^2 \cdot 5^x - 5 \cdot 5^x = 525$$

$$(1 + 25 - 5) \cdot 5^x = 525$$

$$21 \cdot 5^x = 525$$

$$5^x = 25$$

$5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ ÇK = $\{2\}$ olarak bulunur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x - 6)^7 = (5x + 2)^7$ denkleminde x değerini bulalım.

Çözüm

Üsler eşit ve tek sayı olduğundan $(x - 6)^7 = (5x + 2)^7$ denkleminde $x - 6 = 5x + 2$ eşitliği yazılır.

$x - 6 = 5x + 2 \Rightarrow -8 = 4x \Rightarrow x = -2$ olarak elde edilir.

Örnek

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(2m + 4)^6 = (3m - 3)^6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Verilen denklemde üsler eşit ve çift olduğundan

$2m + 4 = 3m - 3$ veya $2m + 4 = -(3m - 3)$

$7 = m$ $\quad$ $2m + 4 = -3m + 3$

$5m = -1$

$m = -\frac{1}{5}$ olacağından

denklemin ÇK = $\left\{-\frac{1}{5}, 7\right\}$ olarak elde edilir.

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a^n = 1 \text{ ise } \begin{cases} a = 1 \\ a \neq 0, \quad n = 0 \\ a = -1 \text{ ve n çift sayı ise} \end{cases}$$

durumları incelenerek çözülür.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(4x - 5)^8 = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Üs çift tam sayı olduğundan

$4x - 5 = 1$ veya $4x - 5 = -1$ olmalıdır.

$4x = 6$ $\qquad$ $4x = 4$

$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $x = 1$ olduğundan

denklemin ÇK = $\left\{1, \frac{3}{2}\right\}$ olarak elde edilir.

Örnek

$(7x - 20)^{11} = 1$ denklemini sağlayan x değerini bulalım.

Çözüm

Üs tek tam sayı olduğundan $7x - 20 = 1$

$7x = 21$

$x = 3$ olarak bulunur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(2x - 4)^{x-2} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Çözümü üç farklı durum için incelemeliyiz.

1) $2x - 4 = 1 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

2) $x - 2 = 0$ ve $2x - 4 \neq 0$ olmalıdır.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ için $2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$ olduğundan $x = 2$ değeri çözüm kümesine alınmaz.

3) $2x - 4 = -1$ ve $(x - 2)$ çift sayı olmalıdır.

$2x - 4 = -1 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ için $\frac{3}{2} - 2 = \frac{-1}{2}$ çift tam sayı olmadığı için $x = \frac{3}{2}$ çözüm kümesine alınmaz.

Bu durumda denklemin ÇK = $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ olarak elde edilir.

Bilgi

$m, n \in \mathbb{Z}$, x ile y aralarında asal sayı olmak üzere

$x^m = y^n \Rightarrow m = n = 0$ olur.

Örnek

a ve b birer tam sayı olmak üzere

$7^{3a-6} = 10^{2b+4}$ eşitliğinde a ve b değerlerini bulalım.

Çözüm

7 ile 10 aralarında asal sayı olduğundan

$3a - 6 = 0 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$ ve $2b + 4 = 0 \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2$ olarak bulunur.

Bilgi

$x^n = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $n \neq 0$ olur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x^2 - 9)^{x+3} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$(x^2 - 9)^{x+3} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$ ve $x + 3 \neq 0$ olmalıdır.

$x^2 = 9$

$x = 3$ için $3 + 3 = 6 \neq 0$

$x = -3$ için $-3 + 3 = 0$ olduğundan $x = -3$ değeri çözüm kümesine alınmaz.

Bu durumda denklemin ÇK = $\{3\}$ olarak elde edilir.

Bilgi

$x \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ olmak üzere

1) $x > 1$ iken $x^m < x^n \Rightarrow m < n$

2) $0 < x < 1$ iken $x^m < x^n \Rightarrow m > n$ olur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $5^{3x-2} < 5^{2x+2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Taban 1'den büyük olduğundan

$3x - 2 < 2x + 2 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow$ ÇK = $(-\infty, 4)$ olarak elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\left(\frac{3}{5}\right)^{4x-2} < \left(\frac{3}{5}\right)^{x+7}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Taban 1'den küçük olduğundan

$$4x - 2 > x + 7$$

$$3x > 9$$

$$x > 3 \Rightarrow ÇK = (3, \infty) \text{ olarak elde edilir.}$$

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\left(\frac{4}{7}\right)^{2x-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{3x+6}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{2x-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{3x+6}$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{-(2x-1)} < \left(\frac{7}{4}\right)^{3x+6}$$

$$-2x + 1 < 3x + 6$$

$$-5 < 5x$$

$$-1 < x \Rightarrow ÇK = (-1, \infty) \text{ olarak elde edilir.}$$

Örnek

$x = 5^{30}$, $y = 3^{45}$, $z = 2^{60}$ olduğuna göre x, y ve z arasındaki sıralamayı bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} x &= 5^{30} = (5^2)^{15} = 25^{15} \\ y &= 3^{45} = (3^3)^{15} = 27^{15} \\ z &= 2^{60} = (2^4)^{15} = 16^{15} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 16^{15} < 25^{15} < 27^{15} \text{ olacağından}$$

$z < x < y$ elde edilir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $5^{3x-1} = 91$ denkleminde x'in hangi aralıkta değerler alacağını bulalım.

Çözüm

$$25 < 91 < 125 \Rightarrow 5^2 < 91 < 5^3$$

$$5^2 < 5^{3x-1} < 5^3 \text{ olacağından}$$

$$2 < 3x - 1 < 3$$

$$3 < 3x < 4$$

$$1 < x < \frac{4}{3} \text{ olarak elde edilir.}$$

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki işlemlerin en sade hâlini yazınız.

a) $x^5 \cdot x^7 \cdot x^{-6}$

b) $(-5)^{2m} \cdot (-5)^{2m+1} \cdot (5)^m$

c) $3^{-5} \cdot 3^{-10} \cdot 3^{14}$

ç) $3 \cdot 5^7 \cdot 2 \cdot 5^{-5} \cdot 7 \cdot 5^{-2}$

d) $4^{\frac{3}{2}} + 16^{\frac{5}{4}} + 125^{\frac{7}{3}}$

e) $\dfrac{x^7+x^7+x^7+x^7+x^7+x^7+x^7}{7 \cdot x^7}$

f) $\dfrac{5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3}{5^3+5^5+5^3+5^3+5^3}$

g) $\dfrac{(-x)^5 \cdot (-x)^4 \cdot (-x)^{-5}}{x^2 \cdot (-x)^{-3}}$

2. $3^x = a$, $2^x = b$ olduğuna göre aşağıda verilen ifadelerin eşitini a ve b cinsinden bulunuz.

a) 9^x

b) 16^x

c) 72^x

ç) 108^{1-x}

d) 144^{x+2}

e) 324^x

f) 96^{x+1}

g) 216^x

3. a ve b birer tam sayı olmak üzere

$8^{3a-9} = 9^{4b+8}$ eşitliğinde a ve b değerlerini bulunuz.

4. $x = 2$, $y = -2$ olduğuna göre

$$\frac{x^y + y^x}{x^y - y^x}$$

ifadesinin sonucunu bulunuz.

5. $\left(\dfrac{4}{25}\right)^x = \left(\dfrac{125}{8}\right)^y$

olduğuna göre $\dfrac{x}{y}$ değerini bulunuz.

6. $(2x+1)^{19} = 9^{19}$

olduğuna göre x değerini bulunuz.

7. $(5x - 20)^{13} = 1$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

8. $(x+2)^{3x-6} = 1$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

9. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{3x-1} < \left(\dfrac{9}{4}\right)^{x+1}$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

10. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $5^{x+7} > \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+5}$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

11. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $7^{4x-1} = 311$

eşitliğinde x'in değer aralığını bulunuz.

12. $x = 5^{60}$, $y = 3^{90}$, $z = 2^{120}$

olduğuna göre x, y ve z'yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

13. $64^6 + 2^{39} + 7 \cdot 8^{12} = k \cdot 16^{10}$

eşitliğinde k değerini bulunuz.

3.4.2. Köklü İfadeleri İçeren Denklemler

Bilgi

$a, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olmak üzere

$x^n = a$ eşitliğini sağlayan x değerine **a'nın n. kuvvetten (dereceden) kökü** denir ve

$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ biçiminde gösterilir.

$$x^n = a \Rightarrow x = \begin{cases} \sqrt[n]{a} & , \text{ n tek ise} \\ \mp\sqrt[n]{a} & , \text{ } a \geq 0 \text{ ve n çift ise} \end{cases}$$

Aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

1) $a \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt[n]{a}$ ifadesi bir gerçek sayı belirtir.

2) $n \in \mathbb{Z}^+$, n tek sayı ve $a \in \mathbb{R}^-$ için $\sqrt[n]{a}$ ifadesi bir gerçek sayı belirtir.

3) $n \in \mathbb{Z}^+$, n çift sayı ve $a \in \mathbb{R}^-$ için $\sqrt[n]{a}$ ifadesi bir gerçek sayı belirtmez.

$\sqrt[n]{a}$ ifadesi özel olarak

n = 2 için $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ biçiminde yazılır ve “2. dereceden kök a” veya “karekök a” diye okunur.

n = 3 için $\sqrt[3]{a}$ biçiminde yazılır ve “3. dereceden kök a” veya “küpkök a” diye okunur.

Örnek

$$\sqrt[3]{7}\ ,\ \sqrt{-5},\ \sqrt[7]{\frac{1}{4}},\ \sqrt[8]{0,5}\ ,\ \sqrt[3]{-7}\ ,\ \sqrt{-2}\ ,\ \sqrt[8]{-20}\ ,\ \sqrt[5]{-1}\ ,\ \sqrt[28]{-28}\ ,\ \sqrt[25]{0,1}$$

sayılarından gerçek sayı olanları ve olmayanları belirleyelim.

Çözüm

Gerçek sayı olanlar: $\sqrt[3]{7}\ ,\ \sqrt[7]{\frac{1}{4}},\ \sqrt[8]{0,5}\ ,\ \sqrt[3]{-7}\ ,\ \sqrt[5]{-1}\ ,\ \sqrt[25]{0,1}$

Gerçek sayı olmayanlar: $\sqrt{-5}\ ,\ \sqrt{-2}\ ,\ \sqrt[8]{-20}\ ,\ \sqrt[28]{-28}$

Örnek

$$A = \sqrt{x-2} + \sqrt[8]{7-x}$$

ifadesi bir gerçek sayı belirttiğine göre x'in alacağı tam sayı değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

$A = \sqrt{x-2} + \sqrt[8]{7-x}$ ifadede kök dereceleri çift olduğundan

$$\left.\begin{aligned} x-2 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 2 \\ 7-x \geq 0 &\Rightarrow 7 \geq x \end{aligned}\right\} 2 \leq x \leq 7 \text{ olmalıdır.}$$

Bu sayıların toplamı da $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ olarak elde edilir.

Örnek

$A = \sqrt[5]{3x-7}$ ifadesini gerçek sayı yapan x değerlerini bulalım.

Çözüm

Verilen ifadenin kök derecesi tek olduğundan $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için ifade sağlanır.

Örnek

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılardaki çözüm kümelerini bulalım.

a) $x^2 = 7$

b) $x^3 = 11$

c) $x^5 = -21$

ç) $x^8 = -16$

Çözüm

a) $x^2 = 7 \Rightarrow x = \mp\sqrt{7}$ olduğundan $ÇK = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

b) $x^3 = 11 \Rightarrow x = \sqrt[3]{11}$ olduğundan $ÇK = \{\sqrt[3]{11}\}$

c) $x^5 = -21 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-21}$ olduğundan $ÇK = \{\sqrt[5]{-21}\}$

ç) $x^8 = -16 \Rightarrow x = \mp\sqrt[8]{-16} \notin \mathbb{R}$ olduğundan $ÇK = \varnothing$ olarak elde edilir.

Bilgi

$x \in \mathbb{R}^+$, m, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olmak üzere

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{olur.}$$

Her köklü ifade aynı zamanda bir üslü ifade olarak yazılabilir.

Örnek

Aşağıda verilen köklü ifadeleri üslü ifade olarak gösterelim.

a) $\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[7]{3^8}$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{11}{19}\right)^7}$

ç) $\sqrt[11]{3^5}$

Çözüm

a) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[7]{3^8} = 3^{\frac{8}{7}}$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{11}{19}\right)^7} = \left(\frac{11}{19}\right)^{\frac{7}{4}}$

ç) $\sqrt[11]{3^5} = 3^{\frac{5}{11}}$

Bilgi

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olmak üzere

1) n tek ise $\sqrt[n]{x^n} = x$

2) n çift ise $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen köklü ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $\sqrt{4^2}$ b) $\sqrt[8]{2^8}$ c) $\sqrt[3]{5^3}$ ç) $\sqrt[7]{(-3)^7}$ d) $\sqrt[4]{(-7)^4}$

Çözüm

a) $\sqrt{4^2}=4$

b) $\sqrt[8]{2^8}=2$

c) $\sqrt[3]{5^3}=5$

ç) $\sqrt[7]{(-3)^7}=-3$

d) $\sqrt[4]{(-7)^4}=|-7|=7$

Örnek

$x<4$ ve $x\in\mathbb{R}$ için

$\sqrt{x^2-8x+16}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{(x-4)^2}=|x-4|$ $(x<4 \Rightarrow x-4<0$ olacağından)

$=-x+4$ olarak bulunur.

Örnek

$$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4}+\sqrt[3]{(\sqrt{7}-3)^3}$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=|\sqrt{5}-3|=-\sqrt{5}+3$

$\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$

$\sqrt[3]{(\sqrt{7}-3)^3}=\sqrt{7}-3$

Bu durumda

$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4}+\sqrt[3]{(\sqrt{7}-3)^3}=-\cancel{\sqrt{5}}+\cancel{3}+\cancel{\sqrt{5}}-2+\sqrt{7}-\cancel{3}$

$=\sqrt{7}-2$ olarak elde edilir.

Örnek

$x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt{x^2-12x+36}=8$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\sqrt{x^2-12x+36}=8 \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2}=8 \Rightarrow |x-6|=8$

$x-6=8$ veya $x-6=-8$

$x=14$ $x=-2$ olur.

Bu durumda denklemin ÇK $=\{-2, 14\}$ olarak bulunur.

Bilgi

$x, y \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olmak üzere

$$\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x \cdot \sqrt[n]{y} \quad \text{ve} \quad x \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \cdot y} \quad \text{olur.}$$

Örnek

Aşağıda verilen köklü ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{625}{81}}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5}}$ ç) $3\sqrt[3]{2}$

Çözüm

a) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{625}{81}} = \sqrt[3]{\dfrac{5^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 3}} = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5}} = \sqrt[4]{\dfrac{x^4 \cdot x^3}{y^4 \cdot y}} = \dfrac{x}{y}\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y}}$

ç) $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

Bilgi

$x \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olmak üzere

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}} \quad \text{olur.}$$

Bir köklü ifadenin hem kök derecesi hem de kök içindeki ifadenin üssü aynı pozitif sayı ile çarpılır ya da bölünürse değeri değişmez.

Örnek

Aşağıda verilen köklü ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $\sqrt[14]{3^{10}}$ b) $\sqrt[80]{x^{16}}$ c) $\sqrt[12]{2^{15}}$

Çözüm

a) $\sqrt[14]{3^{10}} = \sqrt[\frac{14}{2}]{3^{\frac{10}{2}}} = \sqrt[7]{3^5}$

b) $\sqrt[80]{x^{16}} = \sqrt[\frac{80}{16}]{x^{\frac{16}{16}}} = \sqrt[5]{x}$

c) $\sqrt[12]{2^{15}} = \sqrt[\frac{12}{3}]{2^{\frac{15}{3}}} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2}$

Örnek

$x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt[3]{9}$, $z = \sqrt[6]{15}$

sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

Bu tür sorularda önce verilen köklü sayıların kök dereceleri eşitlenir. Daha sonra kök içindeki sayıların büyüklüğüne göre sıralama yapılır.

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt[3 \cdot 2]{2^3} = \sqrt[6]{8} \\ y &= \sqrt[3]{9} \Rightarrow y = \sqrt[2 \cdot 3]{9^2} = \sqrt[6]{81} \\ z &= \sqrt[6]{15} \end{aligned}\right\}$$

$8 < 15 < 81$ olduğundan

$\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{15} < \sqrt[6]{81}$

$x < z < y$ elde edilir.

Bilgi

$x \in \mathbb{R}^+$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olmak üzere

$$a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} - c \cdot \sqrt[n]{x} = (a + b - c)\sqrt[n]{x} \text{ olur.}$$

Köklü ifadeleri toplayabilmek veya çıkarabilmek için kök dereceleri aynı ve kök içindeki sayılar birbirine eşit olmalıdır.

Örnek

Aşağıda verilen ifadeleri en sade biçimde gösterelim.

a) $6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{75}$

c) $2\sqrt{50} - \sqrt{128} + 3\sqrt{98}$

Çözüm

a) $6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (6 + 4 - 5)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{75} = \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{4^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3}$

$= 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

$= (3 - 4 + 5)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{50} - \sqrt{128} + 3\sqrt{98} = 2\sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{64 \cdot 2} + 3\sqrt{49 \cdot 2}$

$= 2 \cdot 5\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 3 \cdot 7\sqrt{2}$

$= (10 - 8 + 21)\sqrt{2} = 23\sqrt{2}$ olarak elde edilir.

Bilgi

x, $y \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olmak üzere

1) $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$, $y \neq 0$ olur.

Kök dereceleri aynı olan köklü ifadeler birbiriyle çarpılabilir veya bölünebilir. Kök dereceleri aynı değil ise kök dereceleri eşitlenerek işleme devam edilir.

Örnek

Bilgi kutusundaki özelliklerin doğruluğunu gösterelim.

a) $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = (x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

b) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ elde edilir.

Örnek

Aşağıda verilen köklü ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}$ ç) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{6}$

d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$ e) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}}$ g) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt{5}}$

Çözüm

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{5\cdot 7}=\sqrt{35}$

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 3}=\sqrt{3^2}=3$

c) $3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=3\cdot 4\sqrt{2\cdot 2}=12\sqrt{2^2}=12\cdot 2=24$

ç) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{6}=\sqrt[4]{5\cdot 6}=\sqrt[4]{30}$

d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[3\cdot 2]{2^2}\cdot\sqrt[2\cdot 3]{5^3}=\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{4\cdot 125}=\sqrt[6]{500}$

e) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{75}{3}}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

f) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\dfrac{16\cdot 2}{9}}=\sqrt{\dfrac{4^2\cdot 2}{3^2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^4}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt[3\cdot 2]{5^{4\cdot 2}}}{\sqrt[2\cdot 3]{5^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{5^8}{5^3}}=\sqrt[6]{5^{8-3}}=\sqrt[6]{5^5}$

Bilgi

$x\in\mathbb{R}^+$, $m, n\in\mathbb{Z}^+$, $n\geq 2$ olmak üzere

$(\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x^m}$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen köklü ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $(\sqrt[3]{5})^2$ b) $(\sqrt[4]{3})^8$

Çözüm

a) $(\sqrt[3]{5})^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

b) $(\sqrt[4]{3})^8=\sqrt[4]{3^8}=3^{\frac{8}{4}}=3^2=9$

Bilgi

$x\in\mathbb{R}^+$, $m, n\in\mathbb{Z}^+$, $m\geq 2$, $n\geq 2$ olmak üzere

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x}$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen ifadeleri tek kök içinde yazalım.

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^8}}$

c) $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{2}}$ ç) $\sqrt[5]{x^3\sqrt[4]{x}}$

Çözüm

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[5\cdot 3]{4} = \sqrt[15]{4}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^8}} = \sqrt[3\cdot 4]{x^8} = \sqrt[12]{x^8} = x^{\frac{8}{12}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{4^2\cdot 2}} = \sqrt[6]{(2^2)^2\cdot 2} = \sqrt[6]{2^4\cdot 2} = \sqrt[6]{2^5}$

ç) $\sqrt[5]{x^3\cdot\sqrt[4]{x}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{(x^3)^4\cdot x}} = \sqrt[20]{x^{12}\cdot x} = \sqrt[20]{x^{13}}$

Bilgi

$x \in \mathbb{R}^+$, m, n $\in \mathbb{Z}^+$, n ≥ 2 olmak üzere

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ ifadesinin paydasını rasyonel sayı yapmak için pay ve payda $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ile çarpılır.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerin paydasını rasyonel sayı yapalım.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

Çözüm

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{1}{\underset{(\sqrt[3]{5^2})}{\sqrt[3]{5}}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\underset{(\sqrt{7})}{\sqrt{7}}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

Bilgi

$x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2 = x-y$ ve $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$ olur.

$\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ile $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ birbirlerinin eşleniğidir. Aynı şekilde $\sqrt{x}$ ile $\sqrt{x}$ de birbirlerinin eşleniğidir.

Kareköklü bir ifade eşleniği ile çarpılınca sonuç rasyonel bir sayı olur.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin paydalarını rasyonel sayı yapalım.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

Çözüm

Verilen ifadelerin paydalarını rasyonel yapmak için ifadelerin pay ve paydalarını paydanın eşleniği ile çarpalım.

a) $\underset{(\sqrt{5})}{\dfrac{4}{\sqrt{5}}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

b) $\underset{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

c) $$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = \underset{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}} + \underset{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}} + \underset{(\sqrt{3})}{\frac{3}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} + \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} + \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}-\cancel{3\sqrt{2}}+3\sqrt{5}+\cancel{3\sqrt{2}}+3\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{6\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{5}+\sqrt{3}$$ olarak elde edilir.

Bilgi

$x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$\sqrt{x+2\sqrt{y}}$ veya $\sqrt{x-2\sqrt{y}}$ ifadeleri verildiğinde

$x = m + n$, $y = m\cdot n$ olacak biçimde $m, n \in \mathbb{R}^+$ sayıları bulunabilirse

$\sqrt{x+2\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$; $\sqrt{x-2\sqrt{y}} = |\sqrt{x}-\sqrt{y}|$ elde edilir.

Örnek

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$6 = 3\cdot2$, $5 = 3 + 2$ olduğundan

$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ elde edilir.

Örnek

$\sqrt{8+\sqrt{28}}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$\sqrt{8+\sqrt{28}} = \sqrt{8+\sqrt{4\cdot7}} = \sqrt{\underbrace{8}_{(7+1)}+2\sqrt{\underbrace{7}_{(7\cdot1)}}} = \sqrt{7}+1$ elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. $x < y < 0 < z$

olmak üzere aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a) $\sqrt{x^2+2xy+y^2}+\sqrt{y^2-2yz+z^2}$

b) $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}-\sqrt{(x-z)^2}$

2. $A=\sqrt{7-x}+\sqrt[4]{x+11}+\sqrt[9]{x+5}$

ifadesi bir gerçek sayı olduğuna göre x'in hangi aralıkta değerler alacağını bulunuz.

3. $x=\sqrt{3}\,,\ y=\sqrt[3]{4}\,,\ z=\sqrt[6]{17}$

olduğuna göre x, y ve z sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

4. $\sqrt{7+2\sqrt{12}}-\sqrt{7-2\sqrt{12}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

5. $\sqrt{21+\sqrt{19-\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}-\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

7. Aşağıdakilerden hangisi bir gerçek sayı <u>değildir</u>?

A) $\sqrt{30}$ B) $\sqrt{(-7)^2}$ C) $\sqrt{25}$

D) $\sqrt[4]{-16}$ E) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

8. $\sqrt[3x]{\dfrac{10^4+10^4+10^4+10^4+10^4}{5^5+5^5}}=\sqrt[5]{2}$

eşitliğinde x değerini bulunuz.

9. Aşağıda verilen ifadelerin en sade hâlini bulunuz.

a) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$

b) $2\sqrt{75}-3\sqrt{27}+\sqrt{12}$

c) $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}$

ç) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}$

d) $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)\cdot\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

f) $\sqrt{\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)\cdot\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)}$

10. $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[6]{\sqrt{x}}$

olduğuna göre x değerini bulunuz.

11. $\dfrac{\sqrt{7}\cdot\sqrt[4]{7}}{\sqrt[3]{7}}=7^x$

eşitliğinde x değerini bulunuz.

12. $\left(\sqrt{8-2\sqrt{15}}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$

işleminin eşitini bulunuz.

13. $x < 60$ olmak üzere x'in kaç farklı doğal sayı değeri için $\sqrt{6x}$ ifadesi tam sayı olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.5. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ UYGULAMALAR

3.5.1. Oran ve Orantı

Bilgi

1) Aynı cins iki çokluğun bölme yoluyla karşılaştırılmasına **oran** denir.

a ve $b \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere

"$\frac{a}{b}$" ifadesine "a'nın b'ye oranı" denir. "$\frac{a}{b}$" ifadesi "$a:b$" biçiminde de gösterilir.

2) İki veya daha fazla oranın eşitlenmesine **orantı** denir.

"$\frac{a}{b}$" ve "$\frac{c}{d}$" iki oran olmak üzere "$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$" ifadesi bir orantıdır.

"$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$" orantısı "a'nın b'ye oranı, c'nin d'ye oranına eşittir." biçiminde okunur.

"$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$" orantısı "$a:b = c:d$" biçiminde de gösterilebilir.

Bu orantıda "b" ve "c"ye içler, "a ve d"ye dışlar denir.

"$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$" ifadesinde k sabit sayısına **orantı sabiti** denir.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow a=b\cdot k,\ c=d\cdot k$ olur.

Orantının Özellikleri

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ orantısında

1) $a \cdot d = b \cdot c$ (Bir orantıda içler çarpımı dışlar çarpımına eşittir.)

2) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

(Bir orantıda içler veya dışlar yer değiştirebilir.)

3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=k$ (Bir orantıda paylar toplamı paydalar toplamına bölünürse orantı sabiti değişmez.)

4) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{m\cdot a}{m\cdot b}=\frac{n\cdot c}{n\cdot d}=k$ ve $\frac{m\cdot a+n\cdot c}{m\cdot b+n\cdot d}=k$ $(m \neq 0, n \neq 0)$

$m \neq 0$, $n \neq 0$ olmak üzere oranlardan biri m ile diğeri n ile genişletilip, pay ve paydalar kendi aralarında toplanıp bölünürse orantı sabiti değişmez.

5) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a\cdot c}{b\cdot d}=k^2$ (Bir orantıda oranlar çarpımı orantı sabitinin karesine eşittir.)

6) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a^n+c^n}{b^n+d^n}=k^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

Örnek

Aşağıda yapılan işlemleri inceleyelim.

Çözüm

a) 20 kilogramın 5 kilograma oranı $\frac{20}{5}$ biçiminde gösterilir.

b) 17 kız öğrenci, 18 erkek öğrencinin bulunduğu bir sınıfta kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranı $\frac{17}{18}$ biçiminde gösterilir.

c) $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{18}{23}$ ifadeleri birer orandır.

ç) $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}, \ \frac{4}{5} = \frac{16}{20}, \ \frac{10}{11} = \frac{30}{33}$ ifadeleri birer orantıdır.

d) a ve b sırasıyla 3 ve 10 ile orantılı ise bu orantı $\frac{a}{3} = \frac{b}{10}$ biçiminde ifade edilir.

Örnek

a ve b sayıları sırasıyla 3 ve 5 ile orantılı ise $\frac{3a+2b}{4a-2b}$ ifadesinin alacağı değeri bulalım.

Çözüm

a ve b sırasıyla 3 ve 5 ile orantılı ise $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = k$ olur.

Buradan a = 3k , b = 5k değerlerini ifadede yerine yazarsak

$$\frac{3a+2b}{4a-2b} = \frac{3\cdot 3k + 2\cdot 5k}{4\cdot 3k - 2\cdot 5k} = \frac{9k+10k}{12k-10k} = \frac{19k}{2k} = \frac{19}{2} \text{ elde edilir.}$$

Örnek

$5x = 6y$ ise $\frac{3x+2y}{4x-4y}$ değerini bulalım.

Çözüm

$5x = 6y \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow x = 6k, \ y = 5k$ olacağından

$$\frac{3x+2y}{4x-4y} = \frac{3\cdot 6k + 2\cdot 5k}{4\cdot 6k - 4\cdot 5k} = \frac{18k+10k}{24k-20k} = \frac{28k}{4k} = 7 \text{ elde edilir.}$$

Örnek

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}, \ \frac{b}{c} = \frac{7}{8}$ olduğuna göre $\frac{a+b}{c}$ değerini bulalım.

Çözüm

Her bir orantıyı b değerleri eşit olacak biçimde genişletelim.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} = \frac{21}{35} \\ \frac{b}{c} = \frac{7\cdot 5}{8\cdot 5} = \frac{35}{40} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 21k \\ b = 35k \\ c = 40k \text{ bulunur.} \end{array}$$

Bu durumda $\frac{a+b}{c} = \frac{21k+35k}{40k} = \frac{56k}{40k} = \frac{7}{5}$ elde edilir.

Örnek

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ orantısına göre $\frac{4a+12}{4b+3d}=k$ eşitliği varsa c değerini bulalım.

Çözüm

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{4a+3c}{4b+3d}=k$ olacağından $3c = 12 \Rightarrow c = 4$ olarak bulunur.

Örnek

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{2}$ ise $\frac{a^3\cdot c^2\cdot e}{b^3\cdot d^2\cdot f}$ oranını bulalım.

Çözüm

$$\frac{a^3\cdot c^2\cdot e}{b^3\cdot d^2\cdot f}=\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^2\cdot\left(\frac{e}{f}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{8}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{729}{64}$$ elde edilir.

Örnek

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{3}{4}$ ise $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{a}{b}=\frac{3}{4} & \frac{a^2}{b^2}=\frac{9}{16}\\ \frac{c}{d}=\frac{3}{4} & \frac{c^2}{d^2}=\frac{9}{16}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{9}{16}$$ elde edilir.

Örnek

$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$ ve $3x + y - 2z = 12$ olduğuna göre $x + y + z$ toplamını bulalım.

Çözüm

$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}=k \Rightarrow x = 3k,\ y = 2k,\ z = 4k$ bulunur.

Bu değerler verilen eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$3\cdot 3k + 2k - 2\cdot 4k = 12$$

$$3k = 12 \Rightarrow k = 4 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda

$$\left.\begin{array}{l}x = 3\cdot 4 = 12\\ y = 2\cdot 4 = 8\\ z = 4\cdot 4 = 16\end{array}\right\} \Rightarrow x + y + z = 12 + 8 + 16 = 36$$ olarak elde edilir.

Altın Oran

Altın oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır.

İlk olarak kimler tarafından keşfedildiği bilinmese de Mısırlılar'ın ve Yunanlılar'ın bu konu üzerinde yapmış oldukları bazı çalışmalar olduğu görülmektedir. Öklid, millattan önce 300'lü yıllarda yazdığı "elementler" adlı tezinde "ekstrem ve önemli oranda bölmek" olarak altın oranı ifade etmiştir. Mısırlıların Keops Piramit'inde, Leonardo da Vinci'nin "İlahi Oran" adlı çalışmasında sunduğu resimlerde kullanıldığı bilinen "Altın oran", "Fibonacci Sayıları" olarak da bilinmektedir.

Orta Çağ'ın en ünlü matematikçisi olan İtalyan kökenli Leonordo Fibonacci, birbiri arasında ardışık ilişki ve olağanüstü bir oran bulunduğunu iddia ettiği sayıları keşfetmiş ya da diğer bir görüşe göre de Hint – Arap medeniyetinden öğrenmiş ve Avrupa'ya taşımıştır. Evrendeki muhteşem düzenle birebir örtüşen bu sayıları keşfetmesi nedeniyle altın orana ilk iki harfi olan "Fi" (ϕ) sayısı denilmiştir.

Bir yapı ya da sanat eserinin altın orana yakınlığı, onun aynı zamanda estetik olarak güzelliğinin bir ölçüsü olarak kabul görmüştür.

Bildiğimiz gibi matematikte 3,14 sayısına karşılık gelen bir dairenin çevresinin çapına bölünmesiyle elde edilen sayıya Pi (π) sayısı denir. Aynı Pi sayısı gibi altın oran da matematikte 1,618'e eşit olan sayıya denir ve Fi (ϕ) simgesiyle gösterilir ve ondalık sistemde yazılışı; 1,618033988749894...tür.

Bu oranın kısaca gösterimi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir.

Fibonacci sayıları : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765... şeklinde kendisinden önceki iki sayının toplamı ile devam etmektedir. Bu ardışık sayılar dizisi ile altın oran arasında ilginç bir ilişki vardır.

Örneğin 13 sayısı kendisinden önceki iki sayının (5+8) toplamını göstermektedir.

Bir Fibonacci sayısının kendinden önceki sayıya bölümü ile elde edilen sonuç, 1,618'dir. Örneğin; 6765 / 4181 = 1,618... sonucunu vermektedir. Bu durum, 89'dan daha küçük olan Fibonacci sayıları için 0,01 gibi küçük bir farklılıkla ortaya çıksa da büyük sayıların tamamında sonuç aynıdır. Dizideki ardışık iki sayının oranı, sayılar büyüdükçe altın orana yani 1.618'e yaklaşır, 89/55 ve sonrasında ise 1,618...'de sabitlenir.

Altın oranın karşılık geldiği 1,618 sayısının matematikteki en şaşırtıcı yanı, tersinin bir eksiğine; karesinin ise bir fazlasına eşit olmasıdır. Bu yönüyle altın oran evrende eşi benzeri olmayan, bu özelliğe sahip tek sayıdır. Bu kuralı biraz açarsak şunları söyleyebiliriz:

Bir sayının tersi, 1'in o sayıya bölünmesi ile elde edilen sonuçtur. Örneğin 2'nin tersi 1/2 = 0,5'tir.

Altın oranın tersi ise, 1 / 1,618 = 0,618'dir . Yani altın oranın tersi, kendisinin 1 eksiğine eşittir.

Aynı şekilde altın oranın karesi $(1{,}618)^2$ = 2,618'e, yani kendisinin bir fazlasına eşittir.

Bu, şaşkınlık verecek bir durumdur ve bu özellikte başka bir sayı yoktur.

Altın oran veya Fibonacci sayıları, bugüne kadar insan yapımı birçok çalışmada kullanılmıştır. Bunun yanında doğada var olan nesnelerin birçoğunda altın oranın var olduğu keşfedilmiştir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Bilgi

İki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk **doğru orantılıdır** denir.

x ve y doğru orantılı iki çokluk ise $\frac{x}{y} = k$, $k \in R$ biçiminde gösterilir. (k orantı sabitidir.)

a, b, c ve x gerçek sayılar olmak üzere

$\left.\begin{matrix} a & c \\ b & x \end{matrix}\right\}$ ifadesinde a ile c ve b ile x arasında doğru orantı varsa $a \cdot x = b \cdot c$ olur.

Örnek

x ile y doğru orantılıdır. x = 6 iken y = 10 oluyorsa x = 8 iken y'nin alacağı değeri bulalım.

Çözüm

x ile y doğru orantılı olduğundan $\frac{x}{y} = k \Rightarrow k = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{3}{5}$ olur.

Bu durumda $\frac{8}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{40}{3}$ bulunur.

Örnek

x + 1 ile y – 2 doğru orantılıdır. x = 5 iken y = 5 oluyorsa x = 9 iken y'nin alacağı değeri bulalım.

Çözüm

x = 5, y = 5 iken orantı sabiti

$$\frac{x+1}{y-2} = k \Rightarrow \frac{5+1}{5-2} = k \Rightarrow \frac{6}{3} = k \Rightarrow k = 2 \text{ olur.}$$

x = 9 iken y'nin alacağı değer

$$\frac{x+1}{y-2} = 2 \Rightarrow \frac{9+1}{y-2} = 2 \Rightarrow 10 = 2y - 4$$
$$2y = 14$$
$$y = 7 \text{ bulunur.}$$

Örnek

60 bilye 3, 4, 5 yaşlarındaki üç çocuğa, yaşları ile doğru orantılı olarak dağıtılıyor.

Buna göre en çok bilye alan çocuğun kaç bilye alacağını bulalım.

Çözüm

$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = 3k, \ b = 4k, \ c = 5k$ olur.

$a + b + c = 60 \Rightarrow 3k + 4k + 5k = 60 \Rightarrow k = 5$ olacağından

en çok bilye alan çocuk $5 \cdot k = 5 \cdot 5 = 25$ tane bilye alır.

Bilgi

İki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa ya da biri azalırken diğeri aynı oranda artıyorsa bu iki çokluk **ters orantılıdır** denir.

x ile y ters orantılı iki çokluk ise $x \cdot y = k$, $k \in \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir. (k orantı sabitidir.)

a, b, c ve x gerçek sayılar olmak üzere

$$\left.\begin{matrix} a \longleftrightarrow c \\ b \longleftrightarrow x \end{matrix}\right\}$$ ifadesinde a ile c ve b ile x arasında ters orantı varsa $a \cdot c = b \cdot x$ olur.

Örnek

a ile b ters orantılıdır. a = 4 iken b = 8 oluyorsa a = 16 iken b'nin alacağı değeri bulalım.

Çözüm

a ile b ters orantılı olduğundan $a \cdot b = k$ olur.

Bu durumda $4 \cdot 8 = k \Rightarrow k = 32 \Rightarrow 16 \cdot b = 32 \Rightarrow b = 2$ bulunur.

Örnek

a, b ve c sayıları sırasıyla 4, 6 ve 10 ile ters orantılıdır.

a + b + c = 62 olduğuna göre a, b ve c sayılarını bulalım.

Çözüm

a, b ve c sayıları sırasıyla 4, 6 ve 10 ile ters orantılı olduğuna göre

4a = 6b = 10c = k eşitliği yazılır.

Buradan $a = \frac{k}{4}$, $b = \frac{k}{6}$, $c = \frac{k}{10}$ olur.

Bu eşitlikler yardımıyla

$$a + b + c = 62 \Rightarrow \underset{(15)}{\frac{k}{4}} + \underset{(10)}{\frac{k}{6}} + \underset{(6)}{\frac{k}{10}} = 62$$

$$\frac{15k + 10k + 6k}{60} = 62$$

$$\frac{31k}{60} = 62$$

$k = 2 \cdot 60 = 120$ bulunur.

Bu durumda $a = \frac{120}{4} = 30$, $b = \frac{120}{6} = 20$, $c = \frac{120}{10} = 12$ elde edilir.

Bilgi

Bir orantının içinde hem doğru hem de ters orantı varsa bu orantı bileşik orantıdır.

x ile y doğru orantılı, x ile z ters orantılı çokluklar ise aralarında $\frac{x \cdot z}{y} = k$, $k \in \mathbb{R}$ eşitliği vardır. (k orantı sabitidir.)

Örnek

x sayısı y ile doğru orantılı, $z - 3$ ile ters orantılıdır.

$x = 5$, $y = 6$ iken $z = 4$ ise $x = 10$, $y = 12$ iken z'nin alacağı değeri bulalım.

Çözüm

x ile y doğru orantılı, x ile $z - 3$ ters orantılı olduğundan

$$\frac{x\cdot(z-3)}{y}=k \Rightarrow \frac{5\cdot(4-3)}{6}=k \Rightarrow k=\frac{5}{6} \text{ olur. Buradan}$$

$$\frac{x\cdot(z-3)}{y}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{10\cdot(z-3)}{12}=\frac{5}{6}$$

$z - 3 = 1 \Rightarrow z = 4$ olarak bulunur.

Örnek

324 cm uzunluğundaki bir demir çubuk 9 ve 7 ile doğru orantılı, 5 ile ters orantılı olarak 3 parçaya bölünecektir.

Buna göre her bir parçanın uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Parçaların uzunluklarına sırasıyla a cm, b cm ve c cm diyelim. Bu durumda

$\frac{a}{9}=\frac{b}{7}=5c=k$ orantısından $a = 9k$, $b = 7k$, $c = \frac{k}{5}$ olur.

$$a + b + c = 324 \Rightarrow 9k + 7k + \frac{k}{5} = 324$$

$$\frac{16k}{\underset{(5)}{1}} + \frac{k}{5} = 324$$

$$\frac{81k}{5} = 324 \Rightarrow k = 20 \text{ bulunur. Bu durumda}$$

$a = 9\cdot k = 9\cdot 20 = 180$ cm

$b = 7\cdot k = 7\cdot 20 = 140$ cm

$c = \frac{k}{5}=\frac{20}{5}=4$ cm olarak elde edilir.

Örnek

Kamil Bey, 252 m^2 olan tarlasını 4 ve 5 ile doğru orantılı, 3 ile ters orantılı olacak biçimde 3 parçaya ayıracaktır.

Buna göre her bir parçanın alanının kaç m^2 olduğunu bulalım.

Çözüm

Parçaların alanlarını sırasıyla a m^2, b m^2, c m^2 olarak alalım.

$\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=3c=3k$ (işlemlerde kolaylık olması için orantı sabitini 3'ün katı olan 3k aldık.)

$$\left.\begin{array}{l} a = 12k \\ b = 15k \\ c = k \end{array}\right\} a + b + c = 12k + 15k + k = 252 \Rightarrow 28k = 252 \Rightarrow k = 9 \text{ olur. Buradan}$$

$a = 12\cdot 9 = 108$ m^2, $b = 15\cdot 9 = 135$ m^2, $c = k = 9$ m^2 elde edilir.

Örnek

Bir kampta 45 kişiye 75 gün yetecek kadar erzak vardır. 25 gün sonra kamptan 20 kişi ayrılırsa kalan erzağın kampta kalan kişilere kaç gün yeteceğini bulalım.

Çözüm

25 gün sonra kamptan 20 kişi ayrılırsa kampta 25 kişi kalır. Kampta 45 kişiye 50 gün yetecek erzak bulunmaktadır. Buna göre

$$\left.\begin{array}{lcl} 45 \text{ kişiye} & \longleftrightarrow & 50 \text{ gün yeterse} \\ 25 \text{ kişiye} & \longleftrightarrow & x \text{ gün yeter} \end{array}\right\} \quad 45 \cdot 50 = 25 \cdot x$$

Ters orantı

$x = 90$ olarak bulunur.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. $4x = 7y$ ve

$x + y = 583$

olduğuna göre x değerini bulunuz.

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{1}{2}$

ise $\frac{a \cdot d \cdot e}{b \cdot c \cdot f}$ değerini bulunuz.

3. $\frac{x+y}{3} = \frac{z-y}{7} = \frac{x-z}{8}$

olduğuna göre $\frac{y}{z}$ oranını bulunuz.

4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 5$ ve

$\frac{5a+16}{5b+4d} = 5$

olduğuna göre c değerini bulunuz.

5. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri sırasıyla 7, 6 ve 5 ile doğru orantılı olduğuna göre üçgenin her bir iç açısının ölçüsünü bulunuz.

6. A, B ve C maddelerinden sırasıyla 3, 4 ve 24 sayıları ile ters orantılı olacak biçimde karıştırılıp elde edilen 495 gramlık karışımdaki B maddesinin miktarını bulunuz.

7. $a + 1$ ile $b - 3$ sayıları doğru orantılıdır. $a = 8$ iken $b = 6$ olduğuna göre $a = 14$ iken b'nin alacağı değeri bulunuz.

8. $x - 1$ ile $y + 2$ ters orantılı, $x - 1$ ile z doğru orantılıdır.

$x = 4$, $y = 4$ iken $z = 9$ ise $x = 9$, $z = 8$ iken y'nin alacağı değeri bulunuz.

9. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{9}{5}$

olduğuna göre $\frac{a+b}{a+2b}$ ifadesinin değerini bulunuz.

10. 286 tane bilye 2 ve 3 ile doğru, 5 ile ters orantılı olacak biçimde 3 arkadaş arasında bölüştürülüyor.

Buna göre her bir arkadaşa kaçar tane bilye düştüğünü bulunuz.

11. Un, yağ ve şeker ağırlık bakımından sırasıyla 7, 4 ve 3 ile doğru orantılı olacak biçimde karıştırılarak 5600 g pasta hamuru yapılmak istenmektedir.

Buna göre bu pasta hamurunda kaç kg un kullanıldığını bulunuz.

3.5.2. Denklemler ve Eşitsizliklerle İlgili Problemler

Matematikte karşılaştığımız bir problemi çözmek için aşağıdaki yolların uygulanması bize kolaylık sağlar.

- ✔ Bir problem dikkatli okunmalı ve iyi anlaşılmalıdır.
- ✔ Bir problemde mümkün olduğunca az bilinmeyen kullanılmalıdır.
- ✔ Probleme uygun cebirsel ifade yazılmalıdır.
- ✔ Yazılan cebirsel ifade çözülerek istenilen elde edilmelidir.

Aşağıdaki tabloda bazı ifadeler ve bu ifadelerin cebirsel karşılıkları verilmiştir. İnceleyelim.

Sözel İfade	Cebirsel İfade
Bir sayının 3 katı	$3x$
Bir sayının 2 eksiği	$x - 2$
Bir sayının 2 katının 3 eksiği	$2x - 3$
Bir sayının yarısının 4 fazlası	$\frac{x}{2} + 4$
İki sayının toplamı 18'dir.	$x + y = 18$
Bir sayının 4 katının 5 eksiği 8'den büyüktür.	$4x - 5 > 8$
Bir sayının karesi kendisinden büyük veya kendisine eşittir.	$x^2 \geq x$
İki sayının kareleri toplamı 20'dir.	$x^2 + y^2 = 20$
Ayşe'nin kalemlerinin sayısının üçte biri ile dörtte birinin toplamı	$\frac{x}{3} + \frac{x}{4}$
Barış'ın yaşının 8 fazlası	$x + 8$

Örnek

Bir sayının 3 katının 4 eksiği 17 olduğuna göre bu sayıyı bulalım.

Çözüm

Sayıya x dersek

$3x - 4 = 17 \Rightarrow 3x = 21$

$x = 7$ olarak elde edilir.

Örnek

Bir sayının 2 katının 3 fazlası aynı sayının 3 katının 4 eksiğine eşit olduğuna göre bu sayıyı bulalım.

Çözüm

Sayıya x diyelim.

$2x + 3 = 3x - 4 \Rightarrow x = 7$ olarak elde edilir.

Örnek

5 TL ve 10 TL’den oluşan bir kumbaradaki paranın tutarı 235 TL dir. 5 TL ve 10 TL’lik paraların toplamı 35 adet olduğuna göre kumbarada kaç tane 5 TL olduğunu bulalım.

Çözüm

5 TL lik paraların sayısına x dersek

10 TL lik paraların sayısı $35 - x$ olur. Bu durumda

$$5 \cdot x + 10(35 - x) = 235 \Rightarrow 5x + 350 - 10x = 235$$

$$350 - 5x = 235$$

$$350 - 235 = 5x$$

$$115 = 5x \Rightarrow x = 23 \text{ olarak bulunur .}$$

Örnek

Bir sınıftaki öğrenciler sıralara üçerli otururlarsa 7 öğrenci ayakta kalıyor. Dörderli otururlarsa bir sıra boş kalıyor.

Buna göre sınıfta kaç öğrenci olduğunu bulalım.

Çözüm

Sınıftaki sıra sayısına x diyelim.

Öğrenci sayısı $3x + 7$ veya $4(x - 1)$ olacaktır.

Öğrenci sayısı her iki durumda da eşit olacağından

$$3x + 7 = 4(x - 1) \Rightarrow 3x + 7 = 4x - 4$$

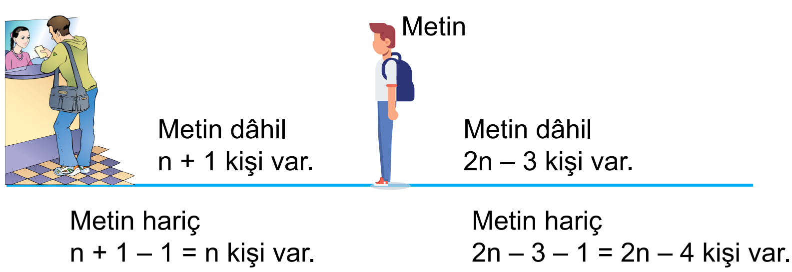
$$11 = x \text{ olarak bulunur.}$$

Bu durumda sınıftaki öğrenci sayısı $3 \cdot 11 + 7 = 40$ olarak elde edilir.

Örnek

Tiyatroya giden Metin bilet almak için sıraya girmiştir. Metin bilet kuyruğunda baştan $(n + 1)$. sırada, sondan ise $(2n - 3)$. sıradadır. Bilet kuyruğunda toplam 39 kişi olduğuna göre Metin’in baştan kaçıncı kişi olduğunu bulalım.

Çözüm



Buna göre kuyrukta

$$n + \underbrace{1}_{\text{Metin}} + 2n - 4 = 39 \Rightarrow 3n - 3 = 39 \Rightarrow 3n = 42 \Rightarrow n = 14 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda Metin baştan 14 + 1= 15. kişidir.

Örnek

Samet her gün bir önceki gün çözdüğü soru sayısından 27 tane daha fazla soru çözmektedir. Samet 7 gün sonra toplam 1253 tane soru çözdüğüne göre Samet'in ilk gün çözdüğü soru sayısını bulalım.

Çözüm

Samet'in ilk gün çözdüğü soru sayısına x diyelim.

1. gün	2. gün	3. gün	4. gün	5. gün	6. gün	7. gün
x	$x + 27$	$x + 2 \cdot 27$	$x + 3 \cdot 27$	$x + 4 \cdot 27$	$x + 5 \cdot 27$	$x + 6 \cdot 27$

$$\text{Toplam} = x + x + 27 + x + 2 \cdot 27 + x + 3 \cdot 27 + x + 4 \cdot 27 + x + 5 \cdot 27 + x + 6 \cdot 27 = 1253$$

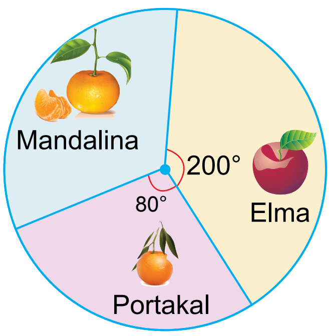
$$7x + 27 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1253$$

$$7x + 27 \cdot 21 = 1253$$

$$7x = 686$$

$x = 98$ olarak elde edilir.

Örnek



Bir meyve halindeki elma, portakal ve mandalinanın ağırlıkça dağılımını gösteren daire grafiği yanda verilmiştir. Halde bu üç meyveden toplam 18 ton bulunduğuna göre her bir meyveden kaçar ton olduğunu bulalım.

Çözüm

Soruyu orantı yardımıyla çözelim.

Tüm meyvelere karşılık gelen merkez açının ölçüsü : 360°

Elmalara (e) karşılık gelen merkez açının ölçüsü : 200°

Portakallara (p) karşılık gelen merkez açının ölçüsü : 80°

Mandalinalara (m) karşılık gelen merkez açının ölçüsü : 360° – (200° + 80°) = 80°dir.

Buna göre

$$\frac{18}{360} = \frac{e}{200} \Rightarrow e = \frac{\overset{1}{\cancel{18}} \cdot 200}{\underset{20}{\cancel{360}}} = \frac{\overset{10}{\cancel{200}}}{\underset{1}{\cancel{20}}} = 10 \text{ ton}$$

$$\frac{18}{360} = \frac{p}{80} \Rightarrow p = \frac{\overset{1}{\cancel{18}} \cdot 80}{\underset{20}{\cancel{360}}} = \frac{\overset{4}{\cancel{80}}}{\underset{1}{\cancel{20}}} = 4 \text{ ton}$$

$$\frac{18}{360} = \frac{m}{80} \Rightarrow m = \frac{\overset{1}{\cancel{18}} \cdot 80}{\underset{20}{\cancel{360}}} = \frac{\overset{4}{\cancel{80}}}{\underset{1}{\cancel{20}}} = 4 \text{ ton olarak bulunur.}$$

Örnek

Yanda verilen sütun grafiği Elif Hanım'ın kümesindeki hayvanların sayısını göstermektedir.

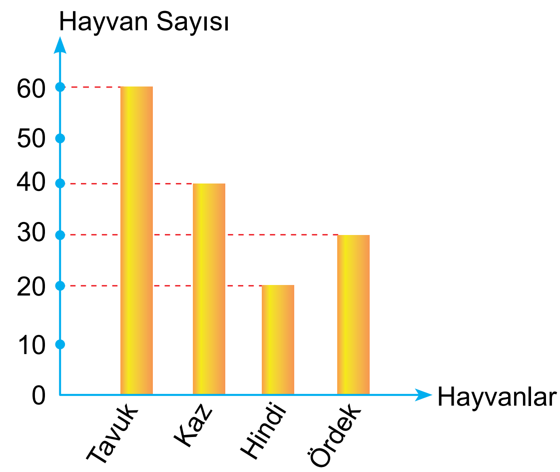
Buna göre aşağıda istenenleri bulalım.

a) Tavukların sayısının hindilerin sayısına oranı kaçtır?

b) Elif Hanım'ın kümesinde toplam kaç hayvan vardır?

c) Elif Hanım'ın kümesindeki hayvanların ayaklarının sayıları toplamı kaçtır?

Grafik: Kümesteki Hayvan Sayısı



Çözüm:

a) Grafiği incelediğimizde 60 tavuk, 20 hindi olduğu görülmektedir.

Buna göre $\frac{\text{tavuk sayısı}}{\text{hindi sayısı}} = \frac{60}{20} = 3$ elde edilir.

b) Kümeste toplam 60 + 40 + 20 + 30 = 150 hayvan vardır.

c) Hayvanların her birinin 2 ayağı olduğundan toplam ayak sayısı $2 \cdot 150 = 300$ olarak bulunur.

Örnek

3 katının 2 eksiğinin yarısı 8 olan sayıyı bulalım.

Çözüm:

Sayıya x diyelim. Buna göre

$\frac{3 \cdot x - 2}{2} = 8 \Rightarrow 3x - 2 = 16 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$ olarak bulunur.

Örnek

Bir kesrin değeri $\frac{4}{5}$'tir. Bu kesrin payından 10 çıkarıp paydasına 7 eklediğimizde kesrin değeri $\frac{1}{2}$ oluyor ise kesrin pay ve paydasının toplamını bulalım.

Çözüm:

Kesrin değeri $\frac{4}{5}$ olduğuna göre kesri $\frac{4x}{5x}$ biçiminde yazabiliriz.

Bu durumda

$\frac{4x - 10}{5x + 7} = \frac{1}{2} \Rightarrow 8x - 20 = 5x + 7 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9$ bulunur.

Bu durumda kesir $\frac{4x}{5x} = \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{36}{45}$ bulunur.

Pay ve paydasının toplamı 36 + 45 = 81 olarak elde edilir.

Örnek

Bir telin ucundan $\frac{1}{10}$'u kesilince orta noktası eski durumuna göre 1 m kayıyor. Buna göre telin uzunluğunu bulalım.

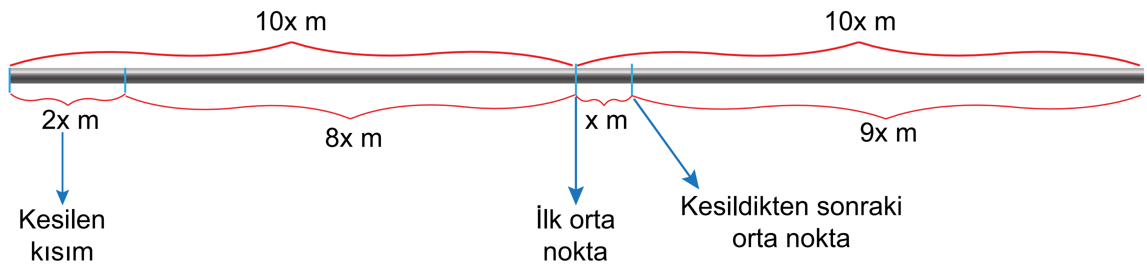
Çözüm

Telin uzunluğuna 20x m diyelim.

$\frac{1}{10}$'u kesilince geriye $20x - 20x \cdot \frac{1}{10} = 18x$'i kalır.

Telin ilk hâlinde orta noktanın telin uçlarına uzaklığı 10x m, kesildikten sonraki orta noktasının kesilen ipin uç noktalarına uzaklığı 9x m olur.

Bu verilere uygun şekli oluşturalım.



Bu durumda x = 1 m ve telin uzunluğu : $20 \cdot 1 = 20$ m olarak bulunur.

Örnek

Bir deponun yarısı su ile doludur. Deponun boş kısmının $\frac{3}{4}$'ü kadar su ilave edildiğinde depoda 21 ton su olduğuna göre depo tam dolu iken içinde kaç ton su olacağını bulalım.

Çözüm

Deponun tamamı x ton su alsın. Bu durumda yarısı $\frac{x}{2}$ ton su alır.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{3}{4} = 21 \Rightarrow \underset{(4)}{\frac{x}{2}} + \frac{3x}{8} = 21$$

$$\frac{4x + 3x}{8} = 21 \Rightarrow \frac{7x}{8} = 21$$

x = 24 ton elde edilir.

Örnek

Bir çiftlikteki koyunlarla tavukların sayısının toplamı 112, bu hayvanların ayak sayıları toplamı 288 olduğuna göre çiftlikteki tavukların sayısını bulalım.

Çözüm

Bir koyunun 4, bir tavuğun 2 ayağı vardır.

Tavukların sayısına x dersek koyunların sayısı 112 – x olur. Bu durumda

$$2 \cdot x + 4 \cdot (112 - x) = 288 \Rightarrow 2x + 448 - 4x = 288$$

$$2x = 160$$

x = 80 olarak bulunur.

Örnek

Ayhan parasının $\frac{3}{5}$'i ile kitap, $\frac{1}{6}$'sı ile kalem alıyor. Ayhan'ın geriye 35 TL'si kaldığına göre başlangıçta Ayhan'ın kaç lirası olduğunu bulalım.

Çözüm

Ayhan'ın parasına x diyelim.

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot\frac{3}{5}\text{'i ile kitap} \\ \\ x\cdot\frac{1}{6}\text{'sı ile kalem almıştır.}\end{array}\right\} \quad x-\left(\frac{3x}{5}+\frac{x}{6}\right)=35 \Rightarrow x-\frac{23x}{30}=35 \Rightarrow \frac{7x}{30}=35$$

x = 150 TL elde edilir.

Örnek

Kader ile Hilal'in bilyelerinin sayısı eşittir. Kader, Hilal'e 5 bilye verirse Hilal'in bilyelerinin sayısının Kader'in bilyelerinin sayısına oranı $\frac{5}{3}$ oluyor.

Buna göre Kader'in bilyelerinin sayısını bulalım.

Çözüm

Kader'in bilyelerinin sayısına x dersek Hilal'in bilyelerinin sayısı da x olur. Kader, Hilal'e 5 bilye verirse Kader'in $x-5$, Hilal'in ise $x+5$ tane bilyesi olur. Buna göre

$$\frac{x+5}{x-5}=\frac{5}{3} \Rightarrow 3x+15=5x-25 \Rightarrow 2x=40 \Rightarrow x=20$$ olarak bulunur.

Örnek

4 arkadaşın yaşları toplamı 70'tir. Bu 4 arkadaşın 4 yıl önceki yaşları toplamının 4 yıl sonraki yaşları toplamına oranını bulalım.

Çözüm

4 yıl önce her biri 4 yaş daha küçük olacağından

4 arkadaşın 4 yıl önceki yaşları toplamı $70-4\cdot4=54$ olur.

4 yıl sonra her birinin yaşı 4 artacağından 4 arkadaşın 4 yıl sonraki yaşları toplamı $70+4\cdot4=86$ olur. Bu durumda

$$\frac{\text{4 arkadaşın 4 yıl önceki yaşları toplamı}}{\text{4 arkadaşın 4 yıl sonraki yaşları toplamı}}=\frac{54}{86}=\frac{27}{43}$$ olarak bulunur.

Örnek

Bir babanın yaşı 2 çocuğunun yaşları toplamından 13 fazladır. Kaç yıl sonra babanın yaşının iki çocuğunun yaşları toplamından 10 fazla olacağını bulalım.

Çözüm

	Baba	İki çocuk
Bugünkü yaşları :	x + 13	x
k yıl sonraki yaşları :	x + 13 + k	x + 2k olur. Bu durumda

$x+13+k=x+2k+10 \Rightarrow k=3$ elde edilir.

Örnek

Bir annenin yaşı oğlunun yaşının 4 katına eşittir. 16 yıl sonra annenin yaşı oğlunun yaşının 2 katına eşit olacağına göre annenin bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

		Anne	Oğlu
Bugünkü yaşları	:	4x	x
16 yıl sonraki yaşları	:	4x + 16	x + 16

$4x + 16 = 2(x + 16) \Rightarrow 4x + 16 = 2x + 32$

$2x = 16 \Rightarrow x = 8$ olur.

Bu durumda annenin bugünkü yaşı $4 \cdot 8 = 32$ olarak bulunur.

Örnek

İki kardeşin 10 yıl önceki yaşları oranı $\frac{7}{6}$'dır. 10 yıl sonra bu iki kardeşin yaşları oranı $\frac{17}{16}$ olacağına göre büyük kardeşin bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

İki kardeşin 10 yıl önceki yaşları oranı $\frac{7}{6} = \frac{7k}{6k}$ olsun.

		Büyük kardeş	Küçük kardeş
10 yıl önceki yaşları	:	7k	6k
Bugünkü yaşları	:	7k + 10	6k + 10
10 yıl sonraki yaşları	:	7k + 10 + 10	6k + 10 + 10

Bu durumda

$\frac{7k+20}{6k+20} = \frac{17}{16} \Rightarrow 112k + 320 = 102k + 340$

$10k = 20 \Rightarrow k = 2$ bulunur.

Buna göre büyük kardeş bugün $7 \cdot 2 + 10 = 24$ yaşında olur.

Örnek

İki kardeşin bugünkü yaşları farkı 7'dir. Büyük kardeş küçük kardeşin yaşında iken küçük kardeş 5 yaşında olduğuna göre küçük kardeşin bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

Büyük kardeşin yaşına x dersek küçük kardeş x – 7 yaşında olur.

		Büyük kardeş	Küçük kardeş
Bugünkü yaşları	:	x	x – 7
Büyük kardeş küçük kardeşin yaşında iken	:	x – 7	5

Yaşları farkı hep aynı olacağından

$x - (x - 7) = x - 7 - 5$

$x - x + 7 = x - 12 \Rightarrow x = 19$ bulunur.

Bu durumda küçük kardeş bugün $19 - 7 = 12$ yaşında olur.

Örnek

Ece'nin şimdiki yaşı babası ile annesinin yaşları farkının 6 katına eşittir. 12 yıl sonra Ece'nin yaşı annesi ile babasının yaşları farkının 9 katı olacağına göre Ece'nin bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

Annesi ile babasının yaşları farkına x dersek Ece'nin yaşı 6x olur.

12 yıl sonra anne ile babanın yaşları farkı değişmeyeceğine göre

12 yıl sonra Ece'nin yaşı $6x + 12 = 9x$ olacaktır.

$6x + 12 = 9x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$ bulunur.

Bu durumda Ece'nin bugünkü yaşı $6 \cdot 4 = 24$ olarak elde edilir.

Örnek

80 sayısının %25'ini bulalım.

Çözüm

Bir x sayısının %y'si $x \cdot \frac{y}{100}$ olarak hesaplanır.

Buna göre 80 sayısının %25'i

$$80 \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{25}}}{\underset{4}{\cancel{100}}} = \frac{\overset{20}{\cancel{80}} \cdot}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 20 \text{ olarak elde edilir.}$$

Örnek

Bir a sayısının %75'inin %40'ı, b sayısının %15'ine eşittir. Buna göre a sayısının, b sayısının yüzde kaçına eşit olduğunu bulalım.

Çözüm

$$a \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{75}}}{100} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{40}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{15}}}{100} \cdot b$$

$$a \cdot \frac{\cancel{5}}{\underset{50}{\cancel{100}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{5}} = \frac{1}{100} \cdot b \Rightarrow a = \frac{50}{100} \cdot b$$ olduğundan a sayısı b sayısının %50'sine eşittir.

Örnek

x ve y pozitif tam sayı olmak üzere bir x sayısının %30'u, y sayısının $\frac{2}{5}$'ine eşit ise x + y toplamının <u>en az</u> kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

$$x \cdot \frac{30}{100} = y \cdot \frac{2}{\underset{(20)}{5}} \Rightarrow x \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{30}}}{\cancel{100}} = y \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{40}}}{\cancel{100}} \Rightarrow 3x = 4y = 12k \text{ dersek}$$

$$x = 4k, \quad y = 3k$$

$k = 1$ için $x + y$ toplamı en az olacağından

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \cdot 1 = 4 \\ y = 3 \cdot 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = 4 + 3 = 7 \text{ elde edilir.}$$

Örnek

Bir sayının %20'sinin %25'i aynı sayının yüzde kaçına eşittir?

Çözüm

Sayıya x diyelim. Bu durumda

$$x \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} \cdot \frac{25}{100} = \frac{x}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{100} = x \cdot \frac{5}{100}$$ olduğundan sayının %5'ine eşit olur.

Örnek

Hangi sayının %20'si 48'dir?

Çözüm:

Sayıya x diyelim. Bu durumda

$$x \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} = 48 \Rightarrow x = 5 \cdot 48 = 240$$ elde edilir.

Örnek

Hazal harçlığının %40'ını kantinde harcamış, %25'i ile kendine bir kitap almıştır. Hazal'ın geriye 105 lirası kaldığına göre Hazal'ın harçlığının kaç lira olduğunu bulalım.

Çözüm

Hazal'ın harçlığına x diyelim. Bu durumda

Kantinde harcanan tutar : $x \cdot \frac{40}{100}$

Kitap için ödenen tutar : $x \cdot \frac{25}{100}$

Kalan : $\underset{(100)}{\frac{x}{1}} - \left(\frac{40x}{100} + \frac{25x}{100}\right) = 105$

$$\frac{100x - 65x}{100} = 105 \Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{35}}x}{100} = \overset{3}{\cancel{105}} \Rightarrow x = 300 \text{ TL}$$ olarak bulunur.

Örnek

Kemal Bey 5 tanesini 7,5 TL'ye aldığı limonların 3 tanesini 6 TL'ye sattığına göre Kemal Bey'in bir limondan kaç lira kazandığını bulalım.

Çözüm

Bir limonun alış ve satış fiyatını bulacağız. Satış fiyatından alış fiyatını çıkardığımızda aradaki fark Kemal Bey'in bir limondan kazandığı parayı verecektir.

5 limon — 7,5 TL	3 limon — 6 TL
1 limon — x TL	1 limon — y TL
Doğru orantı	Doğru orantı
5x = 7,5	3y = 6
x = 1,5 TL ⟶ Alış fiyatı	y = 2 TL ⟶ Satış fiyatı

Bu durumda Kemal Bey bir limondan 2 – 1,5 = 0,5 TL kazanmıştır.

Örnek

30 liraya alınan bir ürün 36 liraya satılmıştır. Buna göre bu üründen yüzde kaç kâr elde edildiğini bulalım.

Çözüm

Alış fiyatı (maliyet), satış fiyatı ve kâr arasında "Kâr = Satış fiyatı – alış fiyatı" biçiminde bir ilişki vardır.

Bu soruyu oran orantı yardımıyla çözelim.

30 TL'den 6 TL kâr elde edilirse
100 TL'den x TL kâr elde edilir.

$$\overset{5}{\cancel{30}} \cdot x = 100 \cdot \overset{1}{\cancel{6}} \Rightarrow x = 20$$

Bu durumda %20 kâr edilmiştir.

Örnek

Bir satıcı 48 çift çorabı a liraya almış, bir çiftini $\frac{a}{32}$ liraya satmıştır.

Buna göre satıcının bir çift çorabı yüzde kaç kârla sattığını bulalım.

Çözüm

48 çift çorabı a liraya alırsa bir çift çorabı $\frac{a}{48}$ liraya almış olur.

Satıcının bir çift çorabı %x kârla sattığını düşünelim.

Bu durumda $\text{Kâr} = \frac{a}{48} \cdot \frac{x}{100}$ = Satış fiyatı – alış fiyatı

$$\Rightarrow \frac{a}{48} \cdot \frac{x}{100} = \underset{(3)}{\frac{a}{32}} - \underset{(2)}{\frac{a}{48}} \Rightarrow \frac{a}{\underset{1}{\cancel{48}}} \cdot \frac{x}{100} = \frac{3a - 2a}{\underset{2}{\cancel{96}}}$$

$$\frac{\cancel{a}x}{\underset{50}{\cancel{100}}} = \frac{\cancel{a}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow x = 50 \text{ olur.}$$

Bu durumda satıcı bir çift çorabı %50 kârla satmıştır.

Örnek

Bir ürüne etiket fiyatı üzerinden önce %15 kâr eklenmiş, daha sonra kârlı fiyat üzerinden %20 daha kâr eklenerek 276 TL'ye satılmıştır. Buna göre ürünün etiket fiyatının kaç lira olduğunu bulalım.

Çözüm

Kâr-zarar problemlerinde fiyatın belli olmadığı durumlarda fiyatı 100x TL gibi bir değer alırsak hem işlemi kolaylaştırmış hem de kesirli işlemlerden kurtulmuş oluruz.

Ürünün etiket fiyatını 100x olarak alalım.

İlk kârlı satış fiyatı : $100x + \cancel{100}x \cdot \frac{15}{\cancel{100}} = 115x$ olur.

İkinci kârlı satış fiyatı : $115x + 115x \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} = 115x + \frac{\overset{23}{\cancel{115}}x}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 138x$ olacaktır.

Buradan $138x = 276 \Rightarrow x = 2$ bulunur.

Bu durumda ürünün etiket fiyatı : $100 \cdot 2 = 200$ TL olarak bulunur.

Örnek

10 tanesini 200 TL'den aldığı kitapların 8 tanesini 192 TL'den satan bir kitapçının 320 TL kâr etmesi için bu kitaplardan kaç tane satması gerektiğini bulalım.

Çözüm

10 tanesi 200 TL'ye alınırsa 1 tanesi $\frac{200}{10} = 20$ TL'ye alınmıştır.

8 tanesi 192 TL'ye satılıyor ise 1 tanesi $\frac{192}{8} = 24$ TL'ye satılmıştır.

1 kitaptan elde edilen kâr : 24 – 20 = 4 TL olur. Bu durumda

kitapçının 320 TL kâr etmesi için $\frac{320}{4} = 80$ tane kitap satması gerekir.

Örnek

Bir mağazadaki bir ürünün maliyeti a TL, satış fiyatı b TL'dir. a ile b arasında $b = 7a - 438$ biçiminde bir ilişki vardır. Mağaza sahibinin bu satıştan kâr elde edebilmesi için ürünün maliyetinin en az kaç lira olması gerektiğini bulalım. (a bir pozitif tam sayıdır.)

Çözüm

"Kâr = Satış fiyatı – alış fiyatı" ve üründen kâr elde edebilmesi için kâr > 0 olmalıdır. Buna göre

Kâr = Satış fiyatı – alış fiyatı $\Rightarrow$ $b - a > 0$

$$7a - 438 - a > 0$$

$6a > 438 \Rightarrow a > 73$ olduğuna göre

ürünün maliyeti en az 74 lira olmalıdır.

Örnek

Bir şirket bir hayır kurumuna yardım yapmak için hayır kurumunun gösterdiği bir alanda hatıra ormanı kampanyası düzenleyecektir. Kampanyadaki bütün gelir bu hayır kurumuna bağışlanacaktır. Bir kişinin kampanyaya katılabilmesi için 10 TL bağış yapması daha sonra her bir fidan için 4 TL ödemesi gerekmektedir.

Kampanyaya katılmak isteyen Damla annesinden 70 TL almıştır. Bu durumda Damla'nın en fazla kaç fidan dikebileceğini bulalım.

Çözüm

Bağış ücreti + 4 · fidan sayısı ≤ 70 olmalıdır.

Damla'nın dikeceği fidan sayısına x dersek

$10 + 4 \cdot x \leq 70 \Rightarrow 4x \leq 60 \Rightarrow x \leq 15$ olacağından Damla en fazla 15 fidan dikebilecektir.

Örnek

Tuz oranı %40 olan 140 g tuzlu sudaki tuz miktarını bulalım.

Çözüm

Tuz miktarı: $140 \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{40}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} = \overset{28}{\cancel{140}} \cdot \frac{2}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 28 \cdot 2 = 56$ g olarak bulunur.

Örnek

Şeker oranı %50 olan 140 gram şekerli su ile şeker oranı %60 olan 60 gram şekerli su karıştırılıyor. Buna göre elde edilen karışımın şeker oranını bulalım.

Çözüm

Birinci karışımdaki şeker miktarı : $140\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{50}}}{\underset{2}{\cancel{100}}}=\frac{140}{2}=70\,g$

Karışımdaki toplam şeker miktarı : $60\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{60}}}{\underset{5}{\cancel{100}}}=\overset{12}{\cancel{60}}\cdot\frac{3}{\underset{1}{\cancel{5}}}=36\,g$

Toplam karışımdaki şeker miktarı : 70 + 36 = 106 g

Toplam karışım miktarı : 140 + 60 = 200 g

200 g karışımda 106 g şeker varsa

100 g karışımda x g şeker vardır.

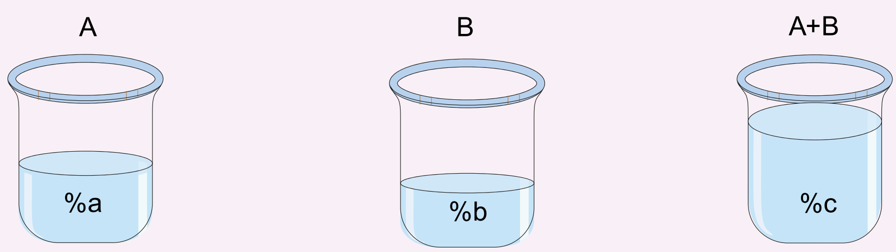
Doğru orantı

$x\cdot\overset{2}{\cancel{200}}=\overset{1}{\cancel{100}}\cdot 106 \Rightarrow 2x=106 \Rightarrow x=53$ g bulunur. Bu durumda

karışımın son hâlinde şeker oranı %53 olur.

Bilgi

Bu türden karışım problemleri aşağıdaki şekilde de çözülebilir.



A karışımındaki x maddesinin oranı %a

B karışımındaki x maddesinin oranı %b

Toplam karışımdaki (A + B) x maddesinin oranı %c

olmak üzere

$A\cdot\frac{a}{100}+B\cdot\frac{b}{100}=(A+B)\cdot\frac{c}{100}$ olur.

Şimdi yukarıda verilen örneğin çözümünü bu kurala göre yapalım.

A karışımı : 140 g ve şeker oranı %50

B karışımı : 60 g ve şeker oranı %60

Toplam karışım : (140 g + 60 g) = 200 g ve şeker oranı %x olsun. Bu durumda

$140\cdot\frac{50}{\cancel{100}}+60\cdot\frac{60}{\cancel{100}}=200\cdot\frac{x}{\cancel{100}}$

$\underset{35}{\cancel{7000}}+\underset{18}{\cancel{3600}}=\underset{1}{\cancel{200}}\cdot x \Rightarrow 35+18=x \Rightarrow 53=x$ bulunur.

Örnek

%30'u tuz olan 126 g tuzlu suya kaç g saf su eklenirse karışımın tuz oranının %27 olacağını bulalım.

Çözüm

x g saf su eklediğimizi düşünelim. Saf suyun tuz oranı %0 olur. Bu durumda

$$126\cdot\frac{\overset{10}{\cancel{30}}}{\cancel{100}} + x\cdot\frac{0}{100} = (126+x)\cdot\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\cancel{100}}$$

$$126\cdot 10 = (126 + x)\cdot 9$$

$$1260 = 1134 + 9x$$

$126 = 9x \Rightarrow x = 14$ g saf su eklenmelidir.

Örnek

Şeker oranı %20 olan 300 g şekerli sudan 60 g su buharlaştırıldığında kalan karışımın şeker oranını bulalım.

Çözüm

Yeni karışımın şeker oranı %x olsun. Buharlaşan suyun şeker oranı %0'dır. Buna göre

$$300\cdot\frac{20}{\cancel{100}} - 60\cdot\frac{0}{100} = (300-60)\cdot\frac{x}{\cancel{100}}$$

Su buharlaştığı için çıkarma işlemi yaptık.

$\overset{5}{\cancel{300}}\cdot 20 = \overset{4}{\cancel{240}}\cdot x \Rightarrow 5\cdot\overset{5}{\cancel{20}} = \overset{1}{\cancel{4}}\cdot x \Rightarrow x = 25$ bulunur.

Örnek

Hasan bir işi 10 günde, Ahmet ise aynı işi 15 günde bitirebilmektedir. İkisi birlikte çalıştıklarında aynı işi kaç günde bitirebileceklerini bulalım.

Çözüm

Hasan işin tamamını 10 günde bitirirse bir günde işin $\frac{1}{10}$'unu bitirir.

Ahmet işin tamamını 15 günde bitirirse bir günde işin $\frac{1}{15}$'unu bitirir.

İkisi birlikte bir günde işin $\underset{(3)}{\frac{1}{10}} + \underset{(2)}{\frac{1}{15}} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$'sını bitirirler.

İkisi birlikte işin tamamını x günde bitirsinler.

1 günde $\quad \frac{1}{6}$'sını

x günde $\quad \frac{6}{6} = 1$ (işin tamamı)

Doğru orantı

$1\cdot 1 = x\cdot\frac{1}{6} \Rightarrow x = 6$ bulunur.

Bilgi

Bir işin tamamını A işçisi a saatte, B işçisi b saatte ve birlikte c saatte bitirsinler.

Bu durumda A işçisi bir saatte işin $\frac{1}{a}$'sını, B işçisi bir saatte işin $\frac{1}{b}$'sini, birlikte bir saatte işin $\frac{1}{c}$'sini yaparlar.

Bu durumda a, b ve c arasında $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ ilişkisi vardır.

Ayrıca A işçisi bir işi a saatte yaparsa bu işçi n saat çalışırsa işin $\frac{n}{a}$'lık kısmını yapar.

Örnek

Ali bir duvarı 20 günde, Mesut ise aynı duvarı 30 günde boyayabiliyor. İkisi birlikte çalışırlarsa duvarı kaç günde boyayabileceklerini bulalım.

Çözüm

Ali ve Mesut duvarı x günde boyayabilsinler.

Bu durumda; $\underset{(3)}{\frac{1}{20}}+\underset{(2)}{\frac{1}{30}}=\frac{1}{x}$

$$\frac{3+2}{60}=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{12}{\cancel{60}}}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{x} \Rightarrow x = 12 \text{ elde edilir.}$$

Örnek

Emine bir halının $\frac{2}{3}$'ünü 12 günde, Emel ise aynı halının $\frac{1}{5}$'ini 4 günde dokuyabiliyor. Bu durumda Emine ve Emel'in birlikte halıyı kaç günde dokuyabileceklerini bulalım.

Çözüm

Emine halının $\frac{2}{3}$'ünü 12 günde dokuyor.
Tamamını $1=\frac{3}{3}$'ünü x günde dokur.
Doğru orantı
$\Rightarrow x \cdot \frac{2}{3}=12 \Rightarrow x = 18$ günde dokur.

Emel halının $\frac{1}{5}$'ini 4 günde dokuyor.
Tamamını $1=\frac{5}{5}$'ini y günde dokur.
Doğru orantı
$\Rightarrow y \cdot \frac{1}{5}=4 \Rightarrow y = 20$ günde dokur.

Birlikte halının tamamını t günde dokusunlar. Bu durumda;

$$\frac{1}{t}=\underset{(10)}{\frac{1}{18}}+\underset{(9)}{\frac{1}{20}}$$

$$\frac{1}{t}=\frac{10+9}{180}=\frac{19}{180}$$

$t=\frac{180}{19}$ olarak bulunur.

Örnek

Bir işi Barış 6 günde Burak ise 12 günde bitirebiliyor. İkisi birlikte 2 gün çalıştıktan sonra Barış işi bırakıyor. Kalan işi Burak'ın tek başına kaç günde bitirebileceğini bulalım.

Çözüm

Barış işin tamamını 6 günde bitirebiliyorsa 1 günde işin $\frac{1}{6}$'sını 2 günde $\frac{2}{6}$'sını bitirir.

Burak kalan işi t günde bitirirse toplamda t + 2 gün çalışmış olacaktır.

Burak işin tamamını 12 günde bitirirse bir günde işin $\frac{1}{12}$'sini t + 2 günde işin $\frac{t+2}{12}$'sini bitirir.

Bu durumda $\frac{2}{\underset{(2)}{6}}+\frac{t+2}{12}=1$ (işin tamamı) $\Rightarrow \frac{4}{12}+\frac{t+2}{12}=1$

$t + 6 = 12 \Rightarrow t = 6$ bulunur.

Örnek

Betül ve Birgül bir işi birlikte 60 günde bitirebiliyorlar. Birlikte 20 gün çalıştıktan sonra Betül işten ayrılıyor. Kalan işi Birgül tek başına 60 günde bitirebiliyor. Buna göre Birgül'ün işin tamamını tek başına kaç günde bitirebileceğini bulalım.

Çözüm

İşin tamanını Birgül x günde, Betül y günde bitirsin.

Bir günde birlikte işin $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{60}$ kadarlık kısmını bitirirler.

20 gün birlikte çalıştıklarında işin

$20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=20\cdot\frac{1}{60}=\frac{1}{3}$'ünü bitirirler. İşin $\frac{2}{3}$'si kalmıştır.

Birgül işin $\frac{2}{3}$'sini 60 günde bitirebilmektedir. Bu durumda

$\frac{2}{3}$'ünü 60 günde

Tamamını = $\frac{3}{3}$'ü x günde

Doğru orantı

$\Rightarrow x\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=\frac{3}{\cancel{3}}\cdot 60$

$x = 90$ bulunur.

Bu durumda Birgül işin tamamını tek başına 90 günde bitirir.

Örnek

840 km'lik bir yolu sabit hızla 7 saatte alan bir aracın bir saatteki hızını bulalım.

Çözüm

İşlemi orantı yardımıyla yapalım.

840 km yolu 7 saatte alırsa

x km yolu 1 saatte alır.

Doğru orantı

$\Rightarrow 7x = 840$

$x = 120$ bulunur.

Bu durumda aracın hızı 120 km/sa. olarak bulunur.

Bilgi

Yol, hız ve zaman arasında Yol = hız · zaman ilişkisi vardır.

$$x = v \cdot t$$

İşlemi bu kurala göre yapalım.

$840 = v \cdot 7 \Rightarrow v = \frac{840}{7} = 120$ km/sa. olarak elde edilir.

Örnek

A ve B şehirleri arası 360 km'dir. Semra Hanım özel aracıyla A şehrinden B şehrine sabit hızla 5 saatte gidip tekrar sabit hızla 4 saatte A şehrine dönmüştür.

Buna göre Semra Hanım'ın aracının ortalama hızını bulalım.

Çözüm

Bilgi

$\text{Ortalama Hız} = V_{ort} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}$ ilişkisi vardır.

Bu durumda Semra Hanım'ın ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}} = \frac{360+360}{5+4} = \frac{720}{9} = 80\,\text{km/sa.}$$ olarak bulunur.

Örnek

Hızı V = 144 km/sa. olan bir hareketlinin hızını metre/saniye (m/sn.) cinsinden yazalım.

Çözüm

1 km = 1000 m, 1 saat = 3600 saniyedir. İşlemi iki farklı yolla yapalım.

1. Yol :

$$V = 144\,\frac{\text{km}}{\text{sa.}} = 144 \cdot \frac{\cancelto{5}{1000}}{\cancelto{18}{3600}} = \cancelto{8}{144} \cdot \frac{5}{\cancelto{1}{18}}$$

= 40 m/sn. olarak bulunur.

2. Yol :

İşlemi orantı yoluyla yapalım.

1 km = 1000 m $\Rightarrow$ 144 km = 144 000 m olur. Bu durumda

144 000 m yolu 3600 sn. alırsa

x m yolu 1 sn. alır.

Doğru orantı

$\Rightarrow 3600 \cdot x = 144000$

x = 40 bulunur.

Bu durumda 144 km/sa. = 40 m/sn. olarak elde edilir.

Örnek

Düzenli olarak yürüyüş yapan Mehtap, saniyede 0,5 metre yürüdüğüne göre 1 saatte kaç km yürüyebileceğini bulalım.

Çözüm

1 km = 1000 m $\Rightarrow$ 1 m = $\frac{1}{1000}$ km, 1 saat = 3600 saniye $\Rightarrow$ 1 saniye = $\frac{1}{3600}$ saat.

Buna göre Mehtap'ın saatteki hızı

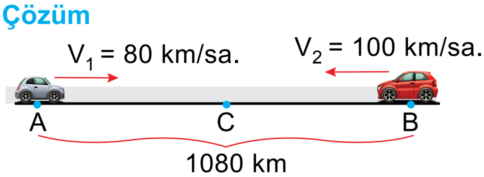
$$V = 0,5\,\frac{m}{sn.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{3600}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overset{18}{\cancel{3600}}}{\underset{5}{\cancel{1000}}} = \frac{18}{10} = 1,8$$ olduğundan 1 saatte 1,8 km yol alır.

Örnek

Aralarındaki mesafe 1080 km olan A ve B kentlerinde bulunan iki araç aynı anda birbirlerine doğru 80 km/sa. ve 100 km/sa. hızla harekete başlıyorlar.

Bu iki aracın kaç saat sonra karşılaşacaklarını bulalım.

Çözüm



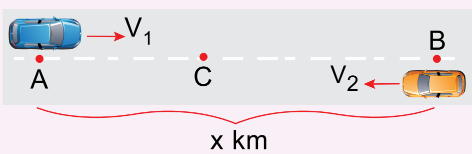
Bu iki araç t saat sonra C noktasında karşılaşsınlar.

Yol = hız·zaman olduğundan

|AC| = 80·t ve |BC| = 100·t olacağından

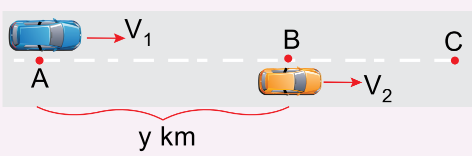
|AB| = |AC| + |BC| $\Rightarrow$ 1080 = 80·t + 100·t $\Rightarrow$ 1080 = 180·t $\Rightarrow$ t = 6 bulunur.

Bilgi



A ve B noktaları arası x km olmak üzere iki hareketli A ve B noktalarından aynı anda birbirlerine doğru V_1 ve V_2 hızları ile hareket ettiklerinde t saat sonra bir C noktasında karşılaşırlarsa

$x = t\,(V_1 + V_2)$ olur.



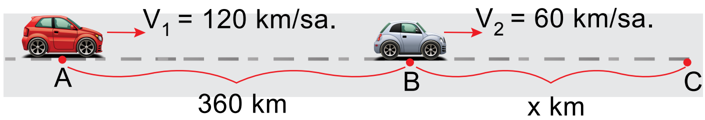
A ile B noktaları arası y km olmak üzere iki hareketli A ve B noktalarından aynı anda aynı yöne doğru V_1 ve V_2 ($V_1 > V_2$) hızları ile harekete başladıklarında t saat sonra bir C noktasında karşılaşırlarsa

$y = t\,(V_1 - V_2)$ olur.

Örnek

Aralarındaki uzaklık 360 km olan iki araç aynı anda aynı yöne doğru harekete başlıyorlar. Arkadakinin hızı 120 km/sa. öndekinin hızı 60 km/sa. olduğuna göre arkadaki aracın öndeki aracı kaç saat sonra yakalayabileceğini bulalım.

Çözüm



A'daki araç B'deki aracı t saat sonra C noktasında yakalasın.

Buna göre

$|AC| = 360 + x = 120 \cdot t$

$|BC| = x = 60t$

$|AB| = |AC| - |BC|$

$360 = (360 + x) - x$

$360 = 120t - 60t$

$360 = 60t \Rightarrow t = 6$ bulunur.

İşlemi bilgi kutusundaki kural yardımıyla

$360 = t \cdot (V_1 - V_2)$

$360 = t \cdot (120 - 60) \Rightarrow 360 = 60 \cdot t$

$t = 6$ biçiminde de yapabiliriz.

Örnek

Bir kutuda 3 mavi, 6 kırmızı ve 8 beyaz top vardır. Bu kutudan en az kaç tane top çekilirse en az 4 tanesinin beyaz top olabileceğini bulalım.

Çözüm

Kutuda 3 + 6 + 8 = 17 top vardır. Çekilen topların en az 4 tanesinin beyaz olması için kırmızı ve mavi topların tamamı ile 4 tane beyaz topun çekilmesi gerekir. Buna göre kutudan 3 + 6 = 9 top çekilirse hiçbiri beyaz olmayabilir. Eğer 3 + 6 + 4 = 13 top çekilirse topların en az 4'ü beyaz olacaktır.

Örnek

Elimizde 7 litrelik ve 3 litrelik iki kap var. Bir gölden bu kaplarla su almak koşuluyla 5 litre suyu nasıl elde edebileceğimizi bulalım.

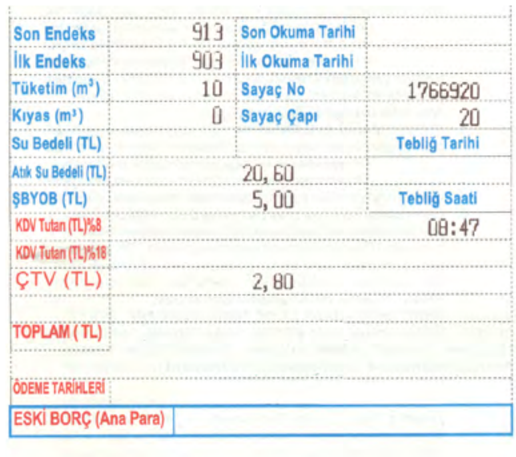
Çözüm

Bu tür problemlerin çözümünde muhakeme yaparak stratejiler geliştirmeliyiz.

Önce gölden 3 litrelik kabı doldururuz. Dolu kaptaki suyu 7 litrelik kaba boşaltırız. 3 litrelik kabı tekrar doldurur suyu 7 litrelik kaba boşaltırız. 7 litrelik kapta toplam 6 litre su oluştu. 3 litrelik kabı tekrar doldururuz. Bu kaptaki suyla 7 litrelik kabı tam doldurduğumuzda 3 litrelik kapta 2 litre su kalmıştır. 7 litrelik kabı tamamen göle boşaltırız. 3 litrelik kaptaki kalan 2 litre suyu 7 litrelik kaba boşaltırız. Şimdi 7 litrelik kapta 2 litre su bulunmaktadır. 3 litrelik kabı gölde tekrar doldurup 7 litrelik kaba boşaltığımızda artık 7 litrelik kapta 5 litre su bulunmaktadır.

Örnek

Osman Bey'in evine gelen su faturasının bazı bilgileri yanda gösterilmiştir. Faturada suyun m^3 tutarı 4,12 TL'dir. KDV (Katma Değer Vergisi) tutarı (%8) su bedeli ile atık su bedelinin toplamına, KDV tutarı (%18) ise ŞBYOB bedeline uygulanmaktadır. ÇTV (Çevre Temizlik Vergisi) 2,80 TL olduğuna göre Osman Bey'in su faturasının kaç TL olduğunu bulalım.



Son Endeks	913	Son Okuma Tarihi	
İlk Endeks	903	İlk Okuma Tarihi	
Tüketim (m^3)	10	Sayaç No	1766920
Kıyas (m^3)	0	Sayaç Çapı	20
Su Bedeli (TL)			Tebliğ Tarihi
Atık Su Bedeli (TL)	20,60		
ŞBYOB (TL)	5,00		Tebliğ Saati
KDV Tutarı (TL)%8			08:47
KDV Tutarı (TL)%18			
ÇTV (TL)	2,80		
TOPLAM (TL)			
ÖDEME TARİHLERİ			
ESKİ BORÇ (Ana Para)			

Çözüm

Osman Bey 10 m^3 su kullanmıştır.

Su bedeli : $10 \cdot 4{,}12 = 41{,}20$ TL

+ Atık su bedeli : 20,60

Toplam : 61,80

KDV (%8) : $61{,}80 \cdot \dfrac{8}{100} = 4{,}94$ TL

KDV (%18) : $5 \cdot \dfrac{18}{100} = 0{,}90$ TL

ÇTV : 2,8 TL

Bu durumda Osman Bey su faturasını

Toplam : 41,20 + 20,60 + 5 + 4,94 + 0,9 + 2,8 = 75,4 TL olarak ödeyecektir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Hangi sayının 7 katının 3 eksiğinin yarısı 9 eder?

2. Toplamları farkının 6 katına eşit olan iki doğal sayının toplamları 20'den büyüktür. Buna göre bu koşula uyan en küçük iki doğal sayıyı bulunuz.

3. İnci bir işi 8 günde, Songül aynı işi 24 günde bitirebildiğine göre ikisinin birlikte işin tamamını kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

4. Aynur ile Hatice'nin bugünkü yaşları toplamı 79'dur. Hatice Aynur'un yaşında iken Aynur 29 yaşında olduğuna göre Hatice ve Aynur'un bugünkü yaşlarını bulunuz.

5. Ezgi test kitabındaki soruların birinci hafta $\frac{1}{5}$'ini, ikinci hafta $\frac{1}{2}$'sini çözüyor. Üçüncü hafta kalan soruların $\frac{1}{2}$'sini çözdükten sonra geriye çözülmesi gereken 300 soru kaldığına göre Ezgi'nin çözdüğü test kitabında toplamda kaç soru olduğunu bulunuz.

6. 80 sayısının %30'nun %50'sini bulunuz.

7. A ve B noktaları arası 560 km'dir. A ve B'den aynı anda birbirlerine doğru hareket eden iki araçtan birinin hızı 50 km/sa. diğerinin hızı 30 km/sa. olduğuna göre bu iki aracın kaç saat sonra karşılaşabileceklerini bulunuz.

8. Bir kesrin değeri $\frac{7}{9}$'dur. Bu kesrin payına 3 eklenir paydasından 3 çıkarılırsa kesrin değeri $\frac{5}{3}$ oluyor.
Buna göre kesrin pay ve paydasını bulunuz.

9. Gizem ile Betül'ün yaşları oranı $\frac{1}{3}$'tür. 7 yıl sonra Gizem ile Betül'ün yaşları oranı $\frac{6}{11}$ olacağına göre Gizem'in bugünkü yaşını bulunuz.

10. Zeytinyağının kilogramı 24 TL iken 21 kilogram zeytinyağı alan Gürsel Bey'in zeytinyağının kilogram fiyatı 28 TL'ye çıktığında aynı para ile kaç kilogram zeytinyağı alabileceğini bulunuz.

11. Alış fiyatı x TL olan bir ürünün satış fiyatı (x – 1) TL'dir. Ürünün satışından %25 zarar edildiğine göre ürünün alış fiyatını bulunuz.

12. Bir ürün maliyetine %30 kâr eklenerek satılmaktadır. Satışların iyi gitmediğini gören satıcı satış fiyatı üzerinden %20 indirim yaparak ürünü 208 TL'ye satmıştır. Buna göre ürünün maliyetini bulunuz.

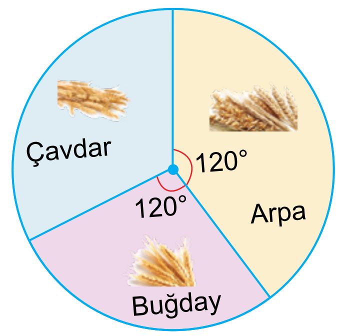
13. %30'u şeker olan 120 g şekerli suyun şeker oranının %36 olması için kaç g suyun buharlaşması gerektiğini bulunuz.

14. Tanesi 80 kuruştan 120 yumurta alan bir kişi, yumurtaların 20 tanesini kırmıştır. Bu kişi tüm yumurtaların satışından %40 kâr etmeyi düşündüğüne göre kalan yumurtaların tanesini kaç TL'den satacağını bulunuz.

15. Bir hareketli 450 km yolun 200 km'sini 40 km/sa. hızla, yolun kalan kısmını 50 km/sa. hızla gittiğine göre hareketlinin ortalama hızının kaç km/sa. olduğunu bulunuz.

16. Hızı 90 km/sa. olan hareketlinin bir saniyedeki hızını bulunuz.

17.



Turgut Bey'in bir yılda elde ettiği ürünler yukarıdaki daire grafiğinde gösterilmiştir.
Turgut Bey yılda 4,5 ton çavdar elde ettiğine göre Turgut Bey'in bir yılda elde ettiği ürünlerin toplamını bulunuz.

18. Yalnız 5 ve 9 litrelik iki kapla kuyudan su çeken bir kişinin 7 litre suyu nasıl elde edebileceğini bulunuz.

19.

	Eylül	Ekim
Su	8x + 2	9x + 4
Elektrik	5x + 1	5x + 5
Doğalgaz	4x + 4	

Yukarıdaki tabloda İlhan ailesinin eylül ve ekim aylarına ait fatura tutarları cebirsel olarak gösterilmiştir.

İlhan ailesi eylül ayında 160 TL ödemiştir. Ekim ayına ait doğalgaz fatura tutarı eylül ayına ait doğalgaz fatura tutarının 5 katından 20 TL fazla olduğuna göre İlhan ailesinin ekim ayında elektrik, su ve doğalgaz faturaları için toplam kaç TL ödeyeceğini bulunuz.

3. BÖLÜM ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi,

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi,

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi,

$\mathbb{Q}'$: İrrasyonel sayılar kümesi,

$\mathbb{R}$: Gerçek sayılar kümesi veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$
B) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
C) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{R}$
D) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} = \mathbb{N}$
E) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

2. x ve y $\in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x \cdot y = 20$ olduğuna göre $x + y$ toplamının alacağı en küçük değer kaçtır?

A) –21 B) –20 C) –5 D) 20 E) 21

3. Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) Her doğal sayı bir tam sayıdır.
B) Her tam sayı bir rasyonel sayıdır.
C) Her rasyonel sayı bir gerçek (reel) sayıdır.
D) Her tam sayı bir irrasyonel sayıdır.
E) Her irrasyonel sayı bir gerçek (reel) sayıdır.

4. 7, 12, 18, 21, 143, 158, 375 ve 7578

Yukarıda verilen sayıların kaç tanesi 2 ve 3 ile tam bölünür?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5. Dört basamaklı 578a sayısı 4 ile bölünebildiğine göre a'nın alacağı değerler toplamı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

6. Beş basamaklı m376n sayısının 5 ile bölümünden kalan 3'tür. Bu sayı 3 ile bölünebildiğine göre m'nin alacağı değerler toplamı kaçtır?

A) 21 B) 24 C) 26 D) 30 E) 33

7. Yedi basamaklı 31258m4 sayısı 8 ile bölünebildiğine göre m'nin alacağı değerler toplamı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

8. $\underbrace{4444...4}_{14 \text{ tane}}$ biçiminde verilen 14 basamaklı sayının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9. A sayısının 11 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre 4A + 5 sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.

$$\begin{array}{r|l} A+5 & 7 \\ \cline{2-2} - & B+1 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} B+5 & 5 \\ \cline{2-2} - & 6 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Yukarıda verilen bölme işlemine göre A doğal sayısı kaçtır?

A) 142 B) 168 C) 196 D) 205 E) 211

11. a, b ve c doğal sayılar olmak üzere

$A = 4a + 1 = 5b + 2 = 7c + 4$

eşitliğini sağlayan ve 200'den büyük en küçük doğal sayı kaçtır?

A) 242 B) 257 C) 262 D) 277 E) 282

12. Beş basamaklı 4m65n sayısının 36 ile bölümünden kalan 17 olduğuna göre m + n toplamı kaç farklı değer alır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. 7abc ve 5abc sayıları 4 basamaklı iki doğal sayıdır. 5abc sayısının 19 ile bölümünden kalan 8 olduğuna göre 7abc sayısının 19 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

14. A doğal sayısının x ile bölümünden kalan 3, B doğal sayısının x ile bölümünden kalan 4 tür. x, 12'den büyük bir sayı olduğuna göre A + B ve A · B sayılarının x ile bölümünden kalanların toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

15. Bir fayans ustası elinde bulunan 12 cm ve 16 cm boyutlarında dikdörtgen biçimindeki fayanslarla kare biçimindeki bir yere fayans döşeyecektir. Kullanılan fayans sayısı 20'den fazla olduğuna göre en az kaç fayans döşemiştir? (Fayansların kalınlığı göz önüne alınmamıştır.)

A) 48 B) 40 C) 32 D) 24 E) 12

16. TÜRKİYETÜRKİYE…

TÜRKİYE kelimesi yukarıdaki gibi tekrarlanarak yazılıyor.

Buna göre soldan 521. harf aşağıdakilerden hangisidir?

A) T B) Ü C) R D) K E) Y

17. A = [1, 13], B = (7, 15] olduğuna göre A \ B kümesinin elemanı olan tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 28 B) 27 C) 26 D) 25 E) 24

18. $1 < x < 4$ olduğuna göre $|x - 1| + |x - 4|$ ifadesinin eşiti kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. Sema ve Nesrin bir hastanede hemşiredirler. Acil serviste Sema 4 günde, Nesrin 6 günde bir nöbet tutmaktadırlar. İkisi birlikte ilk nöbetlerini cuma günü tuttuklarına göre birlikte 17. nöbetlerini hangi gün tutarlar?

A) Perşembe B) Cuma
C) Cumartesi D) Pazar
E) Pazartesi

20. Şu an saat 02.00 ise 89 saat sonra saat kaçı gösterir?

A) 6 B) 10 C) 15 D) 19 E) 22

21. A = [2, 7), B = (5, 10] olduğuna göre A ∩ B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [2, 5) B) (5, 7) C) [5, 7]
D) [2, 10] E) (7, 10]

22.

Yukarıdaki sayı doğrusunda verilen eşitsizliğin aralık olarak gösterilişi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) [–1, 4]
B) (–∞, –1] ∪ (4, ∞)
C) (–∞, –1] ∪ [4, ∞)
D) (–∞, –1) ∪ [4, ∞)
E) (–∞, –1) ∪ (4, ∞)

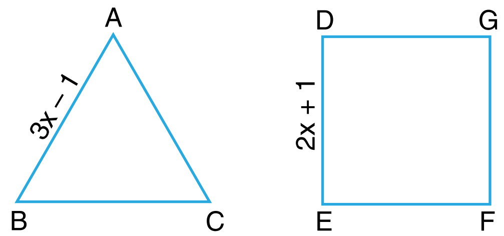
23. x ve y birer gerçek sayıdır. $2 < x < 7$, $3 < y < 5$ olduğuna göre $3x + 2y$ ifadesinin alacağı en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

24. $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}=a+\frac{1}{x-2}$ denkleminin bir kökü $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin bir elemanı olduğuna göre a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

25.



Şekilde $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen, DEFG bir karedir.

$|AB| = (3x - 1)$ cm ve $|DE| = (2x + 1)$ cm'dir.

$\widehat{ABC}$'nin çevresi karenin çevresinden büyük olduğuna göre $\widehat{ABC}$'nin çevresinin alacağı en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 61 B) 60 C) 59 D) 58 E) 57

26. $|3x - 5| = 4$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarının toplamı kaçtır?

A) $\frac{8}{3}$ B) 3 C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{11}{3}$ E) 4

27. $|4x - 1| > 7$ eşitsizliğini sağlamayan tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

28. $|x^2 - 9| - |x - 3| = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-4, -2, 3\}$ B) $\{-4, -3, -2\}$
C) $\{-4, 2, 3\}$ D) $\{-4, -3, 2\}$
E) $\{2, 3, 4\}$

29. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$|x| = -x$, $|y| = y$ olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $x + y < 0$ B) $x \cdot y \leq 0$
C) $x \cdot y > 0$ D) $\frac{y}{x}=1$
E) $y - x < 0$

30. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$x + y = 5$
$3x - 2y = 5$

denklem sistemini sağlayan (x, y) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3, 3) B) (1, 3) C) (3, 2)
D) (2, 3) E) (3, 1)

31. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$(m + 1)x + (n - 3)y = 11$
$4x + 5y = 14$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre m + n toplamı kaçtır?

A) $\frac{123}{14}$ B) $\frac{62}{7}$ C) $\frac{125}{14}$
D) 9 E) $\frac{127}{14}$

32. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$(a + 1)x + 2y = 9$
$3x + (a + 2)y = 11$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre a'nın alacağı değerlerin toplamı kaçtır?

A) –3 B) –2 C) 0 D) 2 E) 3

33. $a = 2^{170}$, $b = 8^{50}$, $c = 32^{35}$ olduğuna göre a, b ve c'nin küçükten büyüğe doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

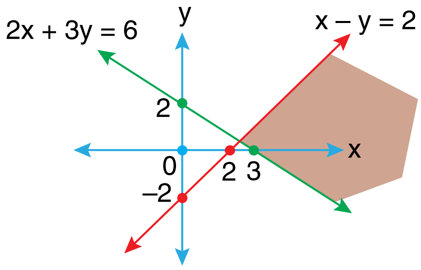
A) $c < a < b$ B) $b < a < c$
C) $a < c < b$ D) $b < c < a$
E) $a < b < c$

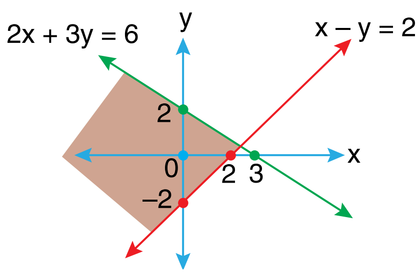
34. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

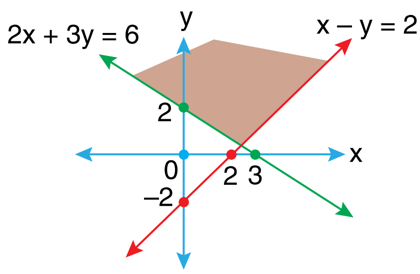
$2x + 3y \leq 6$

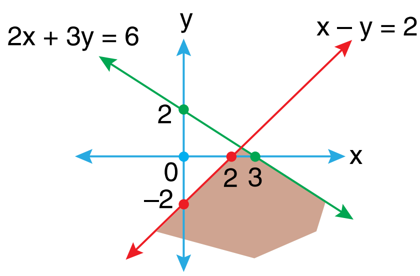
$x - y \geq 2$

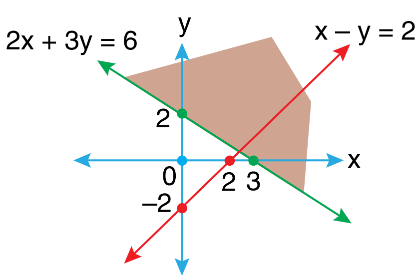
eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

35. $(x - 3)^{2x - 4} = 1$ denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

36. 2^{72} sayısının $\frac{1}{4}$'ü kaçtır?

A) 2^{18} B) 2^{36} C) 2^{48} D) 2^{60} E) 2^{70}

37. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} < 81^{x+4}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 1 D) 3 E) 5

38.

$a = 11^8 + 11^9$

$b = 11^{10} + 11^{11}$

olduğuna göre b'nin a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{a}{121}$ B) $\frac{a}{11}$ C) a D) 11a E) 121a

39. $\sqrt{25 \cdot (x-3)^2} = 10$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

40. $\sqrt{\frac{9}{25} - \frac{24}{35} + \frac{16}{49}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{35}$ B) $\frac{2}{35}$ C) $\frac{3}{35}$ D) $\frac{4}{35}$ E) $\frac{1}{7}$

41. Bir bakteri türünün sayısı her 20 dakikada 3 katına çıkmaktadır. Başlangıçta 243 tane bakteri bulunduğuna göre 15 saat sonunda kaç tane bakteri olur?

A) 3^{48} B) 3^{50} C) 3^{52} D) 3^{54} E) 3^{56}

42. x, y $\in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt{x+1} + \sqrt[12]{3-x}$ veriliyor.

A bir gerçek sayı olduğuna göre x hangi aralıkta değerler alır?

A) $(-\infty, -1)$ B) $(-1, 3)$ C) $[-1, 3]$ D) $(1, 3)$ E) $(3, \infty)$

43. $\dfrac{2x+3y}{3x-y} = \dfrac{5}{7}$ olduğuna göre $\dfrac{x}{y}$ değeri kaçtır?

A) $\dfrac{1}{28}$ B) $\dfrac{1}{26}$ C) 13 D) 26 E) 28

44. Bir kamptaki 60 kişinin 90 günlük erzağı vardır. Kampa 10 gün sonra 20 kişi katılırsa kalan erzak yeni katılanlarla birlikte kamptaki kişilere kaç gün yeter?

A) 60 B) 58 C) 56 D) 54 E) 52

45. x – 3 ile y + 1 doğru orantılı, x – 3 ile z + 2 ters orantılıdır.

x = 5, y = 4 iken z = 3 olduğuna göre x = 7, y = 9 iken z kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

46. Bir babanın yaşı oğlunun yaşının 11 katından 2 fazladır. Oğlu şu anda x yaşında olduğuna göre kaç yıl sonra babanın yaşı oğlunun yaşının 3 katına eşit olur? (x'e bağlı olarak bulunuz.)

A) 3x + 1 B) 4x + 1 C) 4x + 2 D) 4x + 3 E) 5x

47. Ali parasının önce $\dfrac{3}{7}$'sini, daha sonra kalanın $\dfrac{3}{5}$'ini harcamış. Geriye 80 TL parası kaldığına göre başlangıçta Ali'nin kaç TL parası vardır?

A) 280 B) 300 C) 325 D) 350 E) 377

48. Bir sayının 5 katının 3 eksiğinin yarısı, aynı sayının 2 katından 2 fazla olduğuna göre bu sayı kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

49. %55'i kız olan bir sınıfın mevcudu en az kaç kişi olabilir?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

50. %40 kârla satılırken %20 indirim yapılan bir üründen yüzde kaç kâr edilir?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

51. A, B, C maddeleri 5A = 8B, 10B = 3C oranında karıştırılarak 356 gramlık bir karışım elde ediliyor. Karışımdaki A maddesi kaç gramdır?

A) 92 B) 96 C) 98 D) 100 E) 102

52. Tuz oranı %40 olan 150 gram tuzlu su karışımından kaç gram su buharlaştırılırsa tuz oranı %50 olur?

A) 20 B) 23 C) 25 D) 28 E) 30

53. A kentinden B kentine 6 saatte giden bir araç, hızını 20 km azaltarak B şehrinden A şehrine 8 saatte gelmiştir. Buna göre aracın ilk hızı saatte kaç km dir?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

54. Bir şehirde aylık su tüketimi ilk 10 ton için 23 lira, sonraki her ton için 0,4 lira olarak ücretlendirilmiştir.

Buna göre ayda 21 ton su harcayan Kaya ailesinin aylık su parası kaç lira olur?

A) 26,2 B) 26,8 C) 27 D) 27,4 E) 28

55. Aşağıdaki tabloda bir mağazada satılan bazı ürünler ve bu ürünlerin satış fiyatları verilmiştir.

Ürün	Satış Fiyatı (TL)
Pantolon	140
Gömlek	70
Kazak	110
Mont	180
Tişört	60
Ayakkabı	160

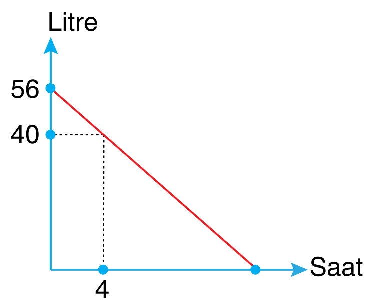
Mağaza, iki ürün almak isteyen müşterilerine aşağıdaki gibi farklı seçenek sunmaktadır.

- İki ürünün satış fiyatı farklı ise daha ucuz olana satış fiyatı üzerinden %70 indirim sağlanacaktır.
- İki ürünün satış fiyatı aynı ise ürünlerden birinin satış fiyatı üzerinden %70 indirim sağlanacaktır.

Buna göre bu mağazadan 2 mont ve 2 tişört alacak bir kişi mağazaya en az kaç lira ödemelidir?

A) 384 B) 370 C) 340 D) 324 E) 312

56.



Yukarıda verilen grafik bir aracın deposundaki yakıtın zamana göre değişimini göstermektedir. Depo dolu iken araç harekete başladıktan 12 saat sonra 36 litre daha yakıt almıştır.

Araç yakıt aldıktan sonra kaç saat daha yakıt almadan hareket edebilir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

57. Ardışık 3 doğal sayının toplamı en küçük sayının 4 katından 4 eksik olduğuna göre küçük sayı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

58. Coşkun bir işi 2x günde Halil ise aynı işi 3x günde yapabilmektedir. İkisi birlikte işi 24 günde bitirebildiklerine göre Halil işi tek başına kaç günde bitirir?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

59.

Sevil, Türk Kızılayının kurduğu kısa mesaj (SMS) bağış hattına mesajla bağış yapmak istemektedir. İlk mesajını saat 05.45'te, son mesajını aynı gün saat 23.00'te atan Sevil eşit aralıklarla toplam 24 kısa mesaj göndermiştir.

Buna göre Sevil'in attığı mesajların kaç tanesi saat başlarına denk gelir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

60. Bir grupta en az kaç kişi bulunursa haftanın herhangi bir gününde kesinlikle 6 kişi doğmuş olur?

A) 30 B) 36 C) 43 D) 49 E) 57

61. A'dan B'ye gitmek için aynı anda harekete başlayan iki aracın saatteki ortalama hızları sırasıyla 80 km ve 60 km'dir. Hızlı giden araç B'ye 2 saat önce vardığına göre A ile B arası kaç km'dir?

A) 360 B) 420 C) 480 D) 540 E) 600

GEOMETRİ

4. BÖLÜM

ÜÇGENLER

Konular

Sembol ve Gösterimler

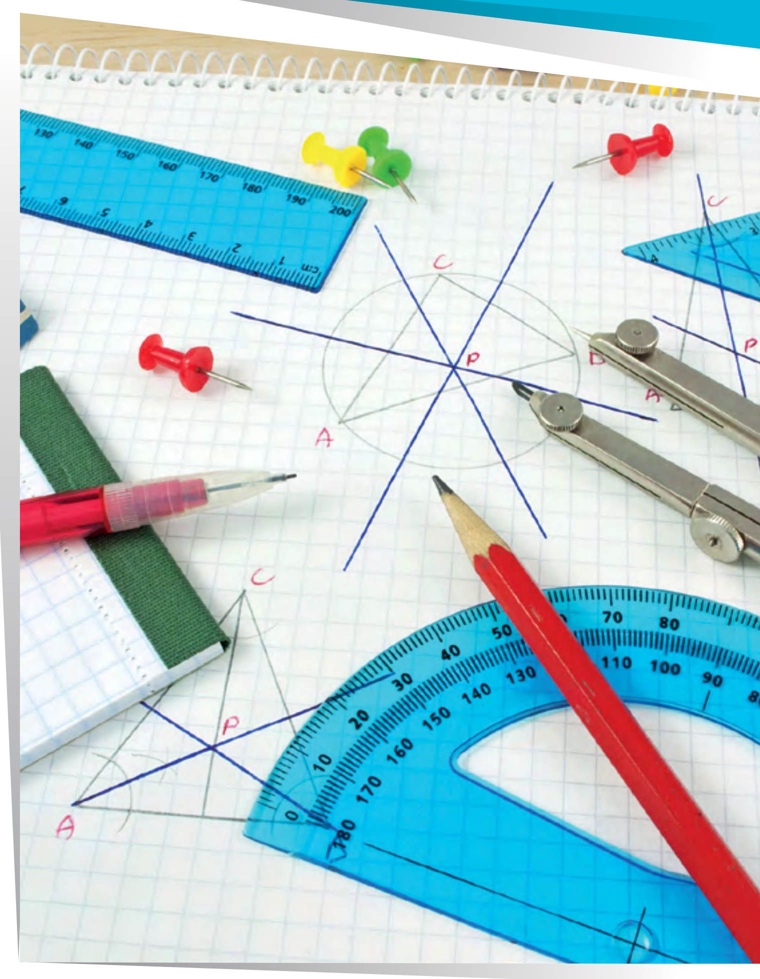
$\widehat{ABC}$, $\overset{\frown}{ABC}$, $m(\widehat{ABC})$, $[AB]$, $|AB|$,

n_A, n'_A, V_a, G, h_a, $\cong$, $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$, ~, $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$,

sinx, cosx, tanx, cotx, $A(\overset{\frown}{ABC})$

Terimler ve Kavramlar

Üçgen
Açı
Kenar
İç açı
Dış açı
Üçgen eşitsizliği
Eşkenar üçgen
İkizkenar üçgen
Dik üçgen
Açıortay
İç açıortay
Dış açıortay
Kenarortay
Yükseklik
Diklik merkezi
Kenar orta dikme
Ağırlık merkezi
Eşlik
Kenar – Açı – Kenar (K.A.K.)
Kenar – Kenar – Kenar (K.K.K.)
Açı – Kenar – Açı (A.K.A.)
Açı – Açı (A.A.)
Benzerlik
Benzerlik oranı
Kesen
Pisagor teoremi
Öklid teoremi
Trigonometrik oran
Taban
Yükseklik
Alan



4. ÜÇGENLER

Atatürk 1936-1937 yıllarında küçük fakat işlevi ve önemi hacminden daha büyük denebilecek bir geometri kitabı yazmıştır. Yazdığı 44 sayfalık bu geometri kitabı ile geometri terimlerinin bugün kolay bir şekilde yazılıp anlaşılmasını sağlamıştır. Zira Atatürk'ün Dolmabahçe Sarayı'nda kendi el yazısı ile kaleme aldığı geometri kitabında matematiksel birçok terim geliştirilmiş, diğer taraftan bu kitap ile anlaşılması oldukça güç olan Osmanlıca geometri terimlerine Türkçe karşılıklar bulunarak geometrinin ezberlenmesi ve öğrenilmesi güçlüğüne son verilmiştir.

Kitap, 1937'de Millî Eğitim Bakanlığı tarafından yazar adı konmadan yayımlanmış, kitabın ikinci bir baskısı 1971 yılında Türk Dil Kurumu tarafından çıkarılmıştır. Birçok geometri terimini bu kitapla anlaşılır hâle getiren Atatürk'ün geometrinin öğrenilmesi ve anlaşılmasındaki hizmeti büyük olmuştur.

Aşağıda eski terimler ve bunlara karşılık Atatürk'ün türettiği kelimelerden bazıları verilmiştir.

Atatürk'ün Kullandığı	Eski Terim
Açı	Zaviye
Altıgen	Müseddes
Beşgen	Muhammes
Boyut	Buud
Çap	Kutur
Çember	Mühiti daire
Çizgi	Hat

Atatürk'ün Kullandığı	Eski Terim
Doğru	Müstakim
Eğik	Mail
Eşit	Musavi
Kenar	Dılı
Paralel	Müvazi
Üçgen	Müselles
Yamuk	Şibhi münharif

Atatürk'ün geometri kitabını yazmasındaki sebepler:

- Türkçeyi yabancı kelimelerden arındırarak anlaşılır bir hâle getirme çalışmalarına hizmet etmek.

- Bilim dilinin de anlaşılır öz bir Türkçe olmasını sağlamak.
- Böylelikle Türkçeyi bilim dili hâline getirmektir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Üçgenler, günlük hayatımızın birçok alanında karşımıza çıkar ve değişik meslek gruplarında da kullanılır. Sıvacılık, döşeme ve duvar kaplamacılığı, beton ve betonarme kalıpçılığı, fotoğrafçılık, mermercilik ve süsleme taşçılığı, plastik işlemeciliği ve doğramacılığı, ahşap karoserciliği, avize imalatçılığı, tekne üretimi, reklam tabelalarının üretimi, bayan ve erkek terziliği, cam işlemeciliği (Finisaj), seramik ve çinicilik, serigrafi, trikotajcılık, diş protezciliği, halıcılık, sayacılık, ayakkabıcılık, dericilik, iç ve dış giyim, taşçılık, duvarcılık gibi birçok değişik alanda kullanılmaktadır.

Kültür ve medeniyetimizde geometrinin tarihsel gelişim sürecine Atatürk'ün dışında pek çok bilim insanının katkısı vardır. Bunların ikisinden kısaca bahsedeceğiz.

Sâbit Bin Kurrâ

Sabit bin Kurrâ varlıklı bir ailenin çocuğu olarak dünyaya geldi. Matematik alanında eğitim almak için Bağdat'a gitti. Orada astronomi, matematik, tıp, felsefe ve astroloji gibi alanlarda eğitim gördü.

Sabit Bin Kurrâ
836–901 (Temsilî)

Yaşadığı dönemin en büyük matematikçilerinden biri olark kabul edilen Sabit bin Kurrâ, matematik alanında Öklid, Arşimet, Apollonius gibi birçok Antik Yunan matematikçinin çalışmalarını tercüme etti ya da yeniden düzenledi. Ayrıca Batlamyus'un "Almagest" eseri üzerine de bir yorum yazdı.

Sabit bin Kurrâ'nın matematiksel zekâsını gösterdiği bir diğer alan ise Öklid'in beşinci postulatını kanıtlamak üzerinedir. Bu problemi iki yazısında inceledi: Maqāla fī Burhān al-Musādara al-Mašhūra min Uqlīdis (Öklid'in Meşhur Postulatının Kanıtı) ve Maqāla fī anna al–khattayn Idhā Ukhrijā 'alā Zāwiyatayn Aqal min Qā'imatayn Iltaqayā (İki Dik Açıdan Daha Az Açıyla Çizilen İki Doğru Parçasının Kesişmesi). Problemi iki biçimde ele alan Sabit bin Kurrâ ilkinde, iki doğru parçasını kesen üçüncü doğru parçası modeliyle ilgili bazı belirlemelerde bulundu. İkinci olarak ele alışında ise Öklid'in geometrideki hareket kullanımını yasaklayan yaklaşımını eleştirerek "hareket" kavramı üzerinde durdu. Sabit bin Kurrâ'nın bu sonuçları daha sonraları İbn-ül Heysem, Ömer Hayyam ve Nasiruddin Tûsî gibi bilim insanları tarafından geliştirildi ve nihayetinde Öklid dışı geometrinin keşfini mümkün kıldı.

Sabit bin Kurrâ; astronomi, matematik ve diğer alanlar üzerinde toplam 150'ye yakın eser yazmayı başarabilmiştir. Ancak bu çalışmaların çoğu ne yazık ki günümüze kadar ulaşamamıştır.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Nasiruddin Tûsî

Nasiruddin Tûsî
1201–1274 (Temsilî)

Matematikçi, astronom, siyasetçi [D. Tus / Horasan (İran), 21 Şubat 1201–Ö. Bağdat, 25 Haziran 1274]. Tam adı Ebu Ca'fer Muhammed İbn Muhammed İbnü'l-Hasan Nasıreddin'dir. Kemaleddin İbn Yunus ve Muînüddin Sâlim'in öğrencisi olan Tusî, daha genç yaşlarında iken zamanına kadar yer yer yıkılagelmiş ve sağlığını yitirmiş olduğunu gördüğü matematik sistemini yeniden kurma başarısını kazandı. Grek diline çok iyi hâkim olması sayesinde birçok Yunan matematik ve astronomi eserini kendinden öncekilere göre daha mükemmel ve genişletilmiş biçimde Fars ve Arap dillerine çevirdi. Zamanımızın büyük bilim tarihçisi G. Sarton, Tusî'nin eserlerinin sayısını 61'e çıkarmış olmakla onun bilim alanında ne büyük emekler vermiş olduğunu açıkça gösteriyor. Bu eserler konuları itibarıyla; aritmetik, geometri, trigonometri, astronomi, optik, mineraloji, coğrafya, tıp, mantık, felsefe, ahlak, müzik ve edebiyatla ilgilidir.

Eski Doğu'nun pozitif bilim yazarları içinde Tûsî kadar didaktik (öğretici) ve bugünün bilimsel yöntemlerine uygun, sistemli eser yazmış olanına pek az rastlanır. Teorilerinde kendi görüş ve kesin kanıtlarıyla, kendinden öncekilerin yapmış olduklarını tarafsızca ayırt etmeyi ve kendininkine göre üstünlük sezdiği durumları büyük bir saygı ve değerbilirlikle belirtmeyi çok iyi bilmiştir. O kadar ki, Kitabı Şeklü'l-Kutta adlı eserinde, açıları bilinen küresel üçgenlerin "Şeklü'z Zilî" (tanjantlar teoremi) kuralıyla çözümü sorununda, küre üzerinde bütün özel durumlarda geçerli bir çözüm yöntemini bilmediğini belirtecek kadar alçak gönüllülük de göstermiştir.

Tusî, bu eserinde; küre üzerindeki büyük dairelerin oluşturduğu çeşitli üçgen ve dörtgenlerin topolojik sentezinde o kadar geniş bir çözümleme yapmayı başarmıştır ki kendinden sonra modern analitik yöntemlerin bunlar aracılığıyla kolayca çıkarılabilmesi olanaklı olmuştur. Kısaca, Tûsî bu eserinde her iki trigonometriyi (düzlem ve küre trigonometrileri) sistematik şekilde incelemiştir. Tûsî bu kitabında, küre üzerindeki üçgen ve dörtgenlerle ilişkili problemlerde derin bir geometrik birikime sahip olduğunu göstermiştir. Örneğin üç açısı bilinen küresel bir üçgenin çözümünü, bugün yaptığımız gibi, kutupsal üçgen kullanmak suretiyle, üç kenarı bilinen üçgen çözümüne getirecek geometrik dönüşüm mekanizmasını o düşünmüştür.

Batılı birçok büyük matematikçiyi XVIII. yüzyıldan beri uğraştırmış bir sorun vardı ki o da Öklit'in 5 numaralı paraleller aksiyomunun ispatıdır. Bu aksiyom bir türlü ispat edilememekle birlikte ancak onun kabulü ya da bir eş değerinin yerine konulmasıyla Öklit geometrisi geçerliliğini koruyabiliyordu. Tûsî, 5 numaralı aksiyomla karşılaştığı zaman, onu ikna edici bulmamış olacak ki bu aksiyom yerine bir yenisini koymayı denemişti. Tûsî bu yeni aksiyomla bir üçgenin iç açıları toplamının 180 dereceye eşit olacağını ispat etti ve bundan da Öklidis aksiyomunu derhâl çıkardı. Elimizde bulunan ikinci Tahrir'de ve Tahrir-ül-Mutavassıtat kolleksiyonunun 18. kitabı olan Kitabı-Şerhi-Masadirat'ta (yani geometri aksiyomlarının yorumu) Tûsî'nin özgün görüş ve buluşları çoktur.

(*Genel ağdan alınmıştır.)*

4.1. ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

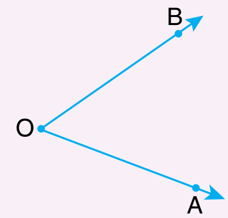
4.1.1. Üçgende Açı Özellikleri

Bilgi

1) Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimine **açı** denir.

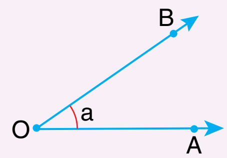
Başlangıç noktasına açının köşesi, ışınlara da açının **kolları** denir.

Yanda verilen açının köşesi "O" noktası, [OA ve [OB ise açının kollarıdır. Açı, $\widehat{O}$ (O açısı), $\widehat{AOB}$ (AOB açısı) veya $\widehat{BOA}$ (BOA açısı) biçiminde ya yalnız açının köşesi ile ya da köşesi ortada olacak biçimde üç harfle gösterilir.



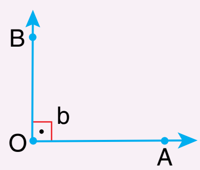
Bir $\widehat{AOB}$'na karşılık gelen gerçek sayıya açının ölçüsü denir ve m($\widehat{AOB}$) biçiminde gösterilir.

2) Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açıya **dar açı** denir.



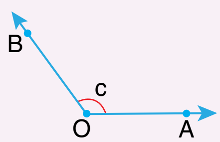
$0° < a < 90°$

3) Ölçüsü 90° olan açıya **dik açı** denir.



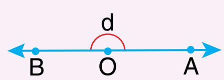
$b = 90°$

4) Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açıya **geniş açı** denir.



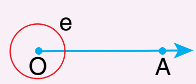
$90° < c < 180°$

5) Ölçüsü 180° olan açıya **doğru açı** denir.



$d = 180°$

6) Ölçüsü 360° olan açıya **tam açı** denir.



$e = 360°$

Örnek

2x + 4°lik açı geniş açı olduğuna göre x'in hangi aralıkta değerler alacağını bulalım.

Çözüm

Geniş açının ölçüsü 90° ile 180° arasında olduğundan

$90° < 2x + 4° < 180° \Rightarrow 86° < 2x < 176° \Rightarrow 43° < x < 88°$ olarak elde edilir.

Örnek

$3x - 6°$'lik açı dar açı olduğuna göre x'in alacağı en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm:

Dar açının ölçüsü 0° ile 90° arasında olduğundan

$0° < 3x - 6° < 90°$

$6° < 3x < 96°$

$2° < x < 32°$ olacağından x'in alacağı en büyük tam sayı değeri 31 olarak elde edilir.

Örnek

$\widehat{A}$ dar açı, $\widehat{B}$ geniş açı olmak üzere $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$ toplamının hangi aralıkta değerler alacağını bulalım.

Çözüm:

$\widehat{A}$ dar açı ise $0° < m(\widehat{A}) < 90°$,

$\widehat{B}$ geniş açı ise $90° < m(\widehat{B}) < 180°$ olur.

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\begin{array}{rl} & 0° < m(\widehat{A}) < 90° \\ + & 90° < m(\widehat{B}) < 180° \\ \hline & 90° < m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) < 270° \end{array}$$

olarak elde edilir.

Örnek

$\widehat{A}$ tam açı, $\widehat{B}$ dar açı ve $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 500°$ olduğuna göre $m(\widehat{C})$'nin alacağı en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm:

$\widehat{A}$ tam açı ise $m(\widehat{A}) = 360°$,

$\widehat{B}$ dar açı ise $0 < m(\widehat{B}) < 90°$ olur.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 500°$

$m(\widehat{B}) = 500° - m(\widehat{A}) - m(\widehat{C})$

$m(\widehat{B}) = 500° - 360° - m(\widehat{C})$

$m(\widehat{B}) = 140° - m(\widehat{C})$

$0° < m(\widehat{B}) < 90°$ olduğundan

$0° < 140° - m(\widehat{C}) < 90°$

$-140° < -m(\widehat{C}) < -50°$

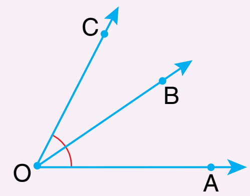
$50° < m(\widehat{C}) < 140°$ olur. Öyleyse,

$m(\widehat{C})$'nin alacağı en büyük tam sayı değeri 139 olur.

Bilgi

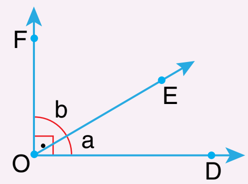
1) Birer ışını ortak olan açılara **komşu açılar** denir.

AOB ve BOC açıları komşu açılardır.



2) Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya **tümler açılar**, ölçüleri toplamı 90° olan iki komşu açıya **komşu tümler açılar** denir.

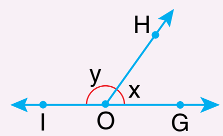
DOE ve EOF açıları komşu tümler açılardır.



$a + b = 90°$

3) Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya **bütünler açılar**, ölçüleri toplamı 180° olan iki komşu açıya **komşu bütünler açılar** denir.

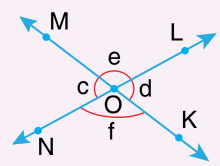
GOH ve HOI açıları komşu bütünler açılardır.



$x + y = 180°$

4) Birbirini kesen iki doğrunun oluşturduğu açılardan komşu olmayan açılara **ters açılar** denir. Ters açıların ölçüleri eşittir.

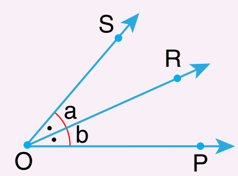
KOL ile NOM ve LOM ile KON açıları ters açılardır.



$c = d$ ve $e = f$

5) [OR, $\widehat{POS}$'nın açıortayıdır.

Bu durumda $m(\widehat{POR}) = m(\widehat{ROS})$ olur.



$a = b$

Örnek

Tümler iki açıdan birinin ölçüsü diğerinin ölçüsünün 3 katından 10° fazla olduğuna göre bu açıların ölçülerini bulalım.

Çözüm

Açının ölçüsü	Tümlerinin ölçüsü
x	$3x + 10°$

$x + 3x + 10° = 90° \Rightarrow 4x = 80° \Rightarrow x = 20°$ olduğundan tümlerinin ölçüsü $3 \cdot 20° + 10° = 70°$

veya $90° - 20° = 70°$ olarak bulunur.

Örnek

Bütünler iki açıdan birinin ölçüsü diğerinin ölçüsünün 4 katından 20° eksik olduğuna göre bu açıların ölçülerini bulalım.

Çözüm:

Açının ölçüsü	Bütünlerinin ölçüsü
x	4x – 20°

$x + 4x - 20° = 180° \Rightarrow 5x = 200° \Rightarrow x = 40°$ olduğundan bütünlerinin ölçüsü $4 \cdot 40° - 20° = 140°$

veya $180° - 40° = 140°$ olarak bulunur.

Örnek

Tümler iki açının ölçülerinin oranları $\frac{2}{3}$ olduğuna göre bu açıların ölçülerini bulalım.

Çözüm

Açının ölçüsü	Tümlerinin ölçüsü
x	90° – x

$\frac{x}{90° - x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 180° - 2x$

$5x = 180°$

$x = 36°$ ise tümlerinin ölçüsü $90° - 36° = 54°$ olarak bulunur.

Örnek

Tümlerinin ölçüsü ile bütünlerinin ölçüleri toplamı 170° olan açının ölçüsünü bulalım.

Çözüm

Açının ölçüsü	Tümlerinin ölçüsü	Bütünlerinin ölçüsü
x	90° – x	180° – x

$90° - x + 180° - x = 170° \Rightarrow 270° - 2x = 170° \Rightarrow 2x = 100° \Rightarrow x = 50°$ bulunur.

Örnek

$40° < m(\widehat{A}) < 78°$ olduğuna göre $\widehat{A}$'nın bütünlerinin alacağı <u>en büyük</u> tam sayı değerini bulalım.

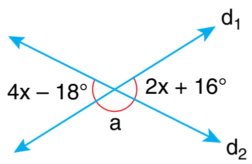
Çözüm

Açının ölçüsü	Bütünlerinin ölçüsü
$m(\widehat{A})$	$180° - m(\widehat{A})$

$40° < m(\widehat{A}) < 78° \Rightarrow -78° < -m(\widehat{A}) < -40° \Rightarrow 180° - 78° < 180° - m(\widehat{A}) < 180° - 40°$

$102° < 180 - m(\widehat{A}) < 140°$ olduğundan açının bütünlerinin alacağı en büyük tam sayı değeri 139° olarak bulunur.

Örnek



Yandaki şekilde verilenlere göre a değerini bulalım.

Çözüm

$4x - 18°$ ile $2x + 16°$ ters açılardır. Bu durumda

$4x - 18° = 2x + 16°$

$2x = 34°$

$x = 17°$ olur.

$2x + 16°$ ile a komşu bütünler açılar olduğundan

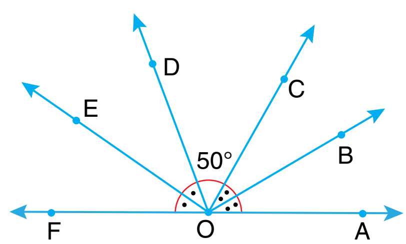
$2x + 16° + a = 180°$

$2 \cdot 17° + 16° + a = 180°$

$50° + a = 180°$

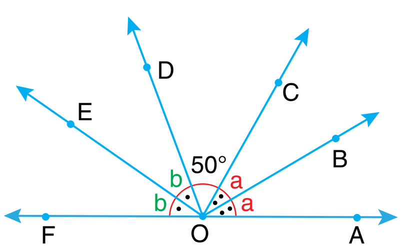
$a = 130°$ olarak bulunur.

Örnek



Yanda verilen şekilde, [OB $\widehat{AOC}$'nın , [OE $\widehat{DOF}$'nın açıortayı $m(\widehat{DOC}) = 50°$ ve A, O, F noktaları doğrusal olduğuna göre $m(\widehat{EOB})$ değerini bulalım.

Çözüm:



Şekle göre;

$2a + 50° + 2b = 180°$

$2a + 2b = 130°$

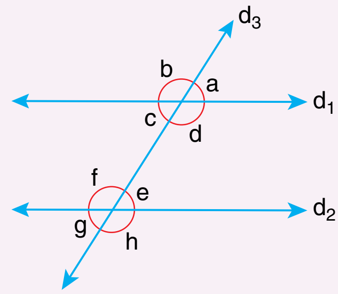
$a + b = 65°$ olur. Bu durumda

$m(\widehat{EOB}) = b + 50° + a = 50° + a + b$

$= 50° + 65° = 115°$ olarak elde edilir.

Bilgi

Şekilde $d_1 // d_2$ olmak üzere d_3 doğrusuna bu doğruların **keseni** denir.



Buna göre

1) a ile c, b ile d, e ile g ve f ile h ters açılardır.

$a = c$, $b = d$, $e = g$, $f = h$ olur.

2) e ile c, f ile d iç ters açılardır. İç ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.

$e = c$, $f = d$ olur.

3) a ile g, b ile h dış ters açılardır. Dış ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.

$a = g$, $b = h$ olur.

4) e ile a, f ile b, g ile c, h ile d yöndeş açılardır. Yöndeş açıların ölçüleri birbirine eşittir.

$e = a$, $f = b$, $g = c$, $h = d$ olur.

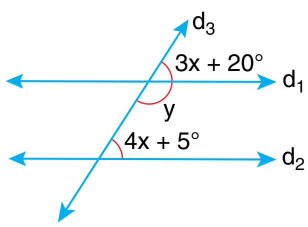
5) e ile d, f ile c karşı durumlu açılardır. Karşı durumlu açıların ölçüleri toplamı 180°dir.

$e + d = f + c = 180°$ dir.

Örnek

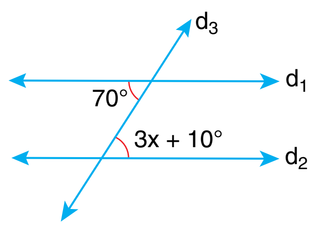
Aşağıda verilen şekillerde $d_1 // d_2$ olduğuna göre istenenleri bulalım.

a)



$x = ?$, $y = ?$

b)



$x = ?$

Çözüm

a) Şekilde $d_1 // d_2$ olduğundan $3x + 20°$ ile $4x + 5°$ yöndeş açılardır.

Bu durumda

$3x + 20° = 4x + 5° \Rightarrow x = 15°$ bulunur.

Diğer yandan $3x + 20°$ ile y komşu bütünler açılardır.

$3x + 20° + y = 180° \Rightarrow 3 \cdot 15° + 20° + y = 180° \Rightarrow 65° + y = 180° \Rightarrow y = 115°$ bulunur.

b) $70°$ ile $3x + 10°$ iç ters açılar olduğundan

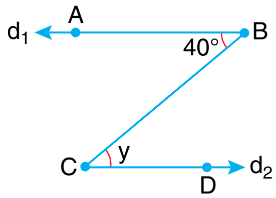
$70° = 3x + 10°$

$60° = 3x \Rightarrow x = 20°$ bulunur.

Örnek

Aşağıdaki şekillerde verilenlere göre istenenleri bulalım.

a)

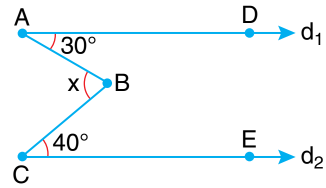


$d_1 \parallel d_2$,

$m(\widehat{ABC}) = 40°$

$m(\widehat{BCD}) = y$ ise y kaç derecedir?

b)



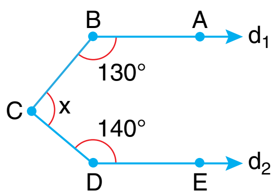
$d_1 \parallel d_2$,

$m(\widehat{DAB}) = 30°$

$m(\widehat{BCE}) = 40°$

$m(\widehat{ABC}) = x$ ise x kaç derecedir?

c)



$d_1 \parallel d_2$,

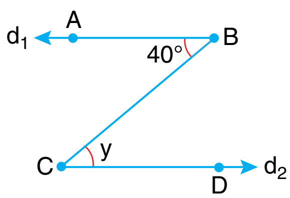
$m(\widehat{ABC}) = 130°$

$m(\widehat{CDE}) = 140°$

$m(\widehat{BCD}) = x$ ise x kaç derecedir?

Çözüm

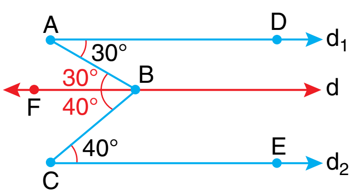
a)



$d_1 \parallel d_2$ olduğundan

$y = 40°$ (iç ters açılar) bulunur.

b)

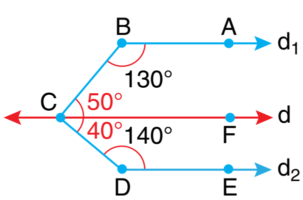


B noktasında geçen d_1 ve d_2 doğrularına paralel olan d doğrusunu çizersek $\widehat{DAB}$ ile $\widehat{ABF}$ ve $\widehat{FBC}$ ile $\widehat{BCE}$ iç ters açılar olacağından

$m(\widehat{CBF}) = 40°$, $m(\widehat{FBA}) = 30°$ olur.

Bu durumda $x = 30° + 40° = 70°$ bulunur.

c)



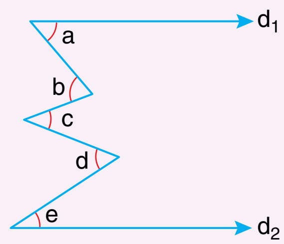
C noktasında d_1 ve d_2 doğrularına paralel olan d doğrusunu çizersek $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{BCF}$ ve $\widehat{DCF}$ ile $\widehat{EDC}$ karşı durumlu açılar olacağından

$m(\widehat{DCF}) = 40°$, $m(\widehat{BCF}) = 50°$ olur.

Bu durumda $x = 50° + 40° = 90°$ olarak bulunur.

Bilgi

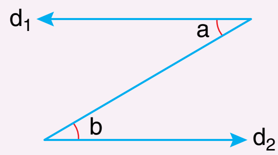
1)



$d_1 \parallel d_2$ ise

$a + c + e = b + d$

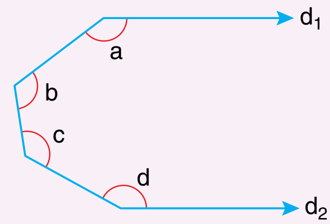
2)



$d_1 \parallel d_2$ ise

$a = b$

3)



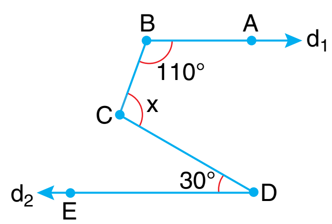
$d_1 \parallel d_2$ ise

$a + b + c + d = (\text{açı sayısı} - 1) \cdot 180°$

$= (4 - 1) \cdot 180°$

$= 3 \cdot 180° = 540°$

Örnek

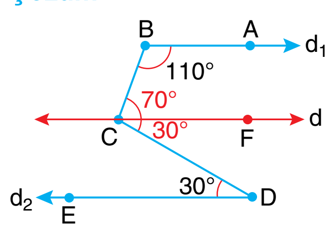


Şekilde $d_1 \parallel d_2$, $m(\widehat{ABC}) = 110°$

$m(\widehat{EDC}) = 30°$ olduğuna göre

$m(\widehat{BCD}) = x$ değerini bulalım.

Çözüm



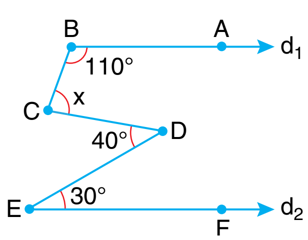
C noktasından geçen d_1 ve d_2 doğrularına paralel bir d doğrusu çizelim. $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{BCF}$ karşı durumlu, $\widehat{DCF}$ ile $\widehat{CDE}$ iç ters açılar olacağından

Bu durumda $m(\widehat{DCF}) = 30°$ ve $m(\widehat{BCF}) = 70°$ olur.

Buradan

$m(\widehat{BCD}) = x = 30° + 70° = 100°$ bulunur.

Örnek



Şekilde $d_1 \parallel d_2$,

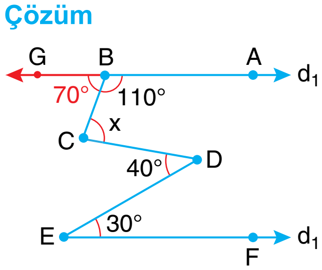
$m(\widehat{ABC}) = 110°$

$m(\widehat{CDE}) = 40°$

$m(\widehat{DEF}) = 30°$

$m(\widehat{BCD}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



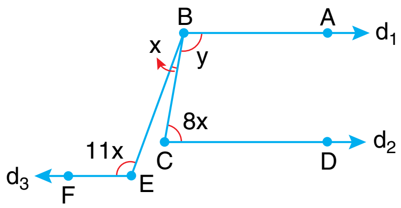
Şekli incelediğimizde $m(\widehat{GBC}) = 70°$ olur.

Bu durumda bilgi kutusundaki 1. özellik yardımıyla

$70° + 40° = x + 30°$

$110° - 30° = x \Rightarrow x = 80°$ bulunur.

Örnek



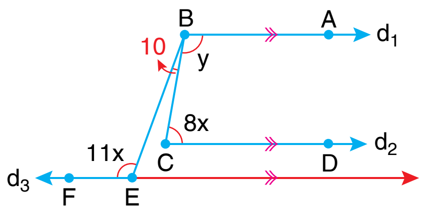
Şekilde $d_1 \mathbin{//} d_2 \mathbin{//} d_3$

$m(\widehat{ABC}) = y$, $m(\widehat{BCD}) = 8x$

$m(\widehat{CBE}) = x$ ve $m(\widehat{BEF}) = 11x$

olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm



Şekilde $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{BCD}$ karşı durumlu, $\widehat{FEB}$ ile $\widehat{EBA}$ iç ters açılar olacağından

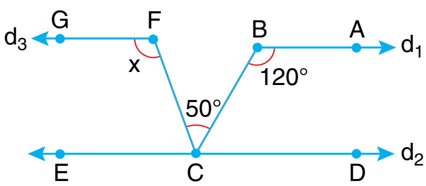
$y + 8x = 180$ ve $11x = y + x$ eşitlikleri vardır.

$11x = y + x \Rightarrow y = 10x$ ve

$10x + 8x = 180° \Rightarrow 18x = 180°$

$x = 10°$ olur.

Örnek



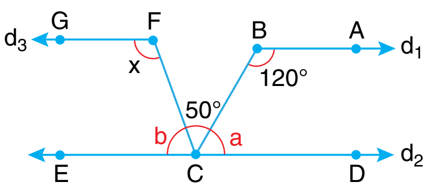
Şekilde $d_1 \mathbin{//} d_2 \mathbin{//} d_3$,

E, C, D noktaları doğrusal

$m(\widehat{ABC}) = 120°$, $m(\widehat{BCF}) = 50°$

olduğuna göre $m(\widehat{GFC}) = x$ değerini bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{BCD}) = a$ ve $m(\widehat{FCE}) = b$ dersek $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{BCD}$ ve $\widehat{GFC}$ ile $\widehat{FCE}$ karşı durumlu açılar olacağından

$a + 120° = 180° \Rightarrow a = 60°$

$a + b + 50° = 180° \Rightarrow b + 60° + 50° = 180°$

$b = 70°$ ve

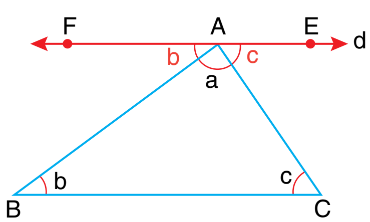
$b + x = 180° \Rightarrow 70° + x = 180°$

$x = 110°$ elde edilir.

Örnek

Bir üçgenin iç açı ölçüleri toplamını bulalım.

Çözüm



Şekilde verilen üçgenin

A köşesinde d // [BC] olacak biçimde d doğrusu çizersek

$m(\widehat{EAC}) = c$, $m(\widehat{FAB}) = b$ (iç ters açılardan) olur.

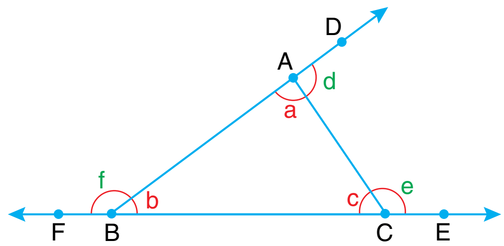
$\widehat{FAE}$ doğru açı olacağından

$a + b + c = 180°$ elde edilir.

Örnek

Bir üçgende dış açı ölçüleri toplamını bulalım.

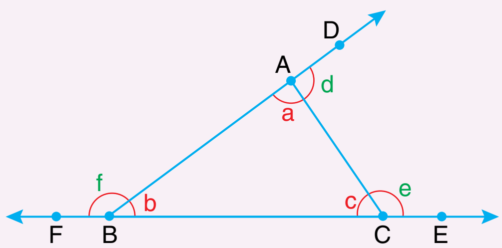
Çözüm



Şekilde a ile d, c ile e ve f ile b komşu bütünler açılar olduğundan

$$\begin{array}{rl} & a + d = 180° \\ & b + f = 180° \\ + & c + e = 180° \\ \hline & \underbrace{a + b + c}_{180°} + d + e + f = 540° \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 180 + d + e + f = 540° \\ d + e + f = 540° - 180° \\ d + e + f = 360° \text{ elde edilir.} \end{array}$$

Bilgi



Yukarıda verilen üçgende;

1) a, b, c iç açılardır. Bir üçgende iç açıların ölçüleri toplamı 180°dir.

$$a + b + c = 180°$$

2) d, e, f dış açılardır. Bir üçgende dış açıların ölçüleri toplamı 360°dir.

$$e + f + d = 360°$$

3) Bir üçgende herhangi bir köşedeki bir iç açı ile bir dış açının ölçüleri toplamı 180°dir.

$$a + d = b + f = c + e = 180°$$

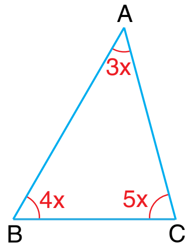
4) Bir üçgende herhangi bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

$d = b + c$, $f = a + c$, $e = b + a$ olur.

Örnek

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri 3, 4 ve 5 ile orantılıdır. Buna göre bu üçgenin en küçük iç açısının ölçüsünü bulalım.

Çözüm



Üçgenin iç açı ölçüleri 3, 4 ve 5 ile orantılı olduğundan

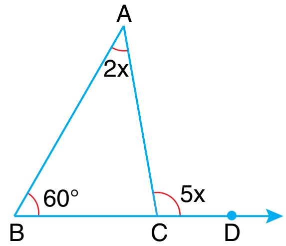
$m(\widehat{A}) = 3x$, $m(\widehat{B}) = 4x$, $m(\widehat{C}) = 5x$ yazılabilir.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$

$3x + 4x + 5x = 180° \Rightarrow 12x = 180° \Rightarrow x = 15°$ bulunur.

Buradan en küçük açının ölçüsü $m(\widehat{A}) = 3 \cdot 15° = 45°$ olarak elde edilir.

Örnek



Şekilde ABC bir üçgen, B, C, D noktaları doğrusal,

$m(\widehat{B}) = 60°$, $m(\widehat{A}) = 2x$ ve $m(\widehat{ACD}) = 5x$

olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm

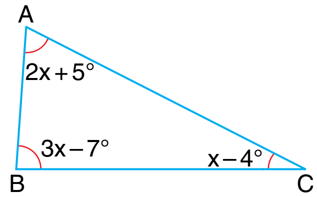
$\widehat{ACD}$ bir dış açı olduğundan

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$

$5x = 60° + 2x$

$3x = 60° \Rightarrow x = 20°$ elde edilir.

Örnek



Yanda verilen üçgende $m(\widehat{A}) = 2x + 5°$

$m(\widehat{B}) = 3x - 7°$ ve $m(\widehat{C}) = x - 4°$ olduğuna göre

x değerini bulalım.

Çözüm

Üçgenin iç açı ölçüleri toplamı 180° olacağından

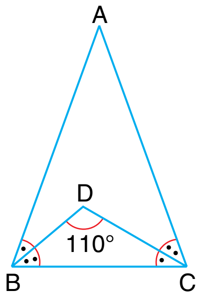
$3x - 7° + 2x + 5° + x - 4° = 180°$

$6x - 6° = 180°$

$6x = 186$

$x = 31°$ elde edilir.

Örnek

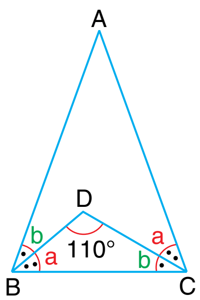


Şekilde $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCA})$,

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DCB})$ ve $m(\widehat{D}) = 110°$ olduğuna göre

$m(\widehat{A})$ değerini bulalım.

Çözüm



$\widehat{BDC}$'nde $a + b + 110° = 180° \Rightarrow a + b = 70°$

$\widehat{ABC}$'nde

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{A}) = 180°$

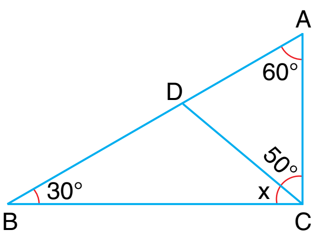
$a + b + a + b + m(\widehat{A}) = 180°$

$70° + 70° + m(\widehat{A}) = 180°$

$140° + m(\widehat{A}) = 180°$

$m(\widehat{A}) = 40°$ bulunur.

Örnek

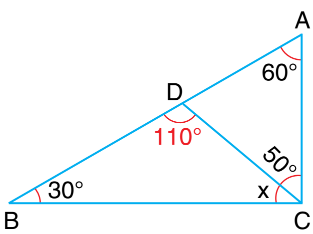


Şekilde A, D, B noktaları doğrusal

$m(\widehat{A}) = 60$, $m(\widehat{DCA}) = 50°$ ve $m(\widehat{B}) = 30°$ olduğuna göre

$m(\widehat{DCB}) = x$ değerini bulalım.

Çözüm



$\widehat{ADC}$'nde $\widehat{BDC}$ dış açı olduğundan

$m(\widehat{BDC}) = 60° + 50° = 110°$ olur.

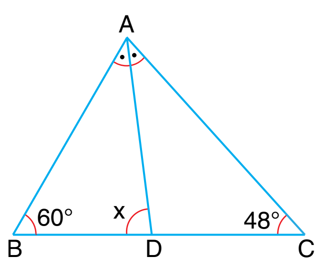
$\widehat{BDC}$'nde

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{BDC}) + m(\widehat{BCD}) = 180°$

$30° + \quad 110° + x = 180°$

$x = 40°$ elde edilir.

Örnek

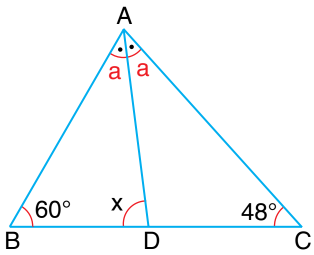


Yanda verilen $\widehat{ABC}$'nde [AD] açıortay, B, D ve C doğrusal noktalar,

$m(\widehat{B}) = 60°$, $m(\widehat{C}) = 48°$

olduğuna göre $m(\widehat{ADB}) = x$ değerini bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD}) = a$ dersek

$\widehat{ABC}$'nde $60° + 48° + 2a = 180°$

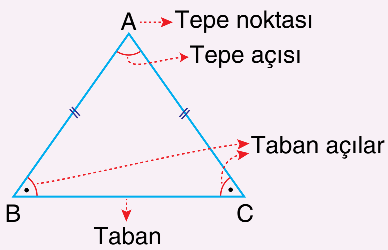
$108° + 2a = 180°$

$2a = 72 \Rightarrow a = 36°$ olur.

$\widehat{ADC}$'nde $\widehat{ADB}$ bir dış açı olduğundan

$m(\widehat{ADB}) = a + 48° \Rightarrow x = 36° + 48° = 84°$ elde edilir.

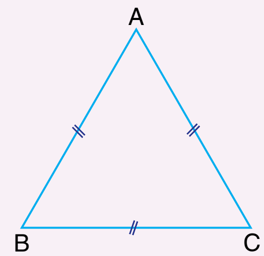
Bilgi



İki kenar uzunluğu birbirine eşit olan üçgene **ikizkenar üçgen** denir.

İkizkenar üçgende taban açılarının ölçüleri eşittir.

$|AB| = |AC| \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olur.



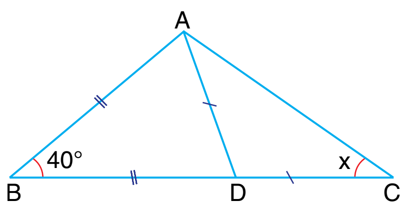
Bütün kenar uzunlukları birbirine eşit olan üçgene **eşkenar üçgen** denir.

Eşkenar üçgenin bütün iç açılarının ölçüleri eşit ve 60°dir.

$|AB| = |AC| = |BC|$ ise

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$ olur.

Örnek



Yandaki şekilde B, D, C noktaları doğrusal,

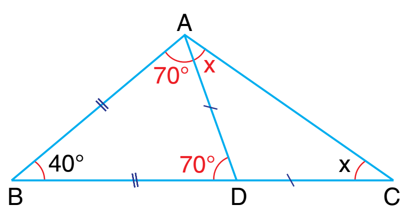
$|AB| = |BD|$,

$|AD| = |DC|$ ve

$m(\widehat{B}) = 40°$ olduğuna göre

$m(\widehat{C}) = x$ değerini bulalım.

Çözüm



$|AB| = |BD|$ olduğundan $\widehat{ABD}$ ikizkenar üçgendir.

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BDA}) = 70°$ olur.

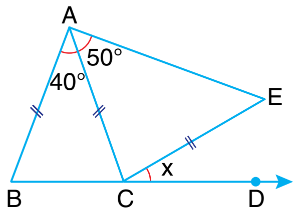
Bu durumda $m(\widehat{ADC}) = 110°$ bulunur.

Ayrıca $|AD| = |DC|$ olduğundan

$\widehat{ADC}$ ikizkenar üçgendir ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{DAC}) = x$ olur.

$110° + x + x = 180° \Rightarrow 2x = 70° \Rightarrow x = 35°$ bulunur.

Örnek



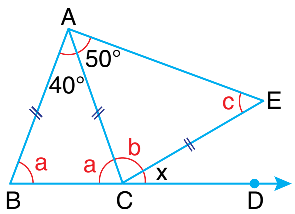
Yandaki şekilde B, C, D doğrusal noktalar,

$|AB| = |AC| = |CE|$, $m(\widehat{BAC}) = 40°$ ve

$m(\widehat{CAE}) = 50°$ olduğuna göre

$m(\widehat{DCE}) = x$ değerini bulalım.

Çözüm:



Şekilde $|AC| = |CE|$ olduğundan $c = 50°$ olur.

AEC ikizkenar üçgeninde

$50° + c + b = 180°$

$100° + b = 180°$

$b = 80°$ olur.

$\widehat{ABC}$'nde $|AB| = |AC|$ olduğundan $m(\widehat{B}) = m(\widehat{BCA}) = a$ olur.

$\widehat{ABC}$'nde

$40° + a + a = 180°$

$2a = 140°$

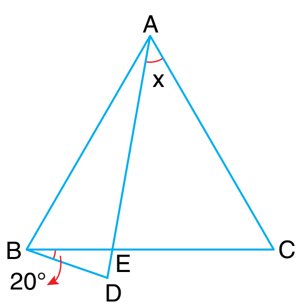
$a = 70°$ bulunur.

Buradan $\widehat{BCD}$ doğru açı olduğundan

$a + b + x = 180°$

$70° + 80° + x = 180° \Rightarrow x = 30°$ elde edilir.

Örnek



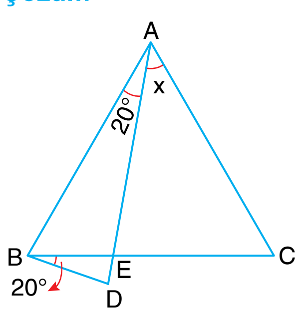
Yandaki şekilde $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen,

$m(\widehat{EBD}) = 20°$ ve

$|BC| = |AD|$, $E \in [BC]$

olduğuna göre $m(\widehat{CAE}) = x$ değerini bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ eşkenar olduğundan $|AB| = |AC| = |BC|$ olur.

$|BC| = |AD|$ olduğundan $|AB| = |AD|$ olur.

Buradan

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BDA}) = 80°$ bulunur.

$\widehat{ABD}$'nde $m(\widehat{BAD}) = 20°$ olur.

$\widehat{ABC}$'nde $20° + x = 60°$

$x = 40°$ elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. $3x - 30°$ lik açı bir dar açı olduğuna göre x in hangi aralıkta değerler alacağını bulunuz.

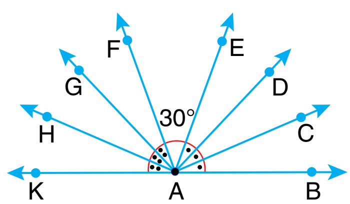
2. Ölçüsü tümlerinin ölçüsünden 10° daha büyük olan açının ölçüsünü bulunuz.

3. Bir açının bütünlerine oranı $\frac{1}{5}$ olduğuna göre büyük açının ölçüsünü bulunuz.

4. Tümleri ile bütünlerinin ölçüleri toplamı 130° olan açının ölçüsünü bulunuz.

5. Tümler iki açının ölçüleri farkı 50° olduğuna göre küçük açının bütünlerinin ölçüsünü bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde

K, A ve B doğrusal noktalar,

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{DAE})$,

$m(\widehat{KAH}) = m(\widehat{HAG}) = m(\widehat{GAF})$ ve

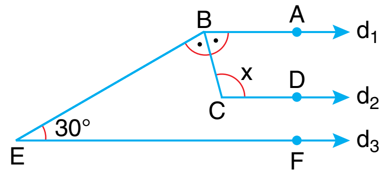
$m(\widehat{FAE}) = 30°$ olduğuna göre

$m(\widehat{HAC})$ değerini bulunuz.

7. Bir $\widehat{ABC}$'nin iç açılarının ölçüleri arasında

$5 \cdot m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ ilişkisi olduğuna göre $\widehat{A}$'nın ölçüsünü bulunuz.

8.



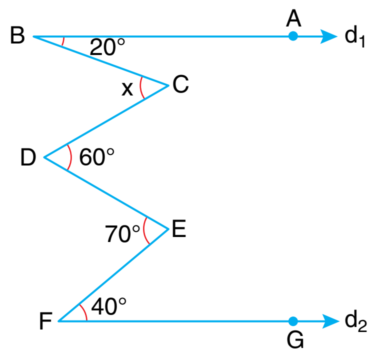
Şekilde $d_1 // d_2 // d_3$,

$m(\widehat{E}) = 30°$ ve

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{EBC})$ olduğuna göre

$m(\widehat{BCD}) = x$ değerini bulunuz.

9.



Şekilde $d_1 // d_2$

$m(\widehat{ABC}) = 20°$

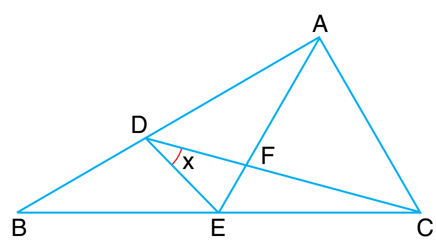
$m(\widehat{CDE}) = 60°$

$m(\widehat{DEF}) = 70°$

$m(\widehat{EFG}) = 40°$

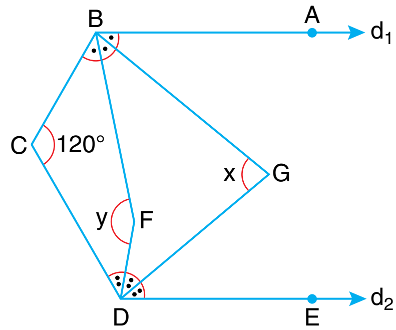
olduğuna göre $m(\widehat{BCD}) = x$ değerini bulunuz.

10.



Yukarıdaki şekilde $\widehat{AEC}$ eşkenar üçgen D, F, C ve B, E, C kendi aralarında doğrusal noktalar, $D \in [AB]$, $F \in [AE]$, $|AD| = |AC|$, $|BE| = |EC|$ olduğuna göre $m(\widehat{CDE}) = x$ değerini bulunuz.

11.



Şekilde $d_1 // d_2$

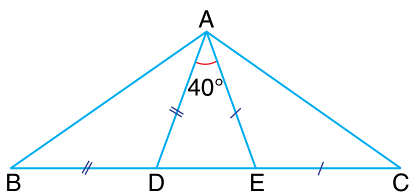
$m(\widehat{CBF}) = m(\widehat{FBG}) = m(\widehat{GBA})$,

$m(\widehat{CDF}) = m(\widehat{FDG}) = m(\widehat{GDE})$

$m(\widehat{BCD}) = 120°$, $m(\widehat{BFD}) = y$ ve $m(\widehat{BGD}) = x$

olduğuna göre x + y toplamını bulunuz.

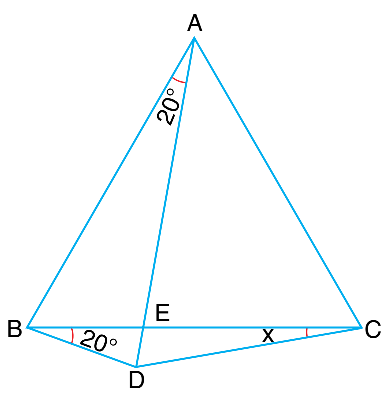
12.



Yukarıdaki şekilde B, D, E, C doğrusal noktalar, |AD| = |BD|, |AE| = |EC| ve

$m(\widehat{DAE}) = 40°$ olduğuna göre $\widehat{BAC}$'nın ölçüsünü bulunuz.

13.

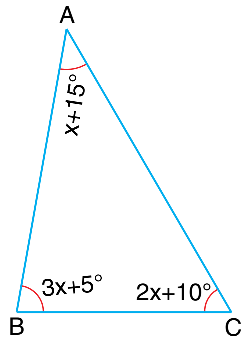


Yukarıdaki şekilde ABC eşkenar üçgen

$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EBD}) = 20°$ olduğuna göre

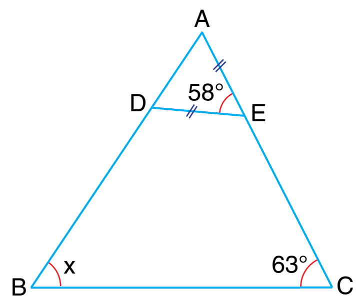
$m(\widehat{ECD}) = x$ değerini bulunuz.

14.



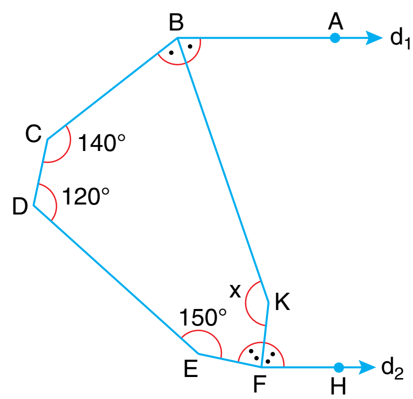
Yukarıdaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$'ne göre x değerini bulunuz.

15.



Şekildeki $\widehat{ABC}$'nde $m(\widehat{C}) = 63°$, |AE| = |DE| ve $m(\widehat{AED}) = 58°$ olduğuna göre $m(\widehat{B}) = x$ değerini bulunuz.

16.



Şekilde $d_1 // d_2$

$m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{CBK})$,

$m(\widehat{EFK}) = m(\widehat{HFK})$,

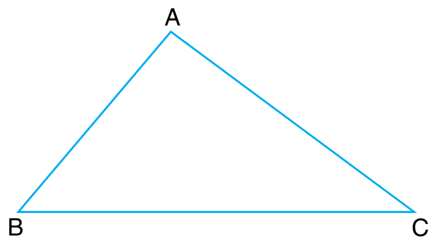
$m(\widehat{BCD}) = 140°$, $m(\widehat{CDE}) = 120°$

$m(\widehat{DEF}) = 150°$ ve $m(\widehat{BKF}) = x$

olduğuna göre x değerini bulunuz.

4.1.2. Üçgende Açı - Kenar İlişkisi

Örnek



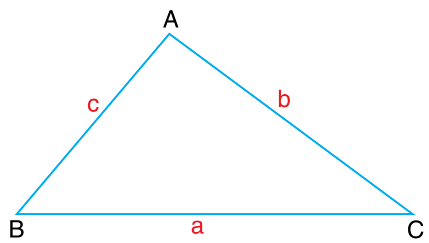
Yanda verilen $\overset{\triangle}{ABC}$'nin kenar uzunlukları arasında

$|BC| > |AC|$ ve

$|BC| > |AB|$ ilişkisi vardır.

Buna göre $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ ve $m(\widehat{A}) > m(\widehat{C})$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

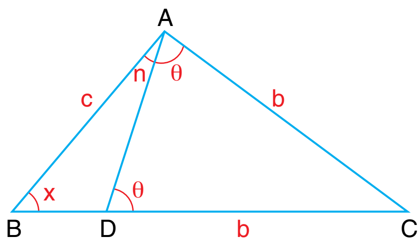


Üçgenin kenar uzunluklarını

$|BC| = a$ br, $|AB| = c$ br, $|AC| = b$ br olarak alalım.

Önce $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ olduğunu gösterelim.

$a > b$ olduğundan $[BC]$ üzerinde $|DC| = b$ br olacak biçimde bir D noktası alalım ve $[AD]$'nı oluşturalım.



Oluşan $\overset{\triangle}{ADC}$'nde $|AC| = |DC| = b$ br olduğundan

$\overset{\triangle}{ADC}$ ikizkenar üçgen olur.

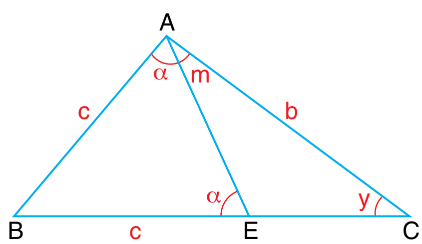
$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC}) = \theta$, $m(\widehat{B}) = x$, $m(\widehat{BAD}) = n$ diyelim.

$\overset{\triangle}{ABD}$'nde $\widehat{ADC}$ bir dış açı olduğundan $\theta = x + n$ ise $\theta > x$ ve

$m(\widehat{A}) = n + \theta$ olduğundan $\theta + n > x \Rightarrow m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ elde edilir.

Şimdi de $m(\widehat{A}) > m(\widehat{C})$ olduğunu gösterelim.

$a > c$ olduğundan $[BC]$ üzerinde $|BE| = c$ br olacak biçimde bir E noktası alalım.



Oluşan $\overset{\triangle}{ABE}$'nde $|AB| = |BE| = c$ br olduğundan

$\overset{\triangle}{ABE}$ ikizkenar üçgen olur.

$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BEA}) = \alpha$, $m(\widehat{EAC}) = m$, $m(\widehat{C}) = y$ diyelim.

$\overset{\triangle}{AEC}$'nde $\widehat{AEB}$ bir dış açı olduğundan $\alpha = m + y$ ise $\alpha > y$ ve

$m(\widehat{A}) = \alpha + m$ olduğundan $\alpha + m > y \Rightarrow m(\widehat{A}) > m(\widehat{C})$ elde edilir.

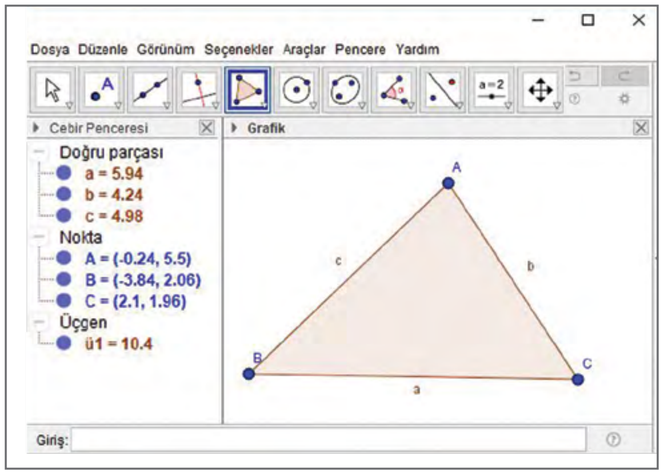
Bu durumda bir üçgende en uzun kenarın karşısındaki açının ölçüsü en büyüktür. Bu ifadenin karşıtı da doğrudur. Yani bir üçgende açı ölçüsü en büyük olan açının karşısındaki kenar en uzundur.

Örnek

Dinamik matematik yazılımı yardımıyla bir üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarların karşılarındaki açıların ölçüleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

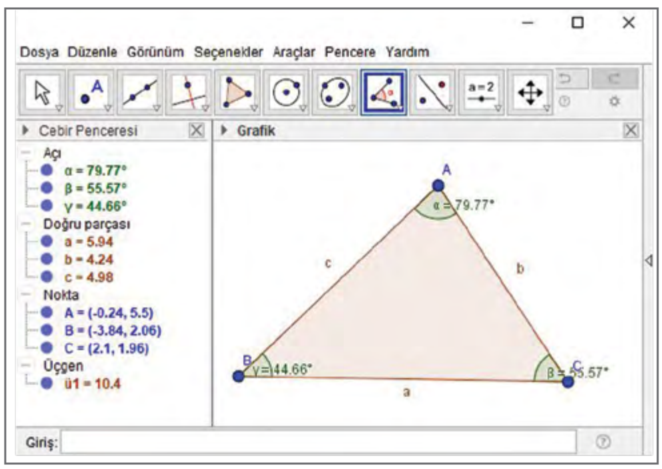
Dinamik matematik yazılımını bilgisayarımıza indirip oturumu açalım. Gelen ekranın sağındaki oka tıklayarak grafik penceresini açalım. Ekranda araç çubuğundaki 5. kutuya tıklayıp ardından gelen "Çokgen" seçeneğini seçelim ve herhangi bir $\widehat{ABC}$'ni oluşturalım.



Daha sonra 8. kutuya tıklayıp ardından “Açı” seçeneğini seçelim. Üçgenin her bir köşesindeki iki kenara tıklayarak iç açıların ölçülerini bulalım.

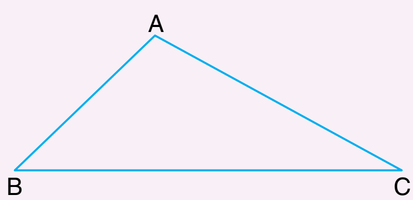
Cebir penceresinde üçgenin kenarlarının uzunlukları verilmiştir.

Üçgenin iç açı ölçülerinin büyüklük sırasıyla kenar uzunluklarının büyüklük sırası arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.



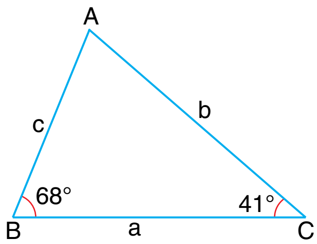
Bilgi

Bir üçgende uzun olan kenarın karşısındaki açının ölçüsü daha büyüktür. Bu ifadenin karşıtı da doğrudur. Yani bir üçgende ölçüsü büyük olan açının karşısındaki kenarın uzunluğu daha büyüktür.



$|BC| > |AC| > |AB| \Leftrightarrow m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olur.

Örnek



Yanda verilen üçgenin kenar uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

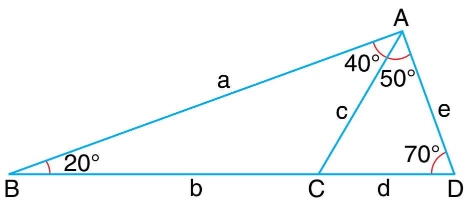
Çözüm

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) + 68° + 41° = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) = 71°$ olur.

Üçgenin açıları arasında $m(\widehat{C}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{A})$ sıralaması bulunduğundan

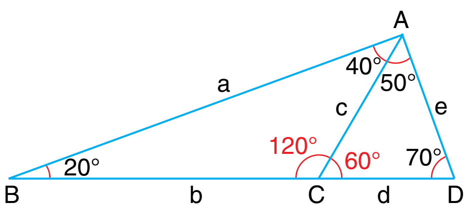
kenarlar arasında $c < b < a$ sıralaması bulunur.

Örnek



Yandaki şekilde verilenlere göre a, b, c, d, e uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm



$\overset{\frown}{ACD}$'nde $m(\widehat{ACD}) = 60°$ ve

$\overset{\frown}{ABC}$'nde $m(\widehat{ACB}) = 120°$ olur.

Bu durumda

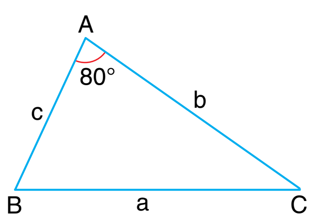
$\overset{\frown}{ACD}$'nde

$50° < 60° < 70°$ olduğundan $d < e < c$ ve

$\overset{\frown}{ACB}$'nde $20° < 40° < 120°$ olduğundan $c < b < a$ bulunur.

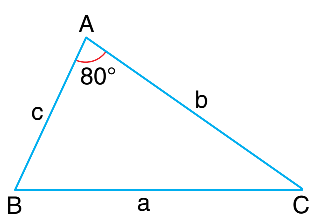
Bu durumda $d < e < c < b < a$ elde edilir.

Örnek



Yanda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde $m(\widehat{A}) = 80°$ ve $a > b > c$ olduğuna göre $m(\widehat{C})$'nın alacağı <u>en büyük</u> tam sayı değerini bulalım.

Çözüm



$\overset{\frown}{ABC}$'nde $a > b > c$ olduğundan

$m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 100°$ olur.

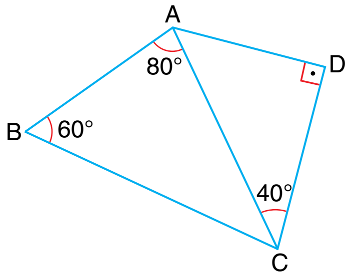
$m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olduğundan

$m(\widehat{B}) > 50°$, $m(\widehat{C}) < 50°$ olacağından

$m(\widehat{C})$'nin alacağı en büyük tam sayı değeri 49° olarak bulunur.

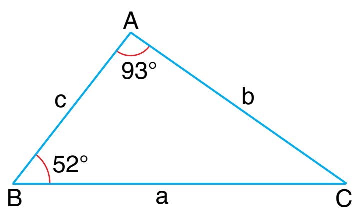
PEKİŞTİRME SORULARI

1.



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre en uzun kenarı belirleyiniz.

2.

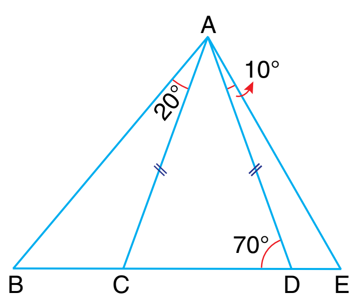


Yukarıdaki şekilde verilenlere göre

$|b - a| + |b - c| - |c - a|$

ifadesinin değerini bulunuz.

3.



Yukarıdaki şekilde $|AC| = |AD|$,

$m(\widehat{BAC}) = 20°$, $m(\widehat{CDA}) = 70°$ ve

$m(\widehat{DAE}) = 10°$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $|BE| > |AE| > |AB|$

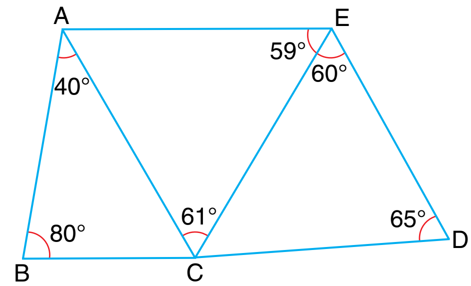
B) $|BE| > |AB| > |AE|$

C) $|BE| > |AB| = |AE|$

D) $|AB| > |BE| > |AE|$

E) $|AE| > |BE| > |AB|$

4.



Yukarıdaki şekilde

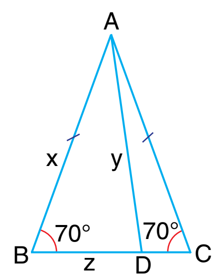
$m(\widehat{ABC}) = 80°$, $m(\widehat{BAC}) = 40°$,

$m(\widehat{ACE}) = 61°$, $m(\widehat{AEC}) = 59°$,

$m(\widehat{CED}) = 60°$ ve $m(\widehat{CDE}) = 65°$

olduğuna göre üçgenlerin kenarları içinde en uzun kenarı bulunuz.

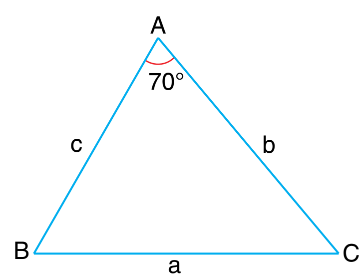
5.



Yukarıda verilen şekilde $|AB| = |AC|$

olduğuna göre x, y ve z değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

6.



Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde

$m(\widehat{A}) = 70°$ ve $a > b > c$ olduğuna göre

$m(\widehat{B})$'nin alacağı <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.

4.1.3. Üçgenin Kenar Uzunlukları Arasındaki İlişki

Örnek

Dinamik matematik yazılımı yardımıyla uzunlukları verilen üç doğru parçası ile hangi durumlarda üçgen oluşturulabileceğini inceleyelim.

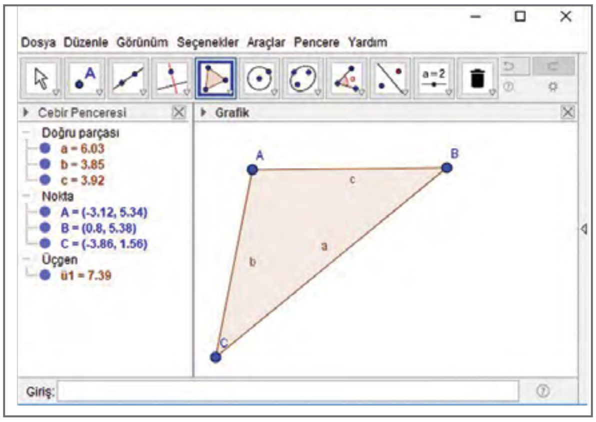
Çözüm

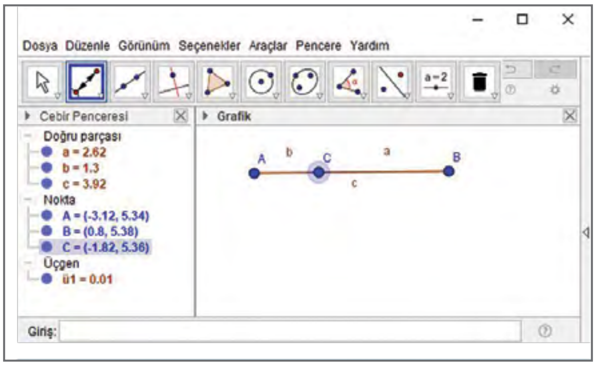
Dinamik matematik yazılımını bilgisayarımıza indirip oturumu açalım. Ekranın sağındaki oka tıklayarak grafik penceresini açalım. Ekranda araç çubuğundaki 5. kutuya tıklayıp ardından gelen “Çokgen” seçeneğini seçelim ve herhangi bir $\overset{\frown}{ABC}$’ni oluşturalım. Cebir penceresinde üçgenin kenar uzunlukları görülmektedir. Üçgenin kenar uzunlukları yardımıyla iki kenarın uzunlukları toplamı ve farkının mutlak değerini diğer kenarın uzunluğu ile karşılaştıralım.

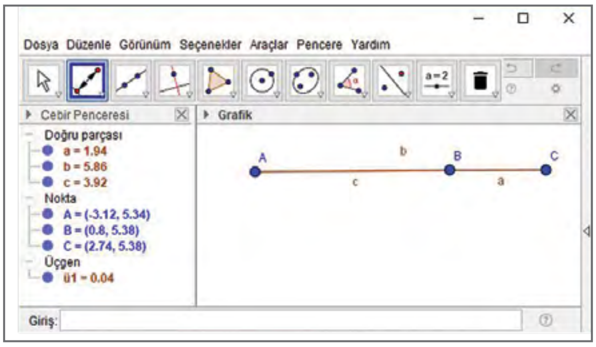
Daha sonra araç çubuğundaki 2. kutuya tıklayıp ardından gelen “Noktayı bağla / ayır” seçeneği yardımıyla üçgenin C köşesini farklı biçimlerde kaydırarak her seferde üçgenin iki kenar uzunlukları toplamı ile uzunlukları farkının mutlak değerini diğer kenarın uzunluğu ile karşılaştıralım.

Yandaki görsellerde üçgenin C köşesinin [AB] üzerinde ve [AB]’nın uzantısı üzerindeki konumu gösterilmiştir.

Verilen üç farklı uzunlukla hangi durumlarda üçgen oluşturulabilir? Açıklayınız.

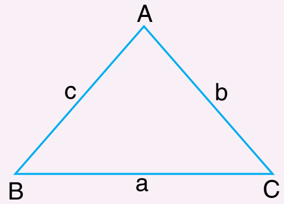






Bilgi

Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük uzunlukları farkının mutlak değerinden büyüktür. Bu kurala “üçgen eşitsizliği” denir.



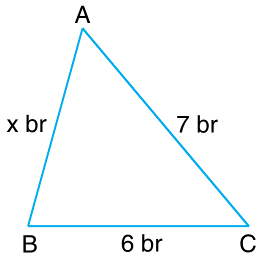
Üçgen eşitsizliği

$|b - c| < a < b + c$

$|a - c| < b < a + c$

$|a - b| < c < a + b$ olur.

Örnek



Yanda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde $|AC| = 7$ br, $|BC| = 6$ br olduğuna göre

$|AB| = x$'in alacağı tam sayı değerlerini bulalım.

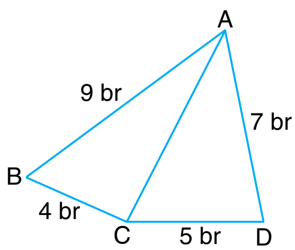
Çözüm

Üçgen eşitsizliğinden

$7 - 6 < x < 7 + 6 \Rightarrow 1 < x < 13$ olduğundan

x; 2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 değerlerini alır.

Örnek



Şekilde $|AB| = 9$ br, $|BC| = 4$ br, $|CD| = 5$ br ve $|AD| = 7$ br olduğuna göre

$|AC|$'nun alacağı <u>en büyük</u> tam sayı değerini bulalım.

Çözüm

$\overset{\frown}{ABC}$'nde üçgen eşitsizliğinden

$9 - 4 < |AC| < 9 + 4 \Rightarrow 5 < |AC| < 13$

$\overset{\frown}{ACD}$'nde üçgen eşitsizliğinden

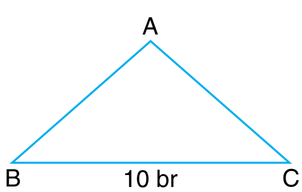
$7 - 5 < |AC| < 7 + 5 \Rightarrow 2 < |AC| < 12$ olur.

Bu iki eşitsizlikten

$5 < |AC| < 12$ aralığında değerler aldığı görülür.

Bu durumda $|AC|$'nun alacağı en büyük tam sayı değeri 11 olarak elde edilir.

Örnek



Yanda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde $|BC| = 10$ br olduğuna göre

Ç($\overset{\frown}{ABC}$)'nin alacağı <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulalım.

Çözüm

Ç($\overset{\frown}{ABC}$) $= |AB| + |AC| + |BC| = |AB| + |AC| + 10$ olur.

Üçgen eşitsizliğinden

$10 < |AB| + |AC|$ olduğundan $|AB| + |AC|$ toplamının alacağı en küçük tam sayı değeri 11 olacaktır.

Bu durumda Ç($\overset{\frown}{ABC}$)'nin alacağı en küçük tam sayı değeri $10 + 11 = 21$ olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıda verilen uzunluklarla bir üçgen oluşturulup oluşturulamayacağını belirleyiniz.

a) a = 5 br
b = 6 br
c = 7 br

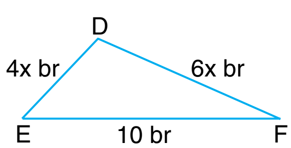
b) a = 4 br
b = 7 br
c = 11 br

c) a = 8 br
b = 7 br
c = 13 br

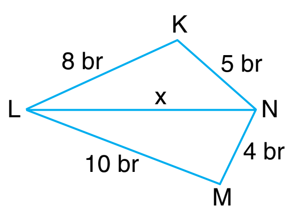
ç) a = 10 br
b = 7 br
c = 13 br

2. Aşağıda verilen üçgenlerde x değerinin hangi aralıklarda değerler alacağını bulunuz.

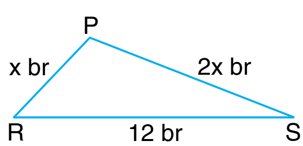
a) |AB| = 5 br
|AC| = 9 br
|BC| = x br

b) 

|EF| = 10 br
|DE| = 4x br
|DF| = 6x br

c) 

|KL| = 8 br
|KN| = 5 br
|LM| = 10 br
|MN| = 4 br
|LN| = x br

ç) 

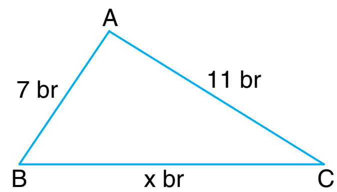
|PR| = x br
|PS| = 2x br
|RS| = 12 br

d) |KL| = 11 br
|LM| = 9 br
|KM| = x br

3. Kenar uzunlukları birer tam sayı olan $\widehat{ABC}$'nin çevresinin uzunluğu 24 cm'dir.

Buna göre bu üçgenin bir kenarının alacağı <u>en küçük</u> ve <u>en büyük</u> tam sayı değerini bulunuz.

4.

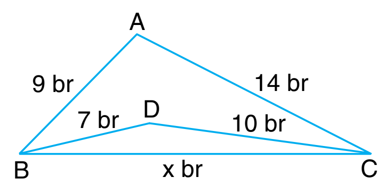


Yukarıdaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$'de

|AB| = 7 br,
|AC| = 11 br ve
|BC| = x br

olduğuna göre $\widehat{ABC}$'nin çevresinin alacağı <u>en büyük</u> tam sayı değerini bulunuz.

5.



Yukarıda verilen şekilde

|AB| = 9 br
|AC| = 14 br
|BD| = 7 br ve |DC| = 10 br

olduğuna göre |BC| = x'in hangi aralıkta değerler alabileceğini belirleyiniz.

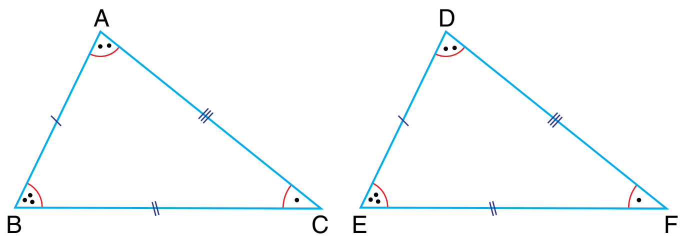
6. Çeşitkenar bir ABC üçgeninde |AB| = 13 br, |AC| = 10 br ve |BC| = x br olduğuna göre x'in alacağı tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 224 B) 227 C) 229
D) 231 E) 233

4.2. ÜÇGENLERDE EŞLİK VE BENZERLİK

4.2.1. İki Üçgenin Eşliği

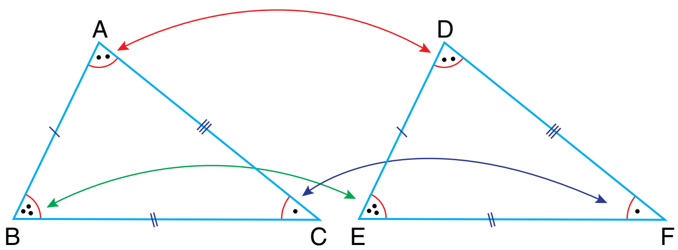
Örnek



Yanda verilen $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$'lerinde eşit sayıda noktalarla belirtilen açılar birbirlerine, aynı çizgilerle belirtilen kenarlar da birbirlerine eştir.

Buna göre üçgenlerin eş olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$'nde eş açılar ve eş kenarları belirleyelim.

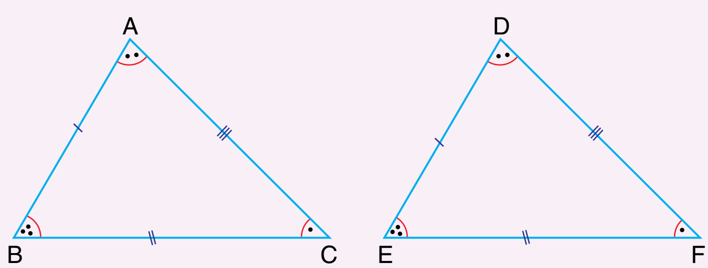
Eş Açılar	Eş Kenarlar
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$ olduğundan $\widehat{A} \cong \widehat{D}$	$\|AB\| = \|DE\|$ olduğundan $[AB] \cong [DE]$
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ olduğundan $\widehat{B} \cong \widehat{E}$	$\|BC\| = \|EF\|$ olduğundan $[BC] \cong [EF]$
$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ olduğundan $\widehat{C} \cong \widehat{F}$	$\|CA\| = \|FD\|$ olduğundan $[CA] \cong [FD]$

Üçgenlerin açıları ve kenarları arasında yapılan bire bir eşlemede üçgenlerin eş oldukları görülür.

Bu eşlik $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ biçiminde gösterilir.

Bilgi

Aralarında bire bir eşleme yapılan iki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları ve açı ölçüleri eşit ise üçgenlere eş üçgenler denir. Eşlik işareti "≅" biçiminde gösterilir.



$$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$$

$$\Leftrightarrow$$

$\widehat{A} \cong \widehat{D}$ $[AB] \cong [DE]$

$\widehat{B} \cong \widehat{E}$ ve $[BC] \cong [EF]$

$\widehat{C} \cong \widehat{F}$ $[AC] \cong [DF]$ olur.

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ eşliğinin yazılışında üçgenlerin eş köşeleri ve eş kenarları arasındaki sıralama önemlidir.

Örnek

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{KLM}$ arasında $\widehat{ABC} \cong \widehat{KLM}$ eşliği olduğuna göre eş açıları ve eş kenarları gösterelim.

Çözüm

Eş Açılar	Eş Kenarlar
$\widehat{ABC} \cong \widehat{KLM}$	$\widehat{ABC} \cong \widehat{KLM}$
$\widehat{A} \cong \widehat{K}$, $\widehat{B} \cong \widehat{L}$, $\widehat{C} \cong \widehat{M}$	[AB] ≅ [KL], [BC] ≅ [LM], [AC] ≅ [KM]

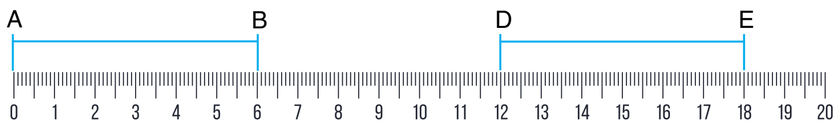
biçiminde olur.

Örnek

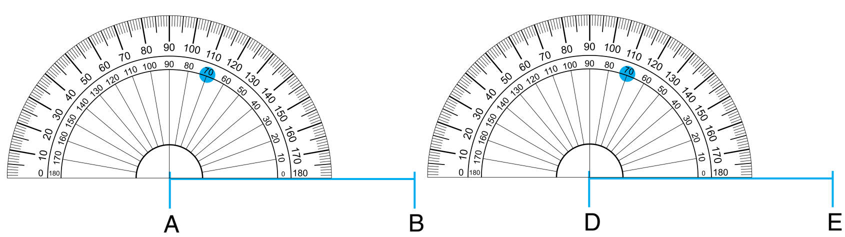
Karşılıklı olarak ikişer kenar uzunlukları ve bu kenarlar arasındaki açılarının ölçüleri eşit olan iki üçgenin eş olduğunu ölçümler yaparak gösterelim.

Çözüm

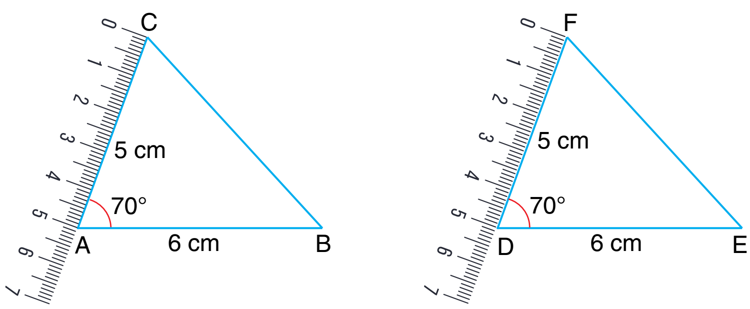
Cetvel yardımıyla 6 cm uzunluğunda [AB] ve [DE]'sını çizelim.



Daha sonra açıölçer yardımıyla doğru parçalarının A ve D köşelerinde 70°lik açılar elde edelim.



Oluşturduğumuz açıların diğer kenarını 5 cm olacak biçimde cetvelle çizelim. Doğru parçasının diğer uçlarını sırasıyla C ve F olarak işaretleyelim. Daha sonra cetvelle C ile B ve F ile E noktalarını birleştirelim.

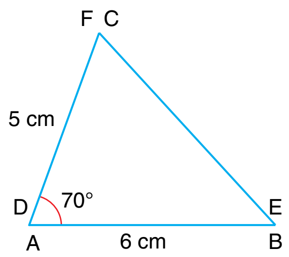


Elde ettiğimiz üçgenlerde eş kenarları ve eş açıları yazalım.

$|AB| = |DE| = 6$ cm $\Rightarrow$ [AB] ≅ [DE], $|AC| = |DF| = 5$ cm $\Rightarrow$ [AC] ≅ [DF] ve

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 70°$ $\Rightarrow$ $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ elde edilir.

Şimdi üçgenleri eş kenarlar üst üste gelecek biçimde çakıştıralım.



Üçgenlerin açıları ve kenarları arasında

$\widehat{C} \cong \widehat{F}$ $\quad$ $[AC] \cong [DF]$

$\widehat{A} \cong \widehat{D}$ ve $[AB] \cong [DE]$

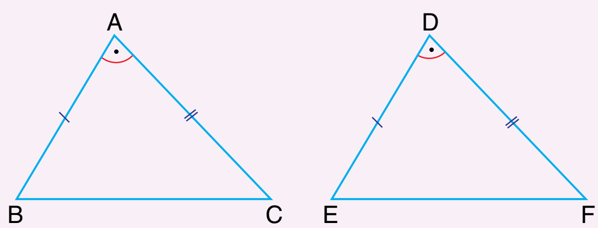
$\widehat{B} \cong \widehat{E}$ $\quad$ $[BC] \cong [EF]$

eşleşmesi yapılacağından $\overset{\frown}{CAB} \cong \overset{\frown}{FDE}$ elde edilir.

Bilgi

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı olarak ikişer kenar uzunlukları eşit ve bu kenarlar arasındaki açıların ölçüleri eşit ise bu üçgenler **eştir** denir.

Bu kural “Kenar – Açı – Kenar (K.A.K.) eşlik kuralı” olarak isimlendirilir.



$\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEF}$'leri arasında

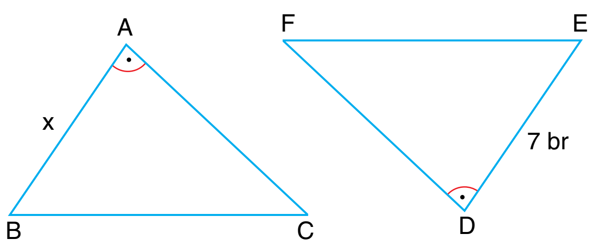
$|AB| = |DE|$

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$|AC| = |DF|$

$\Rightarrow$ K.A.K. eşlik kuralına göre $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$ olur.

Örnek



Yandaki şekilde $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$, $|DE| = 7$ br ve $|AB| = x$ br olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm:

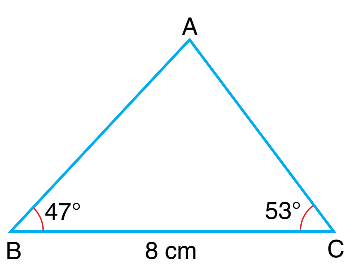
$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$ olduğundan

$|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$ ve

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ olur.

Bu durumda $|AB| = |DE| \Rightarrow x = 7$ br elde edilir.

Örnek



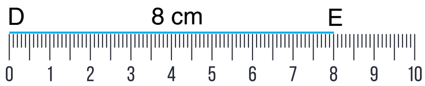
Yanda $|BC| = 8$ cm, $m(\widehat{B}) = 47°$, $m(\widehat{C}) = 53°$ olan bir $\overset{\frown}{ABC}$ verilmiştir.

Buna göre $m(\widehat{D}) = 47°$, $m(\widehat{E}) = 53°$ ve

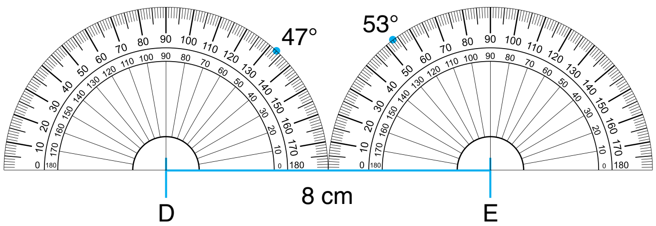
$|DE| = 8$ cm olan bir $\overset{\frown}{FDE}$ çizip $\overset{\frown}{ABC}$ ile karşılaştıralım.

Çözüm

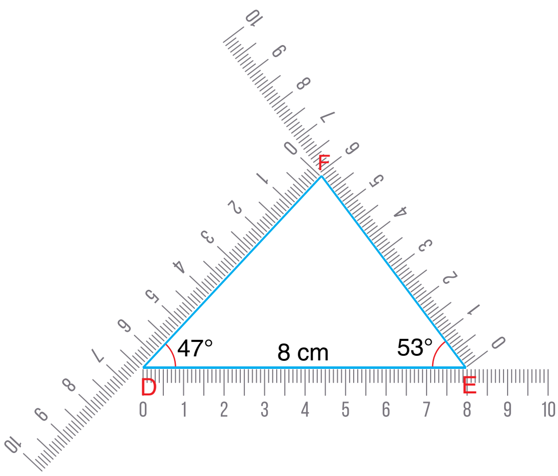
Cetvel yardımıyla bir tane $|DE| = 8$ cm olan $[DE]$ çizelim.



Açıölçer yardımıyla $m(\widehat{D}) = 47°$ ve $m(\widehat{E}) = 53°$ olacak biçimde açıları oluşturalım.



Cetvel yardımıyla bu açıların kenarlarını çizelim. Kenarların kesişim noktasına F diyelim.

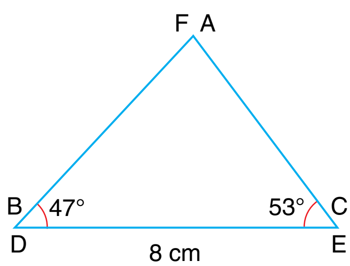


İki üçgenin eş açılarını ve eş kenarlarını yazalım.

$m(\widehat{D}) = m(\widehat{B}) = 47° \Rightarrow \widehat{D} \cong \widehat{B}$, $|DE| = |BC| = 8$ cm $\Rightarrow [DE] \cong [BC]$ ve

$m(\widehat{E}) = m(\widehat{C}) = 53° \Rightarrow \widehat{E} \cong \widehat{C}$ elde edilir.

Elde ettiğimiz bu üçgenle ilk üçgeni üst üste çakıştıralım.



İki üçgenin açıları ve kenarları arasında

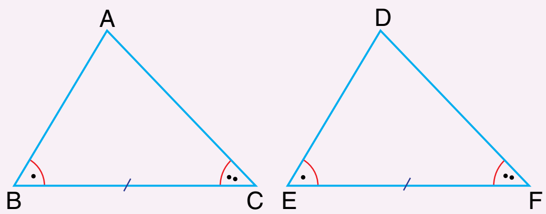
$$\begin{array}{lll} \widehat{A} \cong \widehat{F} & & \\ \widehat{B} \cong \widehat{D} & \text{ve} & \\ \widehat{C} \cong \widehat{E} & & \end{array} \left. \begin{array}{l} [AB] \cong [FD] \\ [BC] \cong [DE] \\ [AC] \cong [FE] \end{array} \right\}$$

eşleşmesi yapılacağından $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{FDE}$ elde edilir.

Bilgi

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı olarak ikişer açısının ölçüleri eşit ve bu açılar arasında kalan kenarların uzunlukları eşit ise bu üçgenler **eştir** denir.

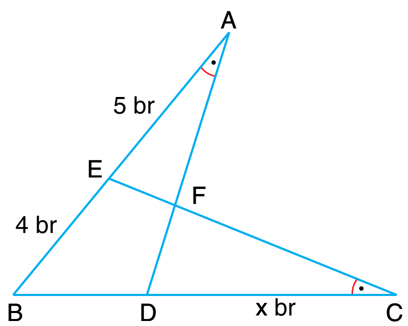
Bu kural "Açı – Kenar – Açı (A.K.A.) eşlik kuralı" olarak isimlendirilir.



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ arasında,

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ |BC| = |EF| \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{A.K.A. eşlik kuralına göre} \\ \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \text{ olur.}\end{array}$$

Örnek



Şekilde ABD ve CBE birer üçgen, $D \in [BC]$,

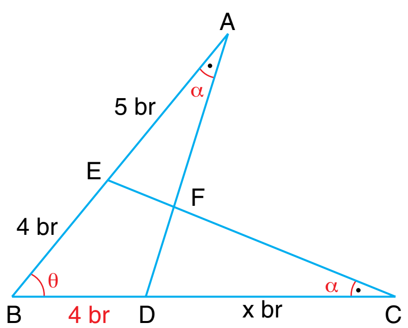
$E \in [AB]$, $F \in [AD]$,

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$, $|AE| = 5$ br, $|BE| = 4$ br,

$|BC| = 9$ br ve $|DC| = x$ br olduğuna göre

x değerini bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABD}$'nde

$m(\widehat{A}) = \alpha$, $|AB| = 9$ br ve $m(\widehat{B}) = \theta$ dersek

$\widehat{CBE}$'nde $m(\widehat{C}) = \alpha$, $|CB| = 9$ br, $m(\widehat{B}) = \theta$ olacağından

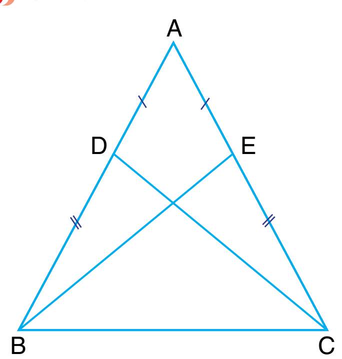
$\widehat{ABD} \cong \widehat{CBE}$ (A.K.A.) olur. Bu durumda

$|AB| = |CB| = 9$ br, $|BD| = |BE| = 4$ br ve $|AD| = |CE|$ olur.

Buradan

$|BD| = 4$ br ve $|BC| = 9$ br $\Rightarrow$ $4 + x = 9$ $\Rightarrow$ $x = 5$ br elde edilir.

Örnek



Yanda ABC ikizkenar üçgeni verilmiştir.

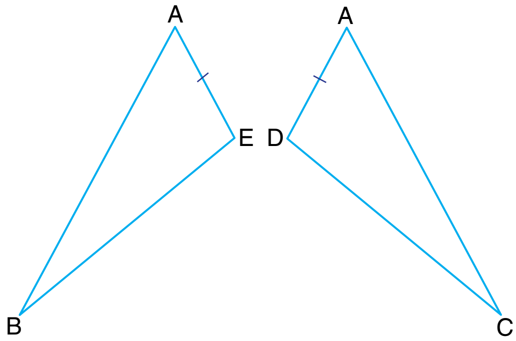
$|AB| = |AC|$, $|AD| = |AE|$,

$|BD| = |CE|$, $D \in [AB]$, $E \in [AC]$,

olduğuna göre $\widehat{BDC}$ ile $\widehat{CEB}$'nin eş olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

$\widehat{ADC}$ ve $\widehat{AEB}$'ni aşağıdaki gibi ayrı ayrı çizelim.



$|AD| = |AE|$ (verilmiş)

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{A})$ (ortak açı)

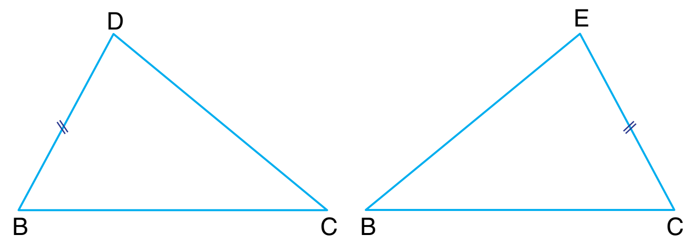
$|AC| = |AB|$ (verilmiş) olduğundan

$\widehat{ADC} \cong \widehat{AEB}$ (K.A.K.) elde edilir.

Bu durumda $|DC| = |EB|$ bulunur.

(Eş üçgenlerde karşılıklı kenar uzunlukları eşittir.)

Şimdi de $\widehat{CEB}$ ve $\widehat{BDC}$'ni çizelim.

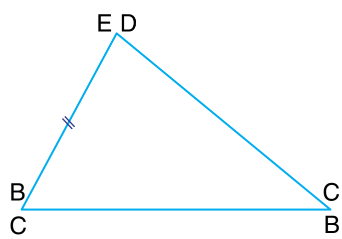


$|DB| = |EC|$ (verilmiş)

$|BC| = |CB|$ (ortak kenar)

$|DC| = |EB|$ (yukarıda gösterildi)
bulunur.

Bu iki üçgeni B ile C noktaları ve E ile D noktaları üst üste gelecek biçimde çakıştıralım.



Bu iki üçgenin açıları ve kenarları arasında

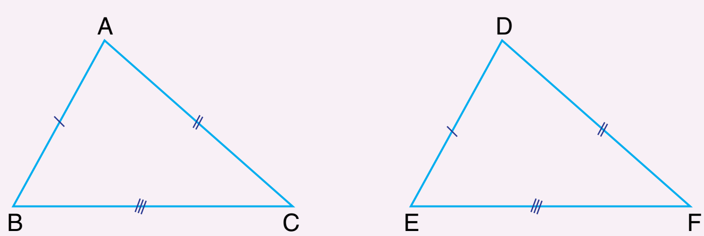
$$\left.\begin{array}{lll} \widehat{D} \cong \widehat{E} & & [DB] \cong [EC] \\ \widehat{B} \cong \widehat{C} & \text{ve} & [BC] \cong [CB] \\ \widehat{C} \cong \widehat{B} & & [DC] \cong [EB] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

eşleşmesi yapılacağından
$\widehat{BDC} \cong \widehat{CEB}$ elde edilir.

Bilgi

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı kenarların uzunlukları birbirine eşit ise bu üçgenler eştir denir.

Bu kural "Kenar – Kenar – Kenar (K.K.K.) eşlik kuralı" olarak isimlendirilir.

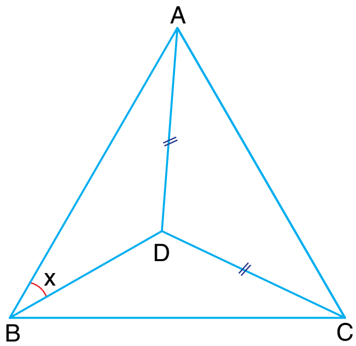


$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ arasında,

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |DE| \\ |BC| = |EF| \\ |AC| = |DF| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

K.K.K. eşlik kuralına göre
$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olur.

Örnek

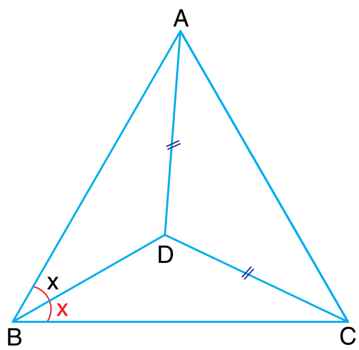


Yanda verilen ABC eşkenar üçgeninde

$|AD| = |CD|$ olduğuna göre

$m(\widehat{ABD}) = x$'in kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm:



$\widehat{ABD}$ ve $\widehat{CBD}$'nde

$|AB| = |CB|$ (verilmiş)

$|AD| = |CD|$ (verilmiş)

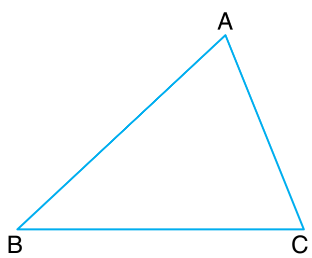
$|BD| = |BD|$ (ortak kenar) olduğundan

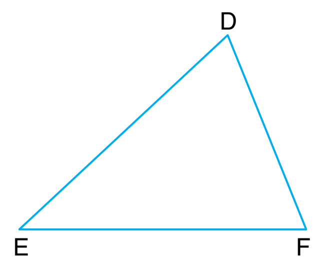
$\widehat{ABD} \cong \widehat{CBD}$ (K.K.K.) bulunur.

Bu durumda $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD}) = x$ olur.

$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen olduğundan $2x = 60° \Rightarrow x = 30°$ elde edilir.

Örnek



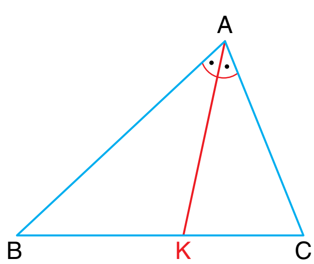


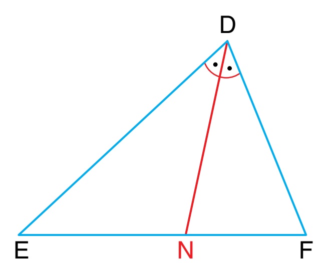
Yukarıda verilen eş üçgenler arasında

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ eşliği olduğuna göre bu üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanlarının arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

A ve D köşelerine ait açıortayları çizelim.





$\widehat{ABK}$ ve $\widehat{DEN}$'nin eşliğini inceleyelim.

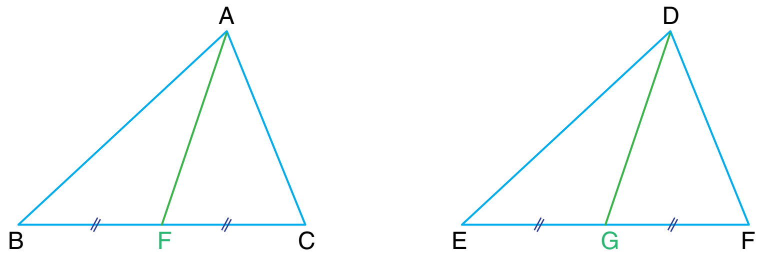
$m(\widehat{BAK}) = m(\widehat{EDN})$ (açıortay özelliğinden)

$|AB| = |DE|$ ($\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ eşliğinden)

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ($\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ eşliğinden)

Bu durumda $\widehat{ABK} \cong \widehat{DEN}$ (A.K.A.) olacağından $|AK| = |DN| \Rightarrow [AK] \cong [DN]$ elde edilir.

[BC] ve [EF] kenarlarına ait kenarortayları çizelim.



$\widehat{ABF}$ ile $\widehat{DEG}$'nin eşliğini inceleyelim.

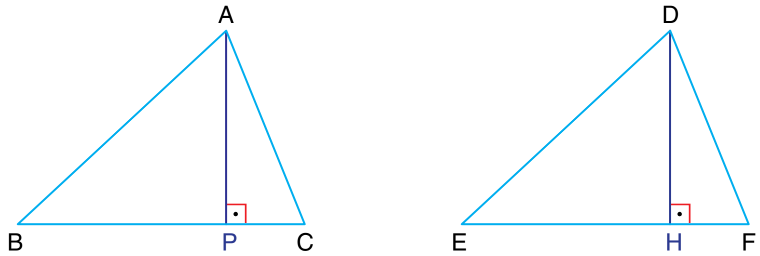
$|AB| = |DE|$ ($\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ eşliğinden)

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ($\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ eşliğinden)

$|BF| = |EG|$ (kenarortay özelliğinden) elde edilir.

Bu durumda $\widehat{ABF} \cong \widehat{DEG}$ (K.A.K.) olacağından $|AF| = |DG| \Rightarrow [AF] \cong [DG]$ elde edilir.

A ve D köşelerinden sırayla [BC] ve [EF] kenarlarına yükseklikler çizelim.



$\widehat{ABP}$ ile $\widehat{DEH}$'nin eşliğini inceleyelim.

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ($\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ eşliğinden)

$m(\widehat{BPA}) = m(\widehat{EHD})$ (dik açılar)

$m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{EDH})$ (Bir üçgende karşılıklı olarak ikişer açı ölçüleri eşit ise üçüncü açıların ölçüleri de eşittir.)

$|AB| = |DE|$ ($\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ eşliğinden)

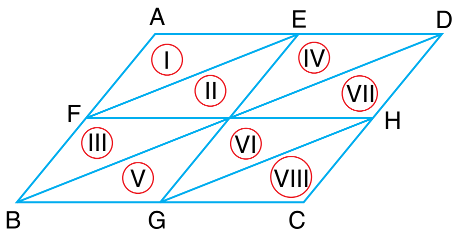
Bu durumda $\widehat{ABP} \cong \widehat{DEH}$ (A.K.A.) olacağından $|AP| = |DH| \Rightarrow [AP] \cong [DH]$ elde edilir.

Bilgi

Eş üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanları da eştir.

PEKİŞTİRME SORULARI

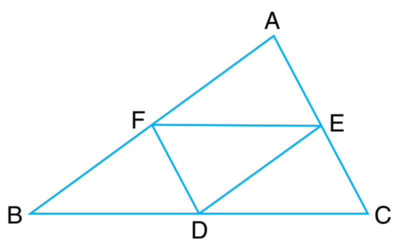
1.



Yukarıda verilen ABCD paralelkenarında E, F, G, H bulundukları kenarların orta noktaları ve [BD] köşegendir.

Buna göre numaralı üçgenlerden I ile VIII, IV ile VII, IV ile V ve II ile VI numaralı üçgenlerin eş üçgenler olduklarını gösteriniz. Bu işlemde hangi eşlik kurallarını kullandığınızı açıklayınız.

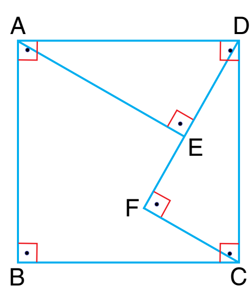
2.



Yukarıda verilen şekilde F, E, D bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

Buna göre şekildeki eş üçgenleri belirleyiniz. İşlemi hangi eşlik kuralına göre yaptığınızı açıklayınız.

3.

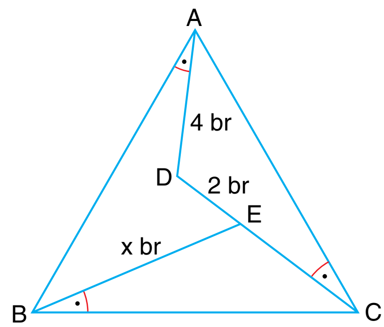


ABCD bir kare

[AE] ⊥ [DF] , [DF] ⊥ [FC]

|DE| = 3 br, |EF| = 4 br olduğuna göre karenin bir kenar uzunluğunu bulunuz.

4.

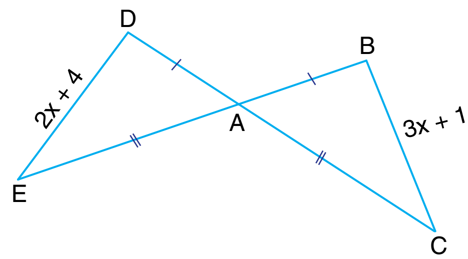


Yukarıda verilen ABC eşkenar üçgeninde

$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{EBC})$,

|AD| = 4 br, |DE| = 2 br ve |BE| = x br olduğuna göre x değerini bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde E, A, B ve D, A, C doğrusal noktalar

|AD| = |AB|, |AE| = |AC|,

|DE| = (2x + 4) br

|BC| = (3x + 1) br olarak verilmiştir.

Bu iki üçgenin hangi eşlik kuralına göre eş olduklarını belirleyip x değerini bulunuz.

6. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D" yanlış olanların başına "Y" yazınız.

(......) Eş üçgenlerde karşılıklı yardımcı elemanlar eştir.

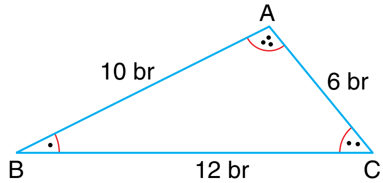
(......) Eş üçgenlerde eş açıların karşısındaki kenarların uzunlukları eşittir.

(......) İki üçgenin karşılıklı olarak açıları eş ise bu üçgenler eştir.

(......) Karşılıklı kenar uzunlukları birbirine eşit olan üçgenler birbirine eştir.

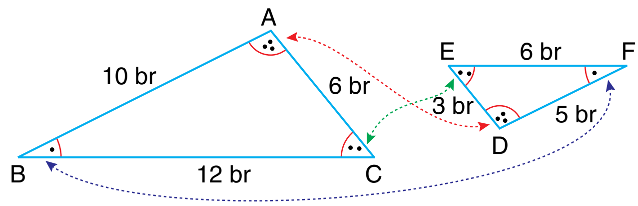
4.2.2. İki Üçgenin Benzerliği

Örnek



Yanda verilen $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$'nde eşit sayıda noktalarla belirtilen açıları birbirine eştir. Bu üçgenlerin karşılıklı açıları ve kenarları arasındaki ilişkiyi inceleyerek bu üçgenlerin benzer olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm



$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \Rightarrow \widehat{A} \cong \widehat{D}$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{F}) \Rightarrow \widehat{B} \cong \widehat{F}$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{E}) \Rightarrow \widehat{C} \cong \widehat{E}$ olur.

Şimdi eş açıların karşısındaki kenar uzunluklarının oranlarını bulalım.

$\dfrac{|BC|}{|FE|} = \dfrac{12}{6} = 2$,

$\dfrac{|CA|}{|ED|} = \dfrac{6}{3} = 2$,

$\dfrac{|AB|}{|DF|} = \dfrac{10}{5} = 2$ olduğundan $\dfrac{|BC|}{|FE|} = \dfrac{|CA|}{|ED|} = \dfrac{|AB|}{|DF|} = 2$ elde edilir.

Bu iki üçgenin karşılıklı açıları eş ve bu açıların karşılarındaki kenar uzunlukları orantılı olduğundan bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Bu benzerlik $\widehat{ABC} \sim \widehat{DFE}$ biçiminde gösterilir.

Bilgi

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı açılar eş ve eş açılar karşısındaki kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenlere **benzer üçgenler** denir.

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ benzer üçgenler ise bunu

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ biçiminde gösteririz. ($\sim \longrightarrow$ benzerlik işareti)

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ise $k \in \mathbb{R}^+$ ($k \longrightarrow$ benzerlik oranı) olmak üzere

bu üçgenlerin karşılıklı açıları ve kenarları arasında

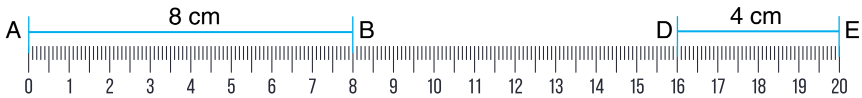
$\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $\widehat{C} \cong \widehat{F}$ ve $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = k$ ilişkisi vardır.

Örnek

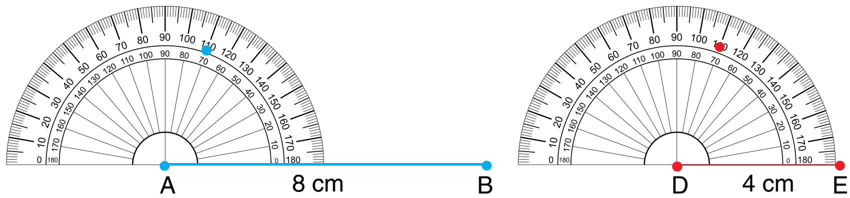
Cetvel ve açıölçer kullanarak karşılıklı ikişer kenarı orantılı ve bu kenarlar arasındaki açıları eş olan iki üçgenin benzer olduklarını gösterelim.

Çözüm

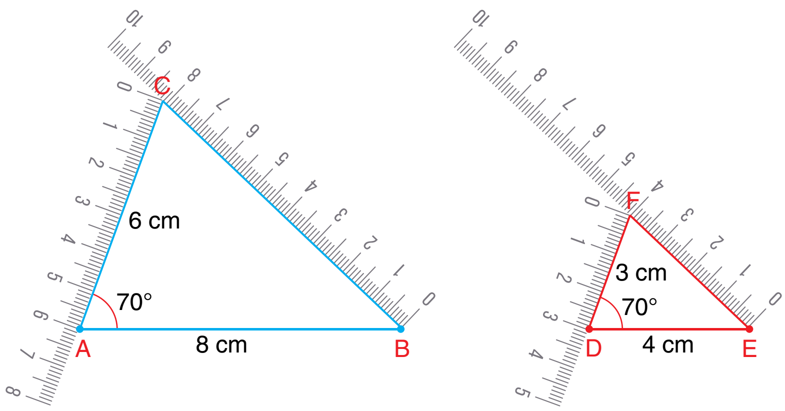
Cetvel yardımıyla |AB| = 8 cm, |DE| = 4 cm olacak biçimde [AB] ve [DE] çizelim.



Açıölçer yardımıyla A ve D köşelerinde 70°lik açılar oluşturalım.

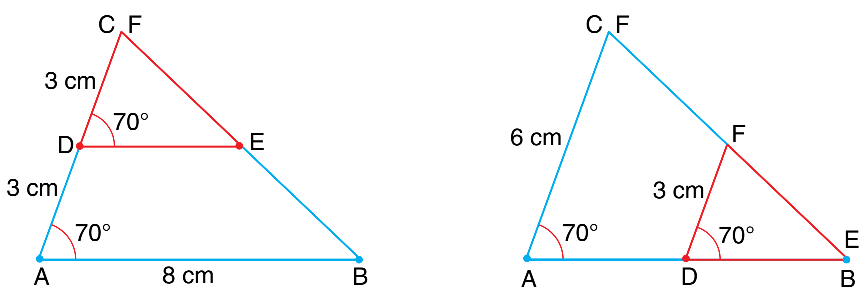


Oluşturduğumuz açının diğer kenarlarını |AC| = 6 cm, |DF| = 3 cm olacak biçimde cetvelle çizelim. Sonra C ile B ve F ile E noktalarını birleştirerek $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$'ni elde edelim. Daha sonra cetvelle |CB| ve |FE|'nu ölçelim.



Ölçümler sonucunda |CB| = 2 · |FE| olduğunu görürüz.

Şimdi de üçgenleri sırasıyla C ile F ve B ile E köşeleri üst üste gelecek biçimde çakıştıralım.



$\widehat{C} \cong \widehat{F}$ $\qquad$ $\widehat{B} \cong \widehat{E}$

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$'nin karşılıklı açıları arasında $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $\widehat{C} \cong \widehat{F}$ ve bu açıların karşılarındaki kenar uzunlukları arasında

$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = 2 = k$ orantısı olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olur.

Bilgi

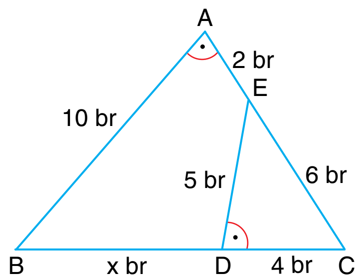
İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer kenar uzunlukları orantılı ve bu kenarlar arasındaki açılar eş ise bu üçgenler benzer üçgenlerdir.

Bu benzerlik “Kenar – Açı – Kenar (K.A.K.) benzerlik kuralı” olarak isimlendirilir.

$\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEF}$ verildiğinde

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} \text{ ve } \widehat{A} \cong \widehat{D} \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF} \text{ (K.A.K.) olur.}$$

Örnek



Yanda verilen şekilde

$|AE| = 2$ br, $|EC| = 6$ br, $|DC| = 4$ br, $|ED| = 5$ br, $|AB| = 10$ br,

$|BD| = x$ br ve $m(\widehat{A}) = m(\overset{\frown}{CDE})$ olduğuna göre

x değerini bulalım.

Çözüm:

Şekilde verilen eş açıların karşılarındaki kenar uzunluklarının oranını bulalım.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{10}{5} = 2, \quad \frac{|AC|}{|DC|} = \frac{8}{4} = 2 \text{ ve}$$

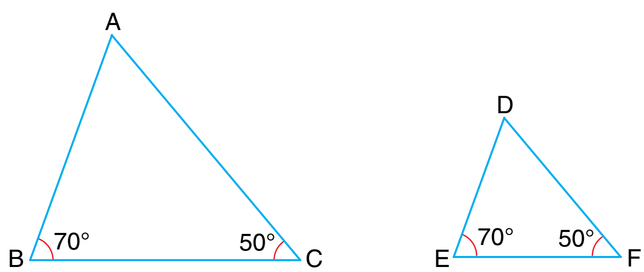
$\widehat{A} \cong \overset{\frown}{CDE}$ olduğundan $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEC}$ (K.A.K.) olur.

Buradan

$$\frac{|BC|}{|CE|} = 2 \Rightarrow \frac{x+4}{6} = 2$$

$x + 4 = 12 \Rightarrow x = 8$ br elde edilir.

Örnek



Yukarıda verilen $\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEF}$’nde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) = 70°$, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) = 50°$ olduğuna göre

$\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEF}$’nin benzer olup olmadıklarını inceleyelim.

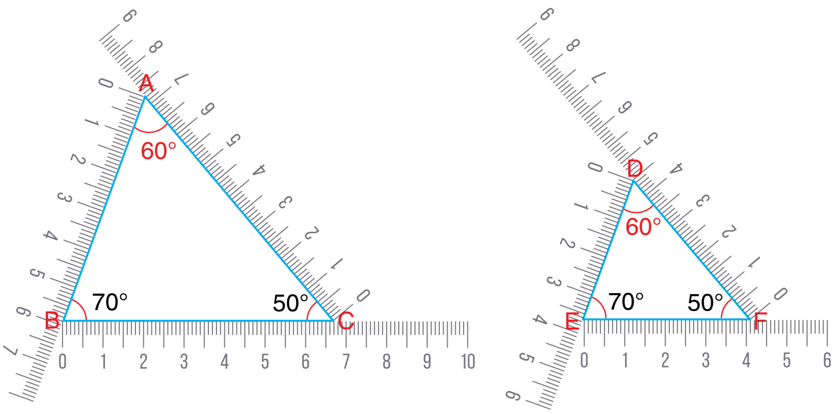
Çözüm

$\widehat{ABC}$'nde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) + 70° + 50° = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) = 60°$ ve

$\widehat{DEF}$'nde $m(\widehat{D}) + m(\widehat{E}) + m(\widehat{F}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{D}) + 70° + 50° = 180° \Rightarrow m(\widehat{D}) = 60°$ olur.

Şimdi cetvel ile üçgenlerin kenar uzunluklarını bularak eş açıların karşılarındaki kenar uzunluklarının oranlarını bulalım.

Yapılan ölçümler sonucunda,



$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{5{,}9}{3{,}6} \approx 1{,}6$

$\dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{7{,}2}{4{,}5} \approx 1{,}6$

$\dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{6{,}7}{4{,}1} \approx 1{,}6$ bulunur.

Bu durumda;

$\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $\widehat{C} \cong \widehat{F}$ ve $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = 1{,}6 = k$ olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ elde edilir.

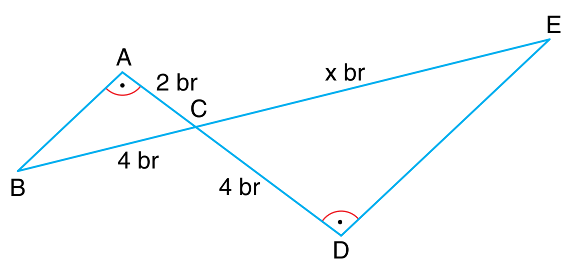
Bilgi

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açısı eş ise bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Bu benzerlik "Açı – Açı (A. A.) benzerlik kuralı" olarak isimlendirilir.

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ verildiğinde

$\widehat{A} \cong \widehat{D}$ ve $\widehat{B} \cong \widehat{E} \Rightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ (A.A.) olur.

Örnek



Yandaki şekilde

A, C, D ve B, C, E kendi aralarında doğrusal noktalardır.

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$,

$|BC| = 4$ br, $|AC| = 2$ br, $|CD| = 4$ br ve

$|EC| = x$ br olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm

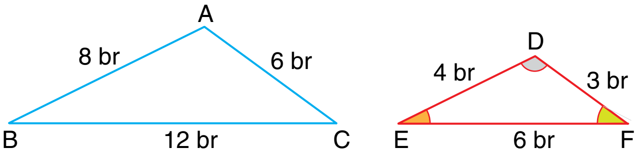
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DCE})$ (ters açılar)

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$ (verilmiş) olduğundan

$\widehat{ACB} \sim \widehat{DCE}$ (A.A.) olur. Bu durumda

$\dfrac{|AC|}{|DC|} = \dfrac{|BC|}{|EC|} \Rightarrow \dfrac{2}{4} = \dfrac{4}{x} \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$ br elde edilir.

Örnek



Yanda verilen $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$'lerinde

$|AB| = 8$ br, $|BC| = 12$ br, $|AC| = 6$ br,

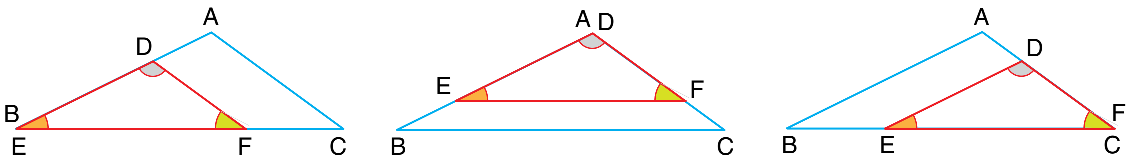
$|DE| = 4$ br, $|EF| = 6$ br ve $|DF| = 3$ br

veriliyor.

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$'lerinin benzer olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

Sırasıyla B ile E, A ile D ve C ile F köşelerini çakıştırarak karşılıklı köşelerdeki açıların arasındaki ilişkiyi inceleyelim.



$\widehat{B} \cong \widehat{E}$ $\qquad$ $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ $\qquad$ $\widehat{C} \cong \widehat{F}$

$\dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{6}{3} = 2$ $\qquad$ $\dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{12}{6} = 2$ $\qquad$ $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{8}{4} = 2$

olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ elde edilir.

Bilgi

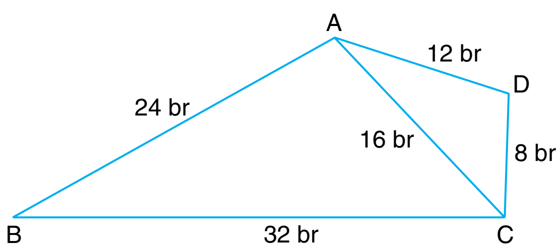
İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzer üçgenlerdir.

Bu benzerlik "Kenar – Kenar – Kenar (K.K.K.) benzerlik kuralı" olarak isimlendirilir.

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ verildiğinde

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k \quad \Rightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \text{ (K.K.K.) olur.}$$

Örnek



Yanda verilen şekilde

$|AD| = 12$ br, $|DC| = 8$ br, $|AC| = 16$ br,

$|AB| = 24$ br ve $|BC| = 32$ br olduğuna göre

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DAC}$'nin karşılıklı köşelerindeki açılarının arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

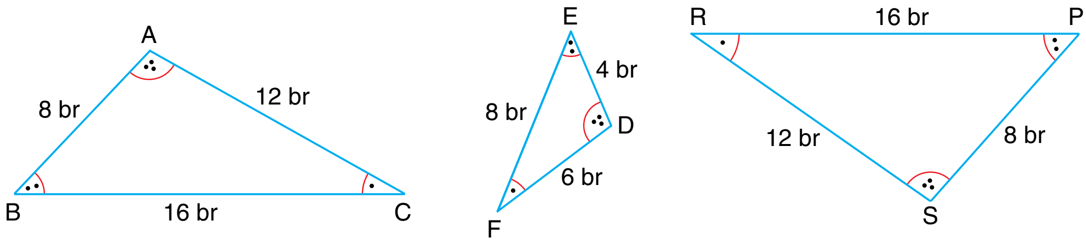
Çözüm:

$\dfrac{|AB|}{|DA|} = \dfrac{24}{12} = 2,$ $\quad$ $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{32}{16} = 2,$ $\quad$ $\dfrac{|AC|}{|DC|} = \dfrac{16}{8} = 2$ olur. Buradan

$\dfrac{|AB|}{|DA|} = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|DC|} = 2$ olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DAC}$ (K.K.K.) elde edilir.

Bu durumda $\widehat{BAC} \cong \widehat{ADC}$, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DAC}$ ve $\widehat{BCA} \cong \widehat{ACD}$ bulunur.

Örnek



Yukarıdaki üçgenlerin kenar uzunlukları br olarak kenarların üzerinde yazılmıştır. Bu üçgenlerde eşit sayıda noktalarla belirtilen açılar eştir.

Buna göre

a) Eş üçgenleri belirleyelim.

b) Benzer üçgenleri belirleyelim.

Çözüm

a) $\overset{\frown}{EDF}$'nin kenar uzunlukları diğerlerinden farklı olduğu için diğer üçgenlerle eş olamaz.

$|AB| = |SP| = 8$ br, $|BC| = |PR| = 16$ br, $|CA| = |RS| = 12$ br olduğundan

$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{SPR}$ (K.K.K.) elde edilir.

b) $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{8}{4} = 2, \quad \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{16}{8} = 2, \quad \dfrac{|CA|}{|FD|} = \dfrac{12}{6} = 2$

$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|CA|}{|FD|} = 2$ olduğundan

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ (K.K.K.) elde edilir.

$\dfrac{|SP|}{|DE|} = \dfrac{8}{4} = 2, \quad \dfrac{|PR|}{|EF|} = \dfrac{16}{8} = 2, \quad \dfrac{|RS|}{|FD|} = \dfrac{12}{6} = 2$

$\dfrac{|SP|}{|DE|} = \dfrac{|PR|}{|EF|} = \dfrac{|RS|}{|FD|} = 2$ olduğundan

$\overset{\frown}{SPR} \sim \overset{\frown}{DEF}$ (K.K.K.) elde edilir.

$\dfrac{|AB|}{|SP|} = \dfrac{8}{8} = 1, \quad \dfrac{|BC|}{|PR|} = \dfrac{16}{16} = 1, \quad \dfrac{|CA|}{|RS|} = \dfrac{12}{12} = 1$

$\dfrac{|AB|}{|SP|} = \dfrac{|BC|}{|PR|} = \dfrac{|CA|}{|RS|} = 1$ olduğundan

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{SPR}$ (K.K.K.) elde edilir.

$\overset{\frown}{ABC}$ ile $\overset{\frown}{SPR}$ hem eş hem de benzer üçgenlerdir.

Bilgi

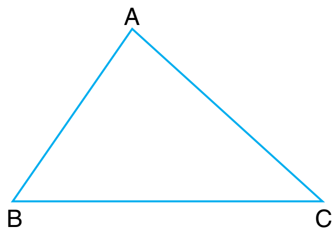
Benzerlik oranı 1 olan benzer üçgenler eş üçgenlerdir.

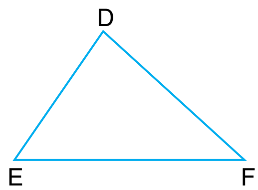
Eş üçgenler benzer üçgenlerdir ancak benzer üçgenler eş üçgen olmak zorunda değildir.

Örnek

Benzer üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanlarının da aynı benzerlik oranına sahip olduğunu gösterelim.

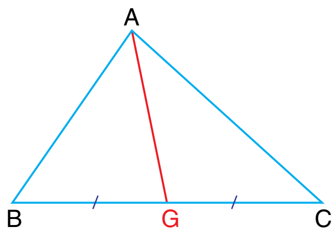
Çözüm

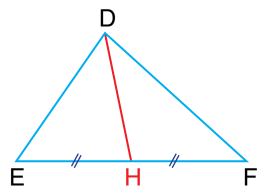




Yanda verilen üçgenler arasında $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve $|AB| = k \cdot |DE|$ ilişkisinin olduğunu kabul edelim ve sırasıyla karşılıklı yardımcı elemanlarının oranlarını inceleyelim.

Kenarortaylar





Sırasıyla [BC] ve [EF] kenarlarına ait [AG] ile [DH] kenarortaylarını çizelim ve $\widehat{ABG}$ ile $\widehat{DEH}$'nin benzer olup olmadıklarını inceleyelim.

$|BG| = |GC|$ ve $|EH| = |HF|$

$|AB| = k \cdot |DE|$ (verilmiş)

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ (verilmiş)

Ayrıca $|BC| = k \cdot |EF|$ (verilmiş)

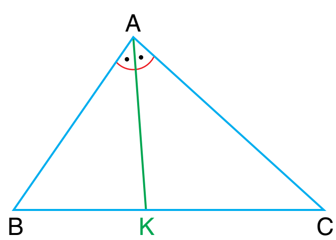
$|BC| = k \cdot |EF| \Rightarrow \dfrac{|BC|}{2} = k \cdot \dfrac{|EF|}{2} \Rightarrow |BG| = k \cdot |EH|$ elde edilir.

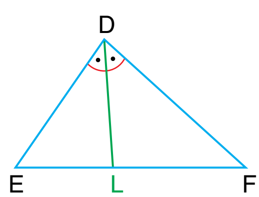
Bu durumda $\widehat{ABG} \sim \widehat{DEH}$ (K.A.K.) elde edilir.

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenar uzunluklarının oranı eşit olacağından $|AG| = k \cdot |DH|$ bulunur.

O hâlde benzer üçgenlerin karşılıklı kenarortaylarının oranı benzerlik oranına eşittir.

Açıortaylar





Sırasıyla A ve D köşelerine ait [AK] ile [DL] açıortaylarını çizelim ve $\widehat{ABK}$ ile $\widehat{DEL}$'nin benzer olup olmadıklarını inceleyelim.

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ (verilmiş)

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF})$ (verilmiş)

Buna göre açıortay özelliğinden $m(\widehat{BAK}) = m(\widehat{EDL})$ olur.

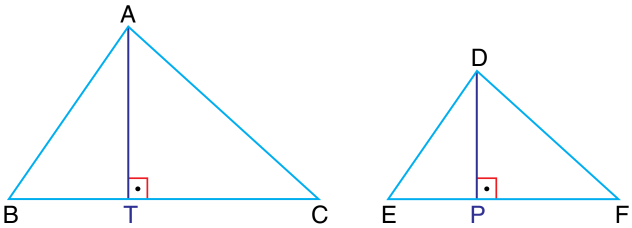
Bu durumda $\widehat{ABK} \sim \widehat{DEL}$ (A.A.) elde edilir.

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenar uzunluklarının oranı eşit olacağından

$|AB| = k \cdot |DE|$ ise $|AK| = k \cdot |DL|$ bulunur.

O hâlde benzer üçgenlerin karşılıklı açıortaylarının oranı benzerlik oranına eşittir.

Yükseklikler



Sırasıyla A köşesinden [BC]'na, D köşesinden [EF]'na $[AT] \perp [BC]$, $[DP] \perp [EF]$ olacak biçimde [AT] ve [DP] yüksekliklerini çizelim ve $\widehat{ABT}$ ile $\widehat{DEP}$'lerinin benzer olup olmadıklarını inceleyelim.

$m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{DPE})$ (dik açılar)

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ (verilmiş)

Bu durumda $\widehat{ABT} \sim \widehat{DEP}$ (A.A.) elde edilir.

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenar uzunluklarının oranı eşit olacağından

$|AB| = k \cdot |DE|$ ise $|AT| = k \cdot |DP|$ bulunur.

O hâlde benzer üçgenlerin karşılıklı yüksekliklerinin oranı benzerlik oranına eşittir.

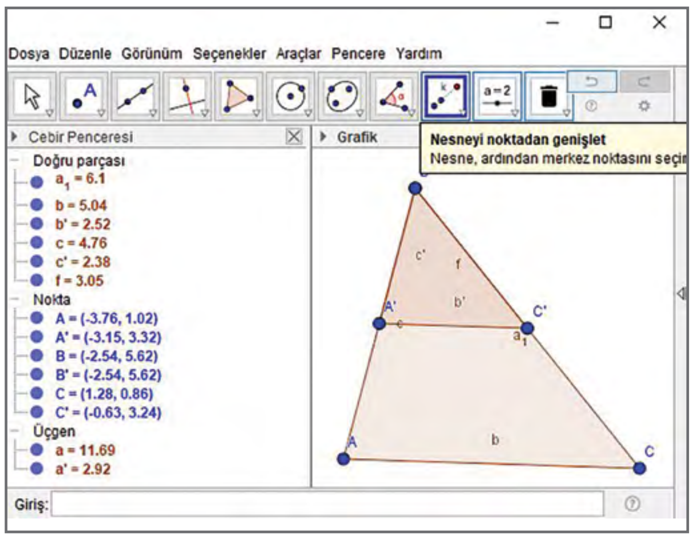
Örnek

Benzer üçgenlerin çevrelerinin de aynı benzerlik oranına sahip olduğunu dinamik matematik yazılımı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını bilgisayarımıza indirip oturumu açalım. Araç çubuğunda 5. kutuya tıklayarak "Çokgen" seçeneği yardımıyla herhangi bir $\widehat{ABC}$'ni oluşturalım.

Daha sonra araç çubuğunda 9. kutaya tıklayıp "Nesneyi noktada genişlet" seçeneği yardımıyla önce üçgene sonra B noktasına tıklayalım. Gelen pencerede ölçek yerine $\frac{1}{2}$ yazıp tamama basarak benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olan $\widehat{A'B'C'}$'ni elde edelim.



Cebir penceresinde görülen uzunluklar yardımıyla $Ç(\widehat{ABC})$ ve $Ç(\widehat{A'B'C'})$ değerlerini bulalım.

$\dfrac{Ç(\widehat{A'B'C'})}{Ç(\widehat{ABC})}$ oranı ile üçgenlerin benzerlik oranı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

Bilgi

1) Benzer üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanları da aynı benzerlik oranına sahiptir.

2) Benzer üçgenlerin çevreleri de aynı benzerlik oranına sahiptir.

Örnek

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve $\dfrac{|DE|}{|AB|} = \dfrac{2}{3}$ olmak üzere Ç($\widehat{ABC}$) = 72 cm ise Ç($\widehat{DEF}$) değerini bulalım.

Çözüm

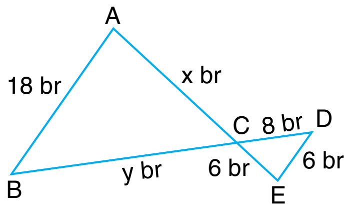
İki üçgenin benzerlik oranı $\dfrac{2}{3}$ olduğundan

$$\frac{Ç(\widehat{DEF})}{Ç(\widehat{ABC})} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{Ç(\widehat{DEF})}{\underset{24}{\cancel{72}}} = \frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

Ç($\widehat{DEF}$) = 48 cm olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1.



Yukarıdaki şekilde [AB] // [ED]

|CD| = 8 br, |CE| = |ED| = 6 br

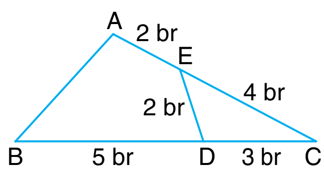
|AB| = 18 br, |CA| = x br ve |CB| = y br

olduğuna göre x + y toplamını bulunuz.

2. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve |AB| = 4·|DE| veriliyor.

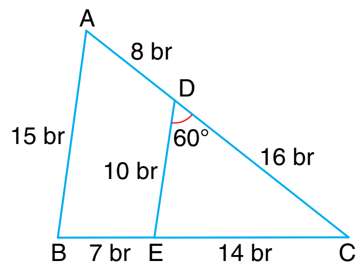
$\widehat{ABC}$'nin A köşesinden çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunlukları sırasıyla 3 br, 4 br ve 5 br olduğuna göre $\widehat{DEF}$'nin D köşesinden çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunluklarının toplamını bulunuz.

3.



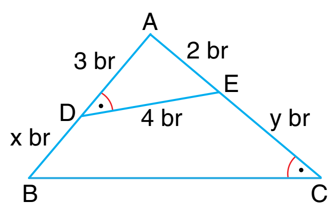
Yukarıdaki şekilde
|AE| = |ED| = 2 br, |EC| = 4 br, |DC| = 3 br ve
|DB| = 5 br olduğuna göre |AB|'nu bulunuz.

4.



Yukarıdaki şekilde
m($\widehat{EDC}$) = 60°,
|AB| = 15 br, |BE| = 7 br, |EC| = 14 br,
|DE| = 10 br, |AD| = 8 br ve |DC| = 16 br
olduğuna göre m($\widehat{A}$) değerini bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde m($\widehat{ADE}$) = m($\widehat{C}$)

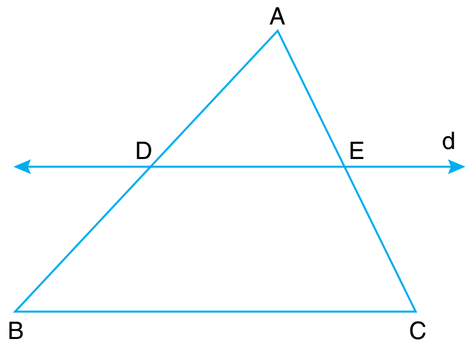
|AD| = 3 br, |DE| = 4 br, |AE| = 2 br,

|EC| = y br, |DB| = x br ve $\dfrac{Ç(\widehat{ADE})}{Ç(\widehat{ACB})} = \dfrac{1}{3}$

olduğuna göre x + y toplamını bulunuz.

4.2.3. Üçgenin Bir Kenarına Paralel ve Diğer İki Kenarı Kesecek Şekilde Çizilen Doğrunun Ayırdığı Parçalar Arasındaki İlişkiler

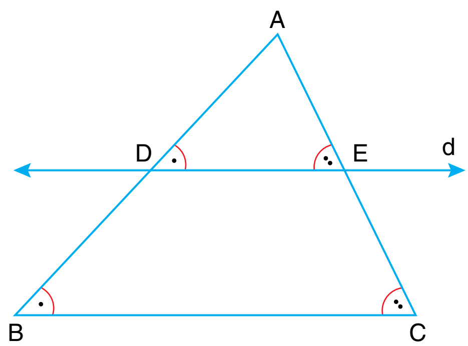
Örnek



Yanda verilen şekilde $d // [BC]$ olduğuna göre

$\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



$d // [BC]$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} m(\widehat{ABC}) &= m(\widehat{ADE}) \\ m(\widehat{ACB}) &= m(\widehat{AED}) \end{aligned}\right\} \text{(yöndeş açılar)}$$

Bu durumda $\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE}$ (A.A.) olur. Buradan

$\dfrac{|AB|}{|AD|} = \dfrac{|AC|}{|AE|}$ elde edilir.

$|AB| = |AD| + |DB|$, $|AC| = |AE| + |EC|$ eşitliklerini orantıda yerine yazarsak

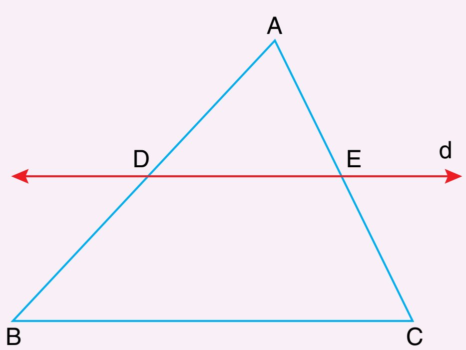
$$\frac{|AD|+|DB|}{|AD|} = \frac{|AE|+|EC|}{|AE|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AD|} + \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AE|} + \frac{|EC|}{|AE|}$$

$$1 + \frac{|DB|}{|AD|} = 1 + \frac{|EC|}{|AE|}$$

$$\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|AE|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \text{ bulunur.}$$

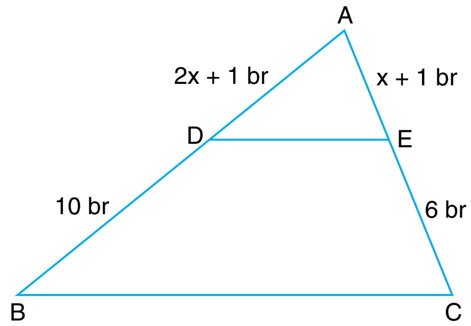
Bilgi

Bir üçgenin bir kenarına paralel ve diğer iki kenarı farklı noktalarda kesen doğru kestiği kenarlar üzerinde orantılı doğru parçaları ayırır. Bu ifadenin karşıtı da doğrudur. Bu teoreme **temel orantı teoremi** denir.



Şekilde $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|} \Leftrightarrow d // [BC]$ olur.

Örnek



Yandaki şekilde [DE] // [BC],

|AD| = (2x + 1) br, |DB| = 10 br, |AE| = (x + 1) br,

D ∈ [AB], E ∈ [AC] ve |EC| = 6 br olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm

[DE] // [BC] olduğundan temel orantı teoremi uygulanırsa

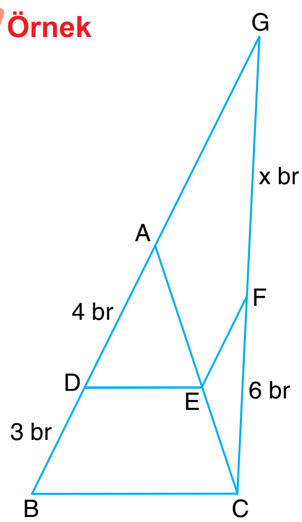
$$\frac{2x+1}{10} = \frac{x+1}{6}$$

$$12x + 6 = 10x + 10$$

$$2x = 4$$

$x = 2$ br elde edilir.

Örnek



Yandaki şekilde [DE] // [BC], [EF] // [AG]; B, D, A ve G doğrusal noktalar, E ∈ [AC], F ∈ [CG], |AD| = 4 br, |DB| = 3 br, |CF| = 6 br ve |FG| = x br olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$'nde [DE] // [BC] olduğundan temel orantı teoremi gereğince

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

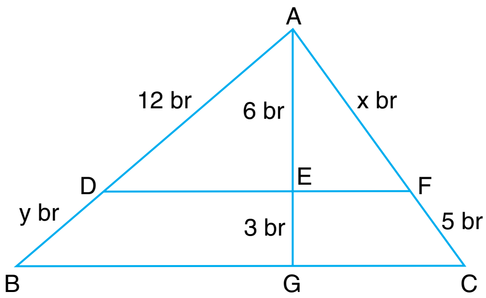
$$\frac{4}{3} = \frac{|AE|}{|EC|}$$ bulunur.

$\widehat{CAG}$'nde [EF] // [AG] olduğundan temel orantı teoremi gereğince

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|CF|}{|FG|}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{x} \Rightarrow x = 8 \text{ br elde edilir.}$$

Örnek



Yandaki şekilde [DF] // [BC], D ∈ [AB], F ∈ [AC], G ∈ [BC], [AG] ∩ [DF] = {E}, |AD| = 12 br, |DB| = y br, |AE| = 6 br, |EG| = 3 br, |AF| = x br ve |FC| = 5 br olduğuna göre x + y toplamını bulalım.

Çözüm

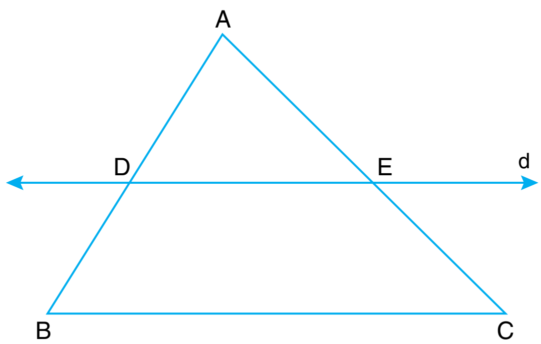
[DF] // [BC] olduğundan $\widehat{ABG}$ ve $\widehat{AGC}$'nine ayrı ayrı temel orantı teoremi uygulanırsa

$$\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AE|}{|EG|} \Rightarrow \frac{12}{y}=\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}_{1}} \Rightarrow \frac{\cancel{12}^{6}}{y}=\frac{\cancel{2}^{1}}{1} \Rightarrow y = 6 \text{ br ve}$$

$$\frac{|AE|}{|EG|}=\frac{|AF|}{|FC|} \Rightarrow \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}}=\frac{x}{5} \Rightarrow x = 10 \text{ br olur.}$$

Buradan x + y = 10 + 6 = 16 olarak elde edilir.

Örnek



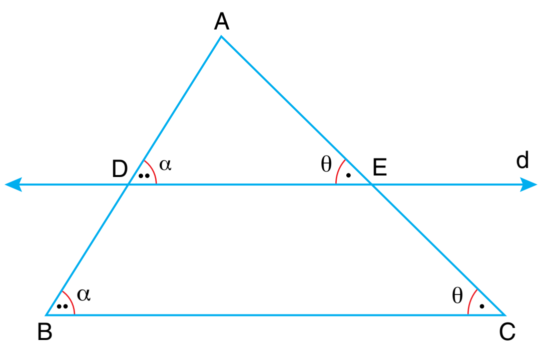
Yandaki şekilde

d // [BC] ve

D ve E orta noktalar olduğuna göre

$|DE| = \dfrac{|BC|}{2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



d // [BC] olduğundan $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC}) = \alpha$

$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ACB}) = \theta$ olur.

Bu durumda $\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ (A.A.) olur.

|AD| = |DB| ⇒ |AB| = 2|AD| = 2|DB|,

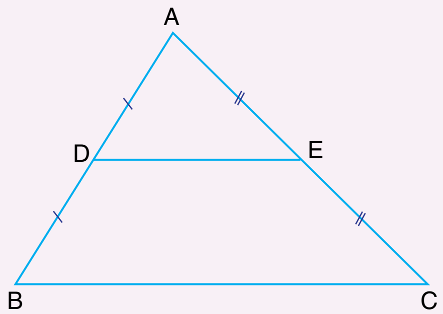
|AE| = |EC| ⇒ |AC| = 2|AE| = 2|EC| olacağından

$$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|AE|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|BC|}$$

$$\frac{|AD|}{2\cdot|AD|}=\frac{|AE|}{2\cdot|AE|}=\frac{|DE|}{|BC|} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{|DE|}{|BC|} \Rightarrow |DE|=\frac{|BC|}{2} \text{ elde edilir.}$$

Bilgi

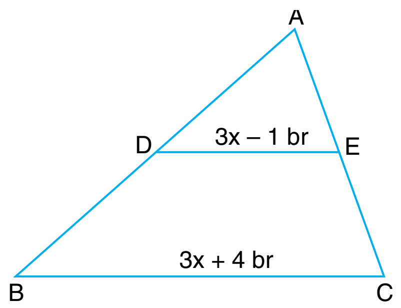
Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçası üçgenin diğer kenarına paralel ve bu doğru parçasının uzunluğu bu kenarın uzunluğunun yarısına eşittir. Bu doğru parçasına üçgenin **orta tabanı** denir.



Şekilde D ve E orta noktalar ise

$[DE] \parallel [BC]$ ve $|DE| = \dfrac{|BC|}{2}$ olur.

Örnek



Yandaki şekilde D ve E bulundukları kenarların orta noktaları $|DE| = (3x - 1)$ br ve $|BC| = (3x + 4)$ br olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm

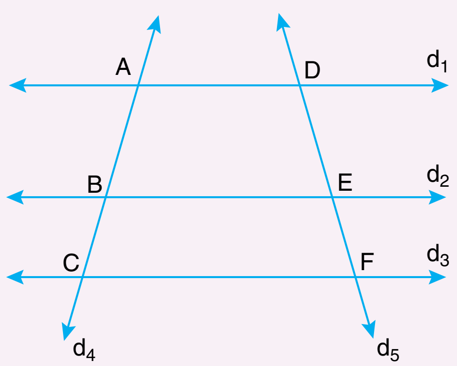
D ve E orta noktalar olduğundan $[DE] \parallel [BC]$ ve $[DE]$ orta taban olur.

Bu durumda $|DE| = \dfrac{|BC|}{2}$

$$3x - 1 = \frac{3x+4}{2} \Rightarrow 6x - 2 = 3x + 4$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2 \text{ br olarak bulunur.}$$

Bilgi

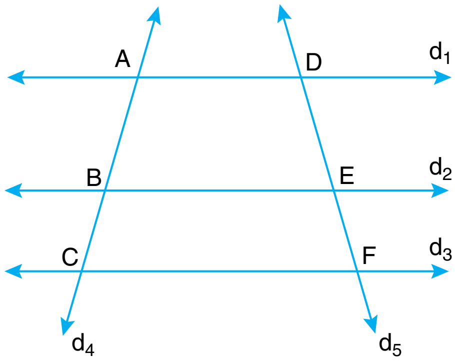


Paralel <u>en az</u> üç doğrunun farklı iki kesen üzerinde ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları orantılıdır. Bu teoreme **Thales (Tales) teoremi** denir.

Yandaki şekilde

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|} \text{ ve } \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|DF|} \text{ olur.}$$

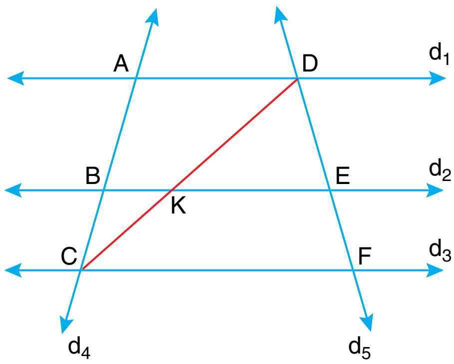
Örnek



Yandaki şekilde A, B, C ve D, E, F kendi aralarında doğrusal noktalar d_1 // d_2 // d_3 olduğuna göre

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

Çözüm



d_1 // d_2 // d_3 veriliyor.

C ve D noktalarını şekildeki gibi birleştirerek

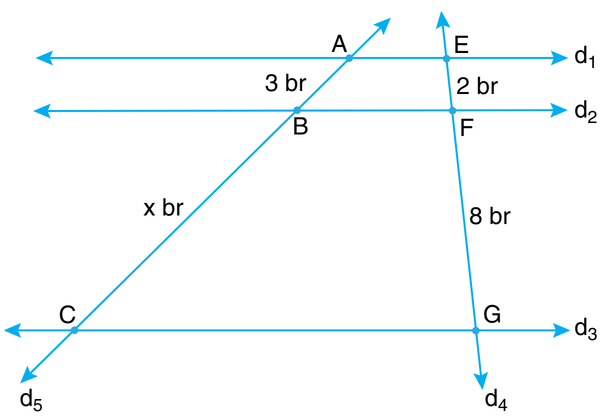
$\overset{\frown}{ACD}$ ve $\overset{\frown}{DCF}$'lerine temel orantı teoremini uygulayalım.

[CD]'nın [BE]'nı kestiği noktaya K dersek

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DK|}{|KC|}$ ve $\frac{|DK|}{|KC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olur.

Bu iki ifadeden $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ elde edilir.

Örnek



Şekilde d_1 // d_2 // d_3 A, B, C ve E, F, G kendi aralarında doğrusal noktalar

|AB| = 3 br, |EF| = 2 br, |FG| = 8 br ve

|BC| = x br olduğuna göre

x değerini bulalım.

Çözüm

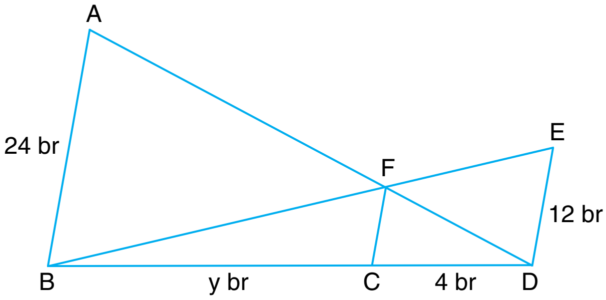
d_1 // d_2 // d_3 olduğundan Thales teoremi gereğince

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EF|}{|FG|}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

x = 12 br elde edilir.

Örnek



Yanda verilen şekilde

[AB] // [FC] // [ED],

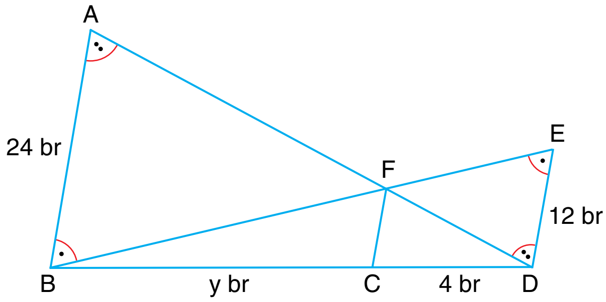
$C \in [BD]$, $[AD] \cap [BE] = \{F\}$, $|AB| = 24$ br

$|BC| = y$ br, $|CD| = 4$ br ve

$|ED| = 12$ br olduğuna göre

y değerini bulalım.

Çözüm



[AB] // [DE] olduğundan

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{EDA}) \\ m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{DEB}) \end{array}\right\} \text{(İç ters açılar)}$$

Bu durumda

$\widehat{BAF} \sim \widehat{EDF}$ (A.A.) olur.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BF|}{|EF|}$$

$$\frac{24}{12} = \frac{|BF|}{|EF|} \Rightarrow 2 = \frac{|BF|}{|EF|} \text{ olur.}$$

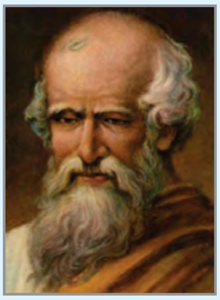
Diğer yandan [AB] // [FC] // [ED] olduğundan Thales teoremi gereğince

$$\frac{|BF|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|DC|} \Rightarrow 2 = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 8 \text{ br olarak elde edilir.}$$

Thales (Tales)

Felsefe tarihine dair kitaplarda ilk filozof olarak kabul gören kişi, ülkemiz topraklarında doğup yaşamış Milet'li Thales'tir. (Milet bugünkü Aydın ili sınırları içindedir.) Thales; insanlara, doğaya, gökyüzüne dair gözlemler yapan, kendi kendine sorular sorup o sorulara kendi akıl yürütmeleri ile doğanın içinde cevaplar arayan, matematikçi, gök bilimci, tüccar ve mühendis olarak pek çok alana katkılar sunmuş, çok yönlü bir filozoftur.

Thales'in, yaşadığı dönemde, sürekli Milet'de kalmadığı, Mısır hatta Mezopotamya'ya gittiği, oralarda edindiği matematik ve geometri bilgilerini derleyip bir araya getirdiği, sonrasında da kendi matematik teoremini yarattığı düşünülmektedir.



Thales (Tales)
(M.Ö. 624 – M.Ö.546)
(Temsilî)

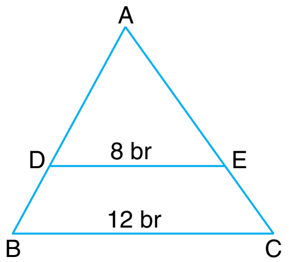
Thales'in ispat ettiği düşünülen teoremler şunlardır:

- Çap çemberi iki eşit parçaya böler.
- Bir ikizkenar üçgenin taban açıları birbirine eştir.
- Birbirini kesen iki doğrunun oluşturduğu ters açılar birbirine eştir.
- Köşesi çember üzerinde olan ve çapı gören açı dik açıdır.
- Tabanı ve buna komşu iki açısı verilen üçgen çizilebilir.
- İki açısı ve bu açıların bir kenarı aynı olan iki üçgen eştir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

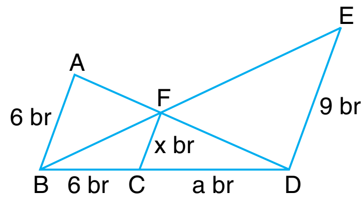
PEKİŞTİRME SORULARI

1.



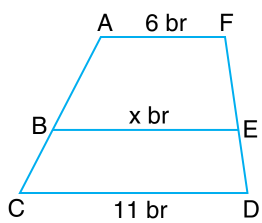
Yukarıdaki şekilde [DE] // [BC], D ∈ [AB], E ∈ [AC], |DE| = 8 br, |BC| = 12 br olduğuna göre $\dfrac{|AD|}{|DB|}$ oranını bulunuz.

2.



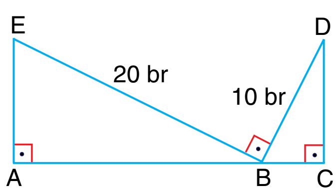
Yukarıdaki şekilde [AB] // [FC] // [ED]
C ∈ [BD], [AD] ∩ [BE] = {F},
|AB| = |BC| = 6 br, |ED| = 9 br, |FC| = x br, |CD| = a br olduğuna göre a ve x değerlerini bulunuz.

3.



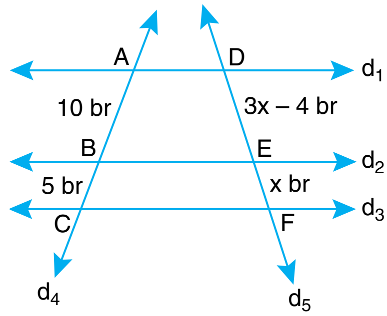
Yukarıdaki şekilde [AF] // [BE] // [CD],
B ∈ [AC], E ∈ [FD],
2|AB| = 3|BC|, |AF| = 6 br, |BE| = x br ve |CD| = 11 br olduğuna göre x değerini bulunuz.

4.



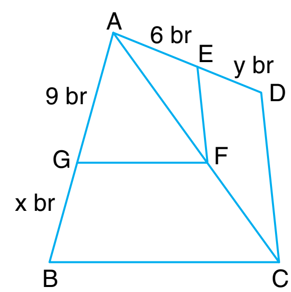
Şekilde $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{EBD}) = m(\widehat{BCD}) = 90°$,
A, B, C doğrusal noktalar, |BD| = 10 br,
|EB| = 20, |EA| = |DC| ve |AC| = x br olduğuna göre x değerini bulunuz.

5.



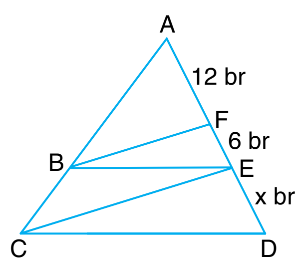
Yukarıdaki şekilde d_1 // d_2 // d_3, B ∈ [AC], E ∈ [DE], |AB| = 10 br, |BC| = 5 br, |DE| = (3x – 4) br ve |EF| = x br olduğuna göre x değerini bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde G ∈ [AB], F ∈ [AC], E ∈ [AD], [GF] // [BC], [FE] // [CD] olmak üzere |AG| = 9 br, |AE| = 6 br, |ED| = y br, |GB| = x br olarak veriliyor.
Buna göre 3y – 2x değerini bulunuz.

7.

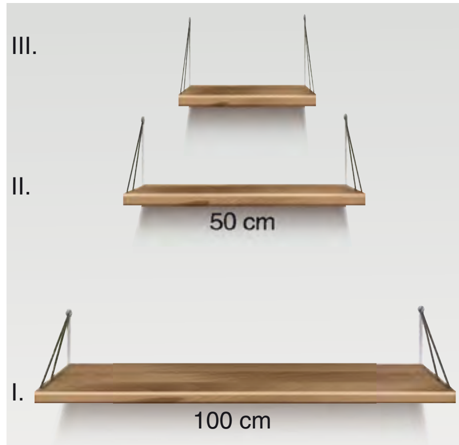


Yukarıdaki şekilde B ∈ [AC], A, F, E ve D noktaları doğrusal, [BF] // [CE],
[BE] // [CD], |AF| = 12 br, |FE| = 6 br,
|ED| = x br olduğuna göre x değerini bulunuz.

4.2.4. Üçgenlerin Benzerliği İle İlgili Problemler

Örnek

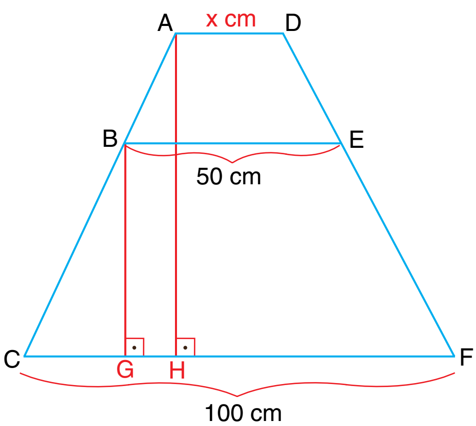
Ali Usta çalışma odasındaki duvara yandaki gibi 50 cm ve 100 cm uzunluklarında iki rafı birbirine paralel olacak biçimde yerleştiriyor. Ancak Ali Usta rafların yetmeyeceğini düşünerek bu raflara paralel yeni bir rafı daha duvara yerleştirmeye karar veriyor.



I. ve II. rafların arasındaki uzaklığın, I. ve III. raflar arasındaki uzaklığa oranı $\frac{2}{3}$ olduğuna göre III. rafın uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Şekli aşağıdaki gibi modelleyelim.



$B \in [AC]$, $E \in [DF]$,

$|CF| = 100$ cm, $|BE| = 50$ cm,

$\frac{|BG|}{|AH|} = \frac{2}{3}$'dür.

$|AD| = x$ cm diyelim.

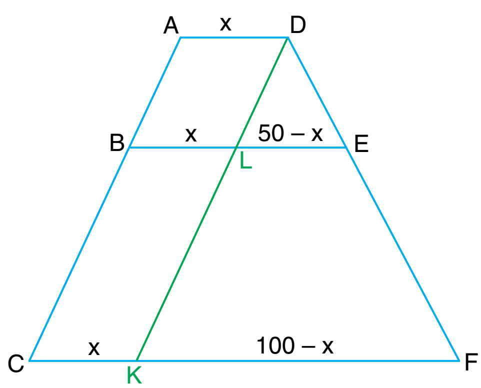
$[BG] \mathbin{//} [AH]$ olduğundan

$\widehat{CGB} \sim \widehat{CHA}$ (A.A.) olur. Buradan

$$\frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|GB|}{|HA|} = \frac{2}{3}$$

$|CB| = 2k$, $|CA| = 3k$ ve $|AB| = k$ elde edilir.

Buna göre



$[DK] \mathbin{//} [AC]$ çizip

$[DK]$'nın $[BE]$'nı kestiği noktaya L dersek

$|DL| = k$, $|DK| = 3k$, $|AD| = |BL| = |CK| = x$ cm,

$|LE| = (50 - x)$ cm ve

$|KF| = (100 - x)$ cm olur.

$\widehat{DLE} \sim \widehat{DKF}$ olduğundan

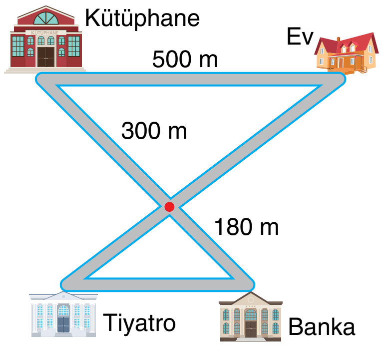
$$\frac{|DL|}{|DK|} = \frac{|LE|}{|KF|}$$

$$\frac{\cancel{k}}{3\cancel{k}} = \frac{50 - x}{100 - x}$$

$100 - x = 150 - 3x$

$2x = 50 \Rightarrow x = 25$ cm elde edilir.

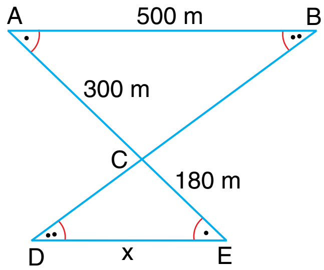
Örnek



Şekilde kütüphane ve ev arasındaki yol ile tiyatro binası ve banka arasındaki yol birbirine paraleldir.

Verilenlere göre banka ile tiyatro binası arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm:



Şekli yandaki gibi modelleyelim.

Soruda [AB] // [DE] verilmiştir.

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) \end{array}\right\} \text{(İç ters açılar) olur.}$$

Buradan $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{EDC}$ (A.A.) bulunur. Bu durumda

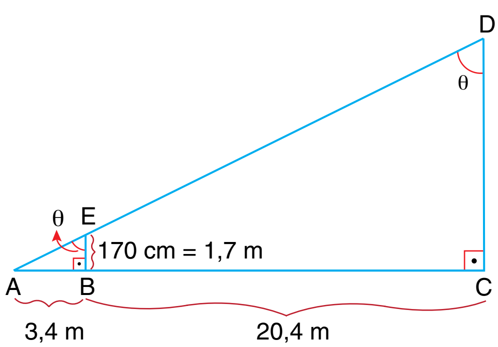
$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|EC|} = \frac{|BC|}{|DC|} \Rightarrow \frac{\cancelto{5}{500}}{x} = \frac{\cancelto{3}{300}}{180} \Rightarrow \cancelto{1}{3}x = \cancelto{60}{180} \cdot 5 \Rightarrow x = 300 \text{ m bulunur.}$$

Örnek

Resimdeki ağaç ile Semih'in gölgelerinin bitim noktaları aynıdır. Semih'in boyu 170 cm ve ağaçtan uzaklığı 20,4 m'dir. Semih'in gölgesinin uzunluğu 3,4 m olduğuna göre ağacın uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Gölge uzunlukları, Semih'in durduğu yer ve ağacı aşağıdaki gibi modellersek



[EB] // [DC] olacağından $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ACD}) = 90°$ ve $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{ADC}) = \theta$ (yöndeş açılar) olur.

Bu durumda $\overset{\frown}{ABE} \sim \overset{\frown}{ACD}$ (A.A.) elde edilir.

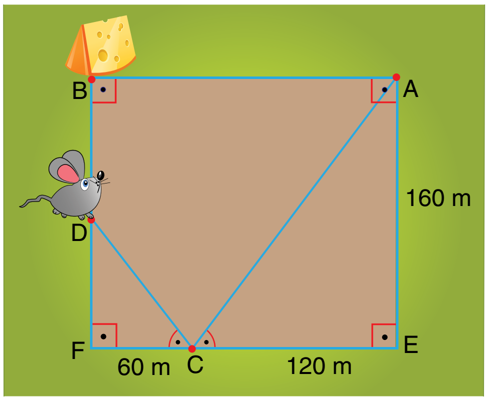
Buradan

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CD|} \Rightarrow \frac{\cancelto{1}{3,4}}{\cancel{23,8}_{\,7}} = \frac{1,7}{|DC|}$$

|DC| = 11,9 m elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

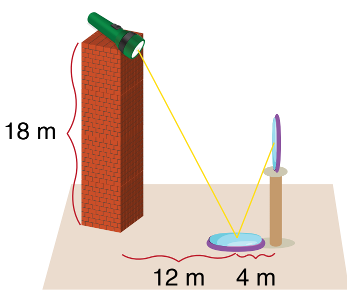
1.



Yukarıda dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin A köşesinden deliğe giren bir fare A → C → D yolunu izleyerek D noktasından dışarı çıkıyor. $m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{ACE})$'dir. Bahçenin üzerinde verilen uzunluklara göre fare B noktasındaki yiyeceğe kaç metre uzaklıkta dışarı çıkmıştır?

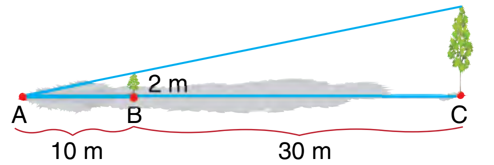
A) 80 B) 100 C) 110 D) 120 E) 130

2.



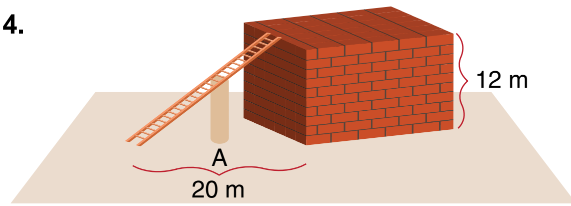
Yerden yüksekliği 18 m olan yapının tepesindeki bir ışık kaynağından gelen ışınlar yapıdan 12 m uzaklıkta zeminde duran aynaya vurup geldiği açıyla yansıyarak şekildeki gibi aynadan 4 m uzaklıktaki çubuğun tepesinde duran aynaya çarpıyor.
Buna göre ışığın aynaya değdiği noktanın yere olan uzaklığını bulunuz.

3.



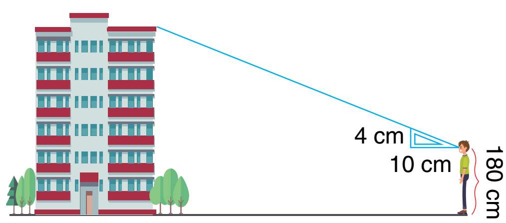
Yukarıda verilen resimdeki küçük ağaç ve büyük ağacın gölgelerinin bitiş noktaları aynıdır. İki ağacın arası 30 m, küçük ağacın gölgesinin uzunluğu 10 m ve boyu 2 m olduğuna göre büyük ağacın uzunluğunu bulunuz.

4.



Çetin Bey 12 m yükseklikteki yapıya çıkabilmek için şekildeki gibi merdiven kullanıyor. Sağlam olsun diye A noktasında yapıya paralel olacak biçimde merdivenin altına bir destek yerleştiriyor. Merdivenin yere değen ucunun yapıya uzaklığı 20 m ve desteğin boyu 9 m olduğuna göre desteğin yapıya olan uzaklığını bulunuz.

5.



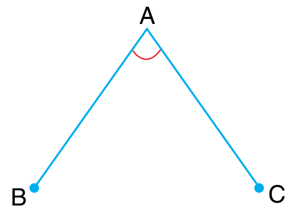
Serhat oturdukları binanın yüksekliğini ölçmek istiyor. Bunun için binadan 60 m uzaklıkta dik kenar uzunlukları 10 cm ve 4 cm olan gönyeyi, 10 cm'lik dik kenarı yere paralel, ucunu binanın tepesini görebileceği biçimde şekildeki gibi göz hizasında tutuyor. Serhat'ın göz hizasının yerden yüksekliği 180 cm olduğuna göre binanın yüksekliğini bulunuz.

4.3. ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI

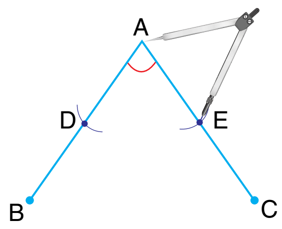
4.3.1. Üçgenin İç ve Dış Açıortaylarının Özellikleri

Örnek

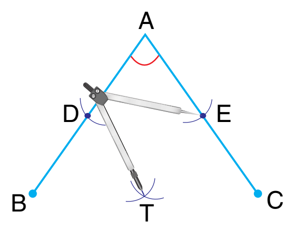
Pergel ve cetvel yardımıyla yanda verilen $\widehat{BAC}$'nın açıortayını çizelim. Daha sonra açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunluklarının eşit olduğunu gösterelim.



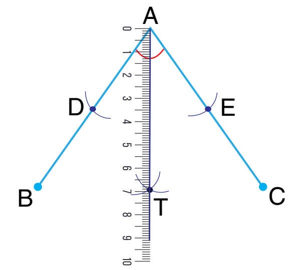
Çözüm



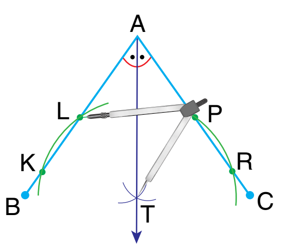
Pergelin sivri ucunu A noktasına koyalım ve açının kollarını kesecek biçimde yaylar çizelim. Çizdiğimiz yayların açının kollarını kestiği noktalara D ve E diyelim.



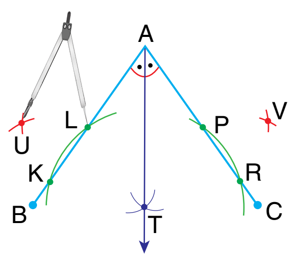
Pergelin sivri ucunu sırasıyla D ve E noktalarına koyup açının iç bölgesinde birbirini kesecek biçimde iki yay çizelim ve kesişim noktasına T diyelim.



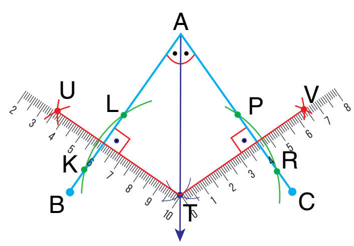
A ve T noktalarını cetvelle birleştirdiğimizde elde ettiğimiz [AT, $\widehat{BAC}$'nın açıortayıdır.



Pergelin siviri ucunu T noktasına koyarak [AB]'nı K ve L noktalarında [AC]'nı P ve R noktalarında kesen yaylar çizelim.

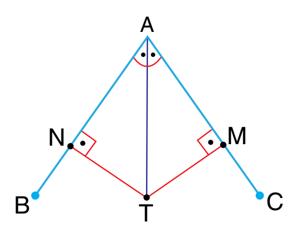


K ve L noktaları merkez alınıp birbirini kesen yaylar çizilerek U noktası, sonra da P ve R noktaları merkez alınarak V noktasını elde edelim.



Cetvelle [TU] ve [TV] doğru parçalarını çizdiğimizde [TU] ⊥ [AB] ve [TV] ⊥ [AC] olduğunu görürüz.

[TU]'nın [AB]'nı kestiği noktaya N, [TV]'nın [AC]'nı kestiği noktaya M diyelim ve |TN| = |TM| olduğunu gösterelim.



[AT] açıortay olduğundan m($\widehat{NAT}$) = m($\widehat{MAT}$),

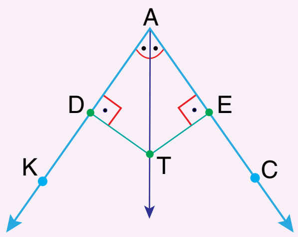
m($\widehat{ANT}$) = m($\widehat{AMT}$) = 90° olduğundan $\overset{\triangle}{ANT}$ ve $\overset{\triangle}{AMT}$'lerinde üçüncü açılar da birbirine eşit olacağından m($\widehat{ATN}$) = m($\widehat{ATM}$) olur.

|AT| = |AT| ($\overset{\triangle}{ANT}$ ve $\overset{\triangle}{AMT}$'lerinde ortak kenar)

Bu durumda $\overset{\triangle}{ANT} \cong \overset{\triangle}{AMT}$ (A.K.A.) elde edilir.

Eş üçgenlerde karşılıklı kenar uzunlukları eşit olacağından |TN| = |TM| bulunur.

Bilgi

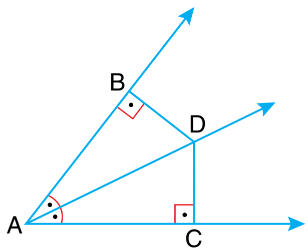


Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları eşittir.

$m(\widehat{DAT}) = m(\widehat{EAT})$ ve $[DT] \perp [AK]$, $[TE] \perp [AC]$ ise

$|TD| = |TE|$ olur.

Örnek



Yandaki şekilde $[DB] \perp [AB]$, $[DC] \perp [AC]$,

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD})$, $|CD| = (3x - 7)$ br,

$|BD| = (x + 5)$ br olduğuna göre x'in değerini bulalım.

Çözüm

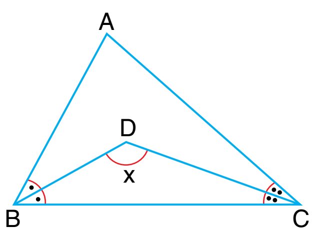
D noktası açıortay üzerinde olduğundan $|BD| = |CD|$ olur.

Bu durumda $x + 5 = 3x - 7 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$ br olarak bulunur.

Örnek

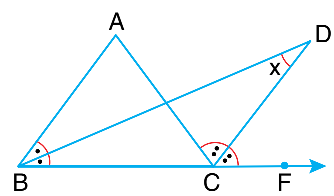
Aşağıda verilen üçgenlerde x değeri ile $\widehat{A}$'nın ölçüsü arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

a)



[BD] ve [CD] ait oldukları köşelere ait iç açıortaydır.

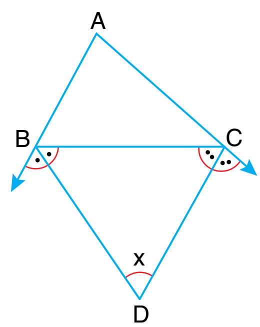
b)



[BD] iç açıortay

[CD] dış açıortaydır.

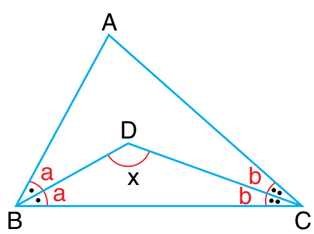
c)



[BD] ve [CD] bulundukları köşelerin dış açıortaylarıdır.

Çözüm

a)



$\overset{\frown}{BDC}$'nde $a + b + x = 180° \Rightarrow a + b = 180° - x$

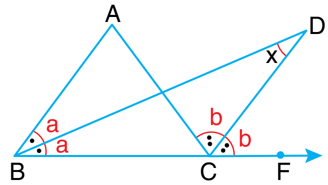
$\overset{\frown}{ABC}$'nde $m(\widehat{A}) + 2a + 2b = 180°$ olur. Buradan

$m(\widehat{A}) + 2(a + b) = 180°$

$m(\widehat{A}) + 2(180° - x) = 180°$

$m(\widehat{A}) + 360° - 2x = 180°$

$m(\widehat{A}) + 180 = 2x \Rightarrow x = 90° + \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ bulunur.

b) 

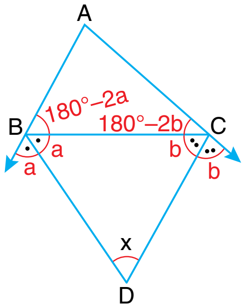
$\widehat{ABC}$'nde

$2b = 2a + m(\widehat{A}) \Rightarrow m(\widehat{A}) = 2(b - a)$

$\widehat{BDC}$'nde

$b = a + x \Rightarrow x = b - a$ olur.

Bu iki eşitlikten $m(\widehat{A}) = 2 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ elde edilir.

c) 

$\widehat{ABC}$'nde

$m(\widehat{A}) + 180 - 2b + 180° - 2a = 180°$

$180° = 2(a + b) - m(\widehat{A})$

$\widehat{BDC}$'nde

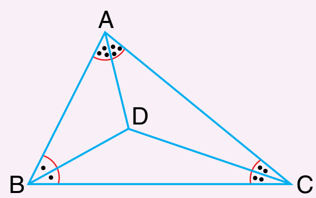
$x + a + b = 180° \Rightarrow a + b = 180° - x$ olur. Buradan

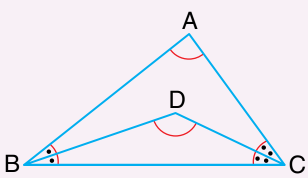
$180° = 2(180 - x) - m(\widehat{A}) \Rightarrow 2x = 180° - m(\widehat{A})$

$x = 90 - \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ elde edilir.

Bilgi

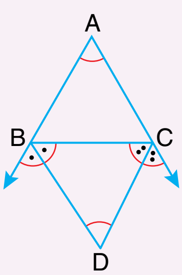
1) Bir üçgende iç açıortaylar üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişirler.



2) 

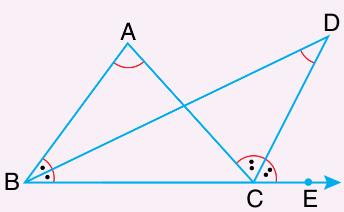
[BD] ve [DC] iç açıortaylar olmak üzere

$$m(\widehat{BDC}) = 90° + \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

3) 

[BD] ve [CD] dış açıotaylar olmak üzere

$$m(\widehat{BDC}) = 90 - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

4) 

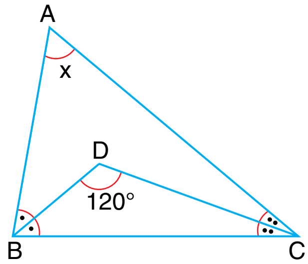
[BD] iç açıotay ve [DC] dış açıortay olmak üzere

$$m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

Örnek

Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre istenenleri bulalım.

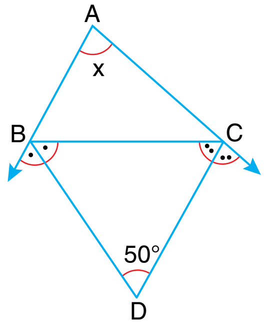
a)



[BD] ve [CD] iç açıortay

$m(\widehat{D}) = 120°$ ise $m(\widehat{A}) = x = ?$

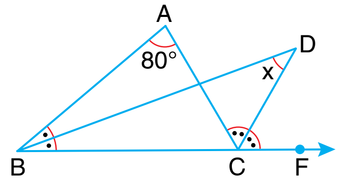
b)



[BD] ve [CD] dış açıortay

$m(\widehat{D}) = 50°$ ise $m(\widehat{A}) = x = ?$

c)



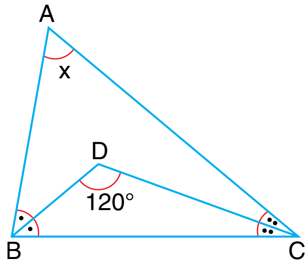
[BD] iç açıortay

[CD] dış açıortay

$m(\widehat{A}) = 80°$ ise $m(\widehat{D}) = x = ?$

Çözüm

a)

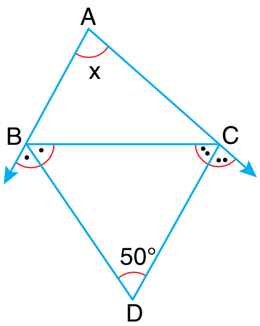


$$120° = 90° + \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

$$120° = 90 + \frac{x}{2}$$

$$30 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 60°$$ bulunur.

b)

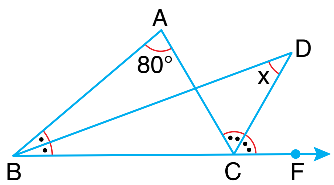


$$50° = 90° - \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

$$50° = 90° - \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 40° \Rightarrow x = 80°$$ bulunur.

c)



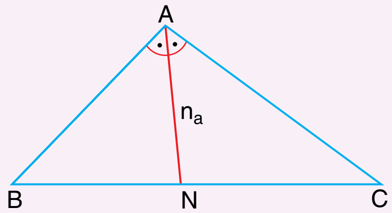
$$x = \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

$$x = \frac{80°}{2}$$

$x = 40°$ bulunur.

Bilgi

1) İç açıortay teoremi

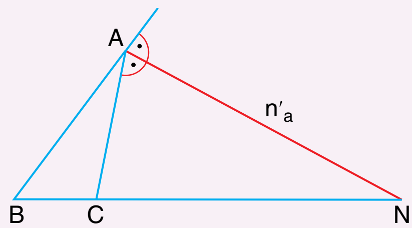


$[AN]$, $\widehat{A}$'nın iç açıortayı ise

$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|}$ olur.

$|AN| = n_A$ ile gösterilir.

2) Dış açıortay teoremi

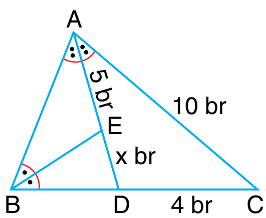


$[AN]$, $\widehat{ABC}$'nde A köşesinin dış açıortayı ise

$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|}$ olur.

$|AN| = n'_A$ ile gösterilir.

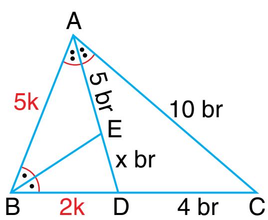
Örnek



Yandaki şekilde $[AD]$ ve $[BE]$ iç açıortaylar,

$|AC| = 10$ br, $|AE| = 5$ br, $|CD| = 4$ br ve $|ED| = x$ br olduğuna göre x'in değerini bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$'nde $[AD]$ iç açıortay olduğundan

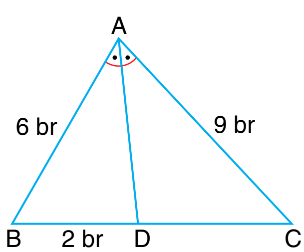
$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CD|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ olduğundan

$|AB| = 5k$, $|BD| = 2k$ diyelim.

$\widehat{ABD}$'nde $[BE]$ iç açıortay olduğundan

$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|ED|} \Rightarrow \frac{\cancel{5}\cancel{k}}{2\cancel{k}} = \frac{\cancel{5}}{x} \Rightarrow x = 2$ br olarak elde edilir.

Örnek



Yandaki şekilde $[AD]$ iç açıortay

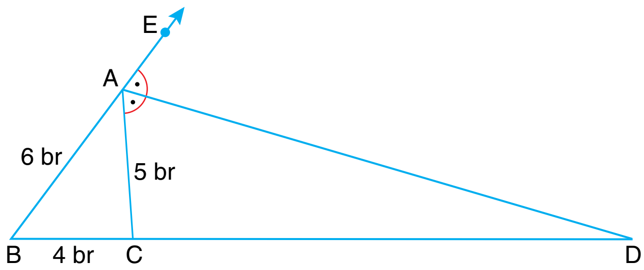
$|AB| = 6$ br, $|AC| = 9$ b, $|BD| = 2$ br olduğuna göre $|DC|$'nu bulalım.

Çözüm

İç açıortay teoremine göre

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BD|}{|DC|} \Rightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{2}{|DC|} \Rightarrow \frac{\cancel{2}}{3}=\frac{\cancel{2}}{|DC|} \Rightarrow |DC|=3\,\text{br} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek



Yandaki verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde

[AD], A köşesine ait dış açıortay

B, C, D doğrusal noktalar

|AB| = 6 br, |AC| = 5 br, |BC| = 4 br

olduğuna göre |CD|'nu bulalım.

Çözüm

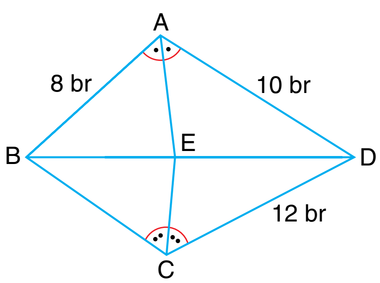
Dış açıortay teoreminden

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BD|}{|CD|} \Rightarrow \frac{6}{5}=\frac{4+|CD|}{|CD|}$$

$$6\cdot|CD| = 20 + 5\cdot|CD|$$

|CD| = 20 br elde edilir.

Örnek



Yandaki şekilde [AE] ve [CE] iç açıortaylar, E ∈ [BD]

|AB| = 8 br,

|AD| = 10 br,

|CD| = 12 br

olduğuna göre |BC|'nu bulalım.

Çözüm

$\overset{\frown}{BAD}$'nde iç açıortay teoreminden

$$\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|BE|}{|ED|} \Rightarrow \frac{8}{10}=\frac{|BE|}{|ED|} \quad \text{olur.}$$

$\overset{\frown}{BCD}$'nde iç açıortay teoreminden

$$\frac{|BC|}{|CD|}=\frac{|BE|}{|ED|} \Rightarrow \frac{|BC|}{12}=\frac{|BE|}{|ED|} \quad \text{olur. Bu iki eşitlikten}$$

$$\frac{8}{10}=\frac{|BC|}{12}$$

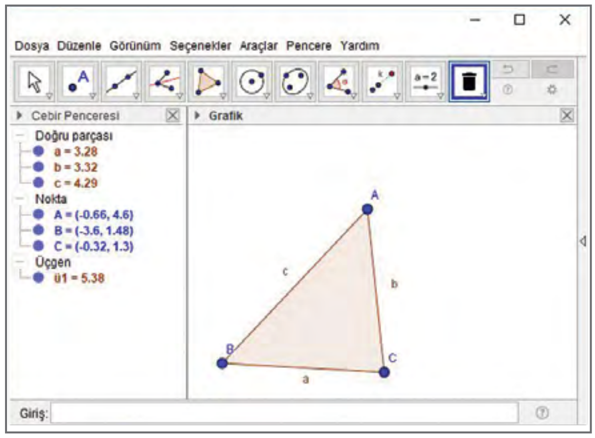
$$|BC|=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 12}{\underset{5}{\cancel{10}}}=\frac{48}{5} \quad \text{br elde edilir.}$$

Örnek

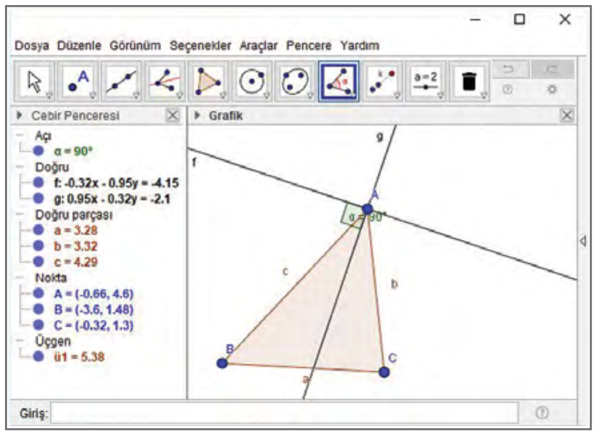
Bir üçgende bir köşeden çizilen bir iç açıortay ile bir dış açıortayın arasındaki açının ölçüsünü dinamik matematik yazılımı yardımıyla bulalım.

Çözüm

Bilgisayarda dinamik matematik yazılımını açalım. Grafik penceresinde araç çubuğundaki 5. kutuya tıklayıp ekrana gelen “Çokgen” seçeneğini seçelim ve herhangi bir $\widehat{ABC}$’ni oluşturalım.

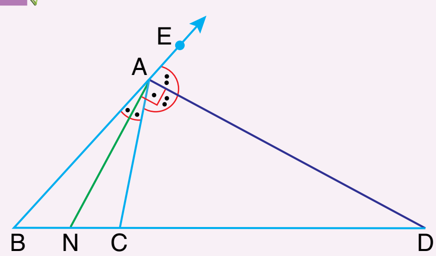


Daha sonra araç çubuğundaki 4. kutuya tıklayıp “Açıortay” seçeneğini seçelim ve üçgenin A köşesine ait iç ve dış açıortaylarını çizelim. Araç çubuğundaki 8. kutuya tıklayıp “Açı” seçeneğini seçelim ve A köşesinde geçen açıortayların üzerine sırasıyla tıklayarak açıortayların arasındaki açının ölçüsünü bulalım.



Bir köşede geçen bir iç açıortay ile bir dış açıortayın arasındaki açının ölçüsü hakkında neler söyleyebilirsiniz?

Bilgi



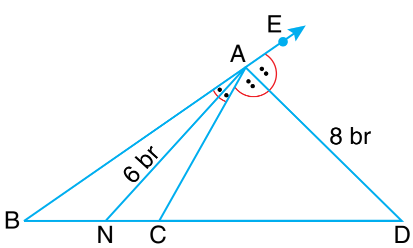
Bir üçgende herhangi bir köşeden geçen bir iç açıortay ile bir dış açıortayın arasındaki açının ölçüsü 90° dir.

Yandaki $\widehat{ABC}$’de [AN] iç açıortay,

[AD] A köşesine ait dış açıortay ise

$[AN] \perp [AD]$ ve $m(\widehat{DAN}) = 90°$ olur.

Örnek



Yandaki şekilde [AN] iç açıortay,

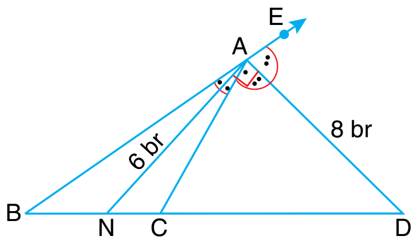
[AD], A köşesine ait dış açıortay,

B, N, C, D doğrusal noktalar,

|AN| = 6 br, |AD| 8 br

olduğuna göre |ND|’nu bulalım.

Çözüm



[AN] iç açıortay, [AD] dış açıortay olduğundan

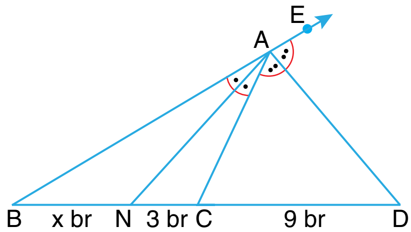
$[AN] \perp [AD]$ olur.

Bu durumda $\overset{\frown}{DAN}$ dik üçgen olur ve dik üçgende Pisagor teoremi yardımıyla

$$|ND|^2 = |AN|^2 + |AD|^2 \Rightarrow |ND|^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$|ND| = 10$ br elde edilir.

Örnek



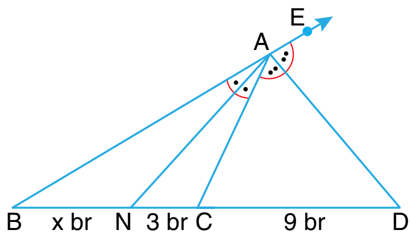
Şekilde [AN] iç açıortay,

[AD], A köşesine ait dış açıortay, B, N, C, D doğrusal noktalar

$|NC| = 3$ br, $|CD| = 9$ br ve $|BN| = x$ br olduğuna göre

x değerini bulalım.

Çözüm



$\overset{\frown}{ABC}$'nde iç açıortay teoreminden

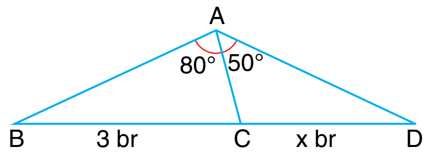
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{x}{3}$$

$\overset{\frown}{ABC}$'nde dış açıortay teoreminden

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{12+x}{9} \quad \text{olur.}$$

Bu iki eşitlikten $\frac{x}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{12+x}{\underset{3}{\cancel{9}}} \Rightarrow 3x = 12 + x \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$ br elde edilir.

Örnek

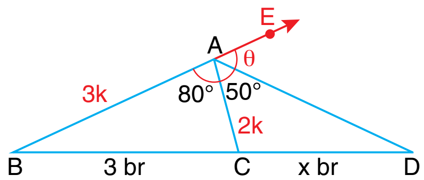


Yandaki şekilde $m(\overset{\frown}{BAC}) = 80°$, $C \in [BD]$

$m(\overset{\frown}{CAD}) = 50°$, $|BC| = 3$ br, $|DC| = x$ br

ve $2|AB| = 3|AC|$ olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm



[BA]'nı uzatalım $m(\overset{\frown}{DAE}) = \theta$ diyelim.

$50° + 80° + \theta = 180°$ olduğundan $\theta = 50°$ bulunur.

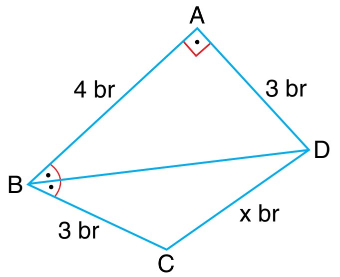
Bu durumda [AD] $\overset{\frown}{ABC}$'nde A köşesine ait bir dış açıortay olur.

Dış açıortay teoreminden

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|} \Rightarrow \frac{3\cancel{k}}{2\cancel{k}} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 3x = 2x + 6 \Rightarrow x = 6 \text{ br elde edilir.}$$

PEKİŞTİRME SORULARI

1.



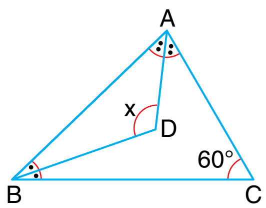
Şekilde [BD] açıortay, |AB| = 4 br,

|AD| = 3 br, |BC| = 3 br ve |CD| = x br

olduğuna göre x değerini bulunuz.

2. Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre istenenleri bulunuz.

a)

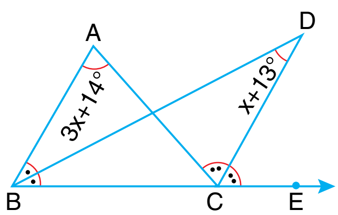


[AD] ve [BD] iç açıortaylar

m($\widehat{C}$) = 60°

ise x = ?

b)

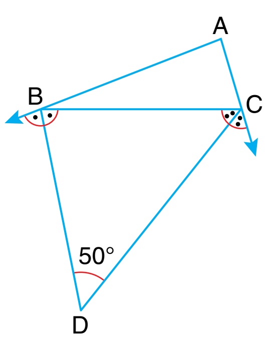


[BD] iç, [CD] C köşesine ait dış açıortaylar,

m($\widehat{A}$) = 3x + 14° ve m($\widehat{D}$) = x + 13° ise

x = ?

c)



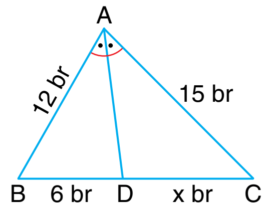
[BD] ve [CD] sırasıyla B ve C köşelerine ait dış açıortaylar,

m($\widehat{D}$) = 50° ise

m($\widehat{A}$) = ?

3. Aşağıda verilenlere göre x değerini bulunuz.

a)



[AD] iç açıortay

D ∈ [AC]

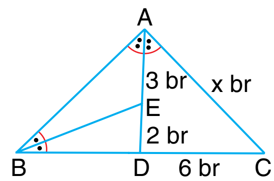
|AB| = 12 br

|AC| = 15 br

|BD| = 6 br

|DC| = x br ise x = ?

b)



[AD] ve [BE] iç açıortaylar

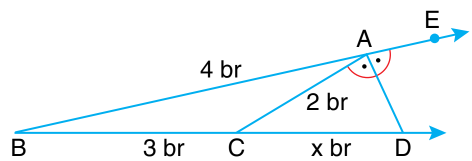
D ∈ [BC],

E ∈ [AD],

|AE| = 3 br, |ED| = 2 br, |DC| = 6 br,

|AC| = x br ise x = ?

c)



Yukarıda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde

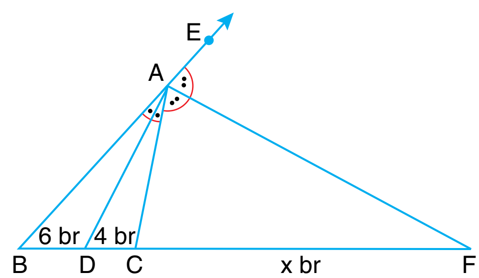
[AD] A köşesine ait dış açıortay

B, C, D doğrusal noktalar

|AB| = 4 br, |AC| = 2 br, |BC| = 3 br,

|CD| = x br ise x = ?

4.



Yukarıdaki şekilde B, D, C, F doğrusal noktalar, [AD] iç açıortay, [AF] A köşesine ait dış açıortaydır.

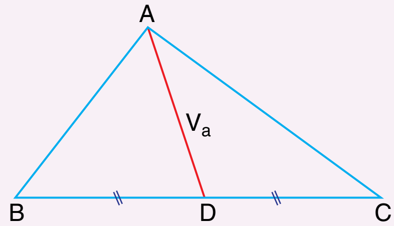
|BD| = 6 br, |DC| = 4 br ve |CF| = x br

olduğuna göre x değerini bulunuz.

4.3.2. Üçgenin Kenarortaylarının Özellikleri

Bilgi

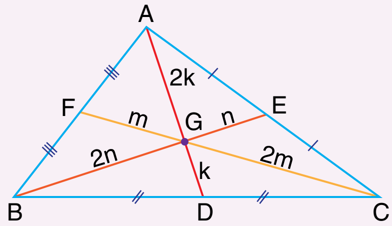
1)



Bir üçgende herhangi bir köşeyi karşısındaki kenarın orta noktası ile birleştiren doğru parçasına üçgenin bu kenarına ait **kenarortayı** denir.

Şekilde |BD| = |DC| ve [AD] kenarortaydır. $|AD| = V_a$ ile gösterilir.

2)



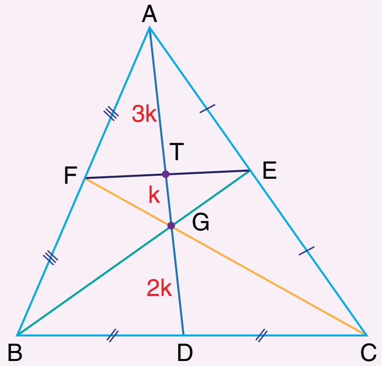
Kenarortaylar üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişirler. Bu noktaya üçgenin **ağırlık merkezi** denir ve genellikle G ile gösterilir.

Ağırlık merkezinin kenarortay üzerinde ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları köşeden kenara doğru 2 ve 1 sayıları ile orantılıdır.

Şekilde D, E, F bulundukları kenarların orta noktaları

$|AD| = V_a$, $|BE| = V_b$, $|CF| = V_c$ ve $\dfrac{|AG|}{|GD|} = \dfrac{|CG|}{|GF|} = \dfrac{|BG|}{|GE|} = 2$ olur.

3)

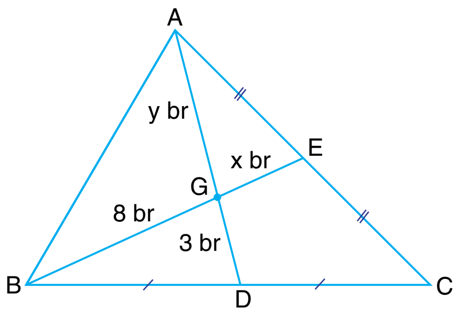


Bir üçgende orta taban ve ağırlık merkezinin kenarortay üzerinde ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları köşeden kenara doğru sırasıyla 3, 1, 2 sayıları ile orantılıdır.

Şekilde D, E, F bulundukları kenarların orta noktaları, [FE] orta tabandır.

Bu durumda $\dfrac{|AT|}{3} = |TG| = \dfrac{|GD|}{2}$ olur.

Örnek

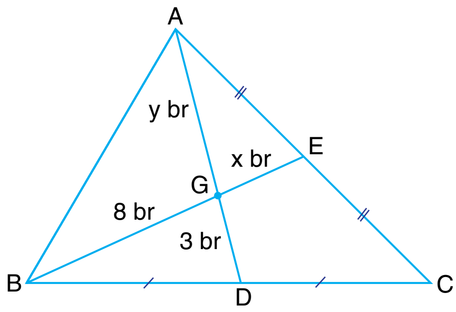


Yandaki şekilde G üçgenin ağırlık merkezi

|BG| = 8 br, |GD| = 3 br, |AG| = y br, |GE| = x br

olduğuna göre x + y toplamını bulalım.

Çözüm



G üçgenin ağırlık merkezi olduğundan

$\dfrac{|BG|}{|GE|}=2 \Rightarrow \dfrac{8}{x}=2$

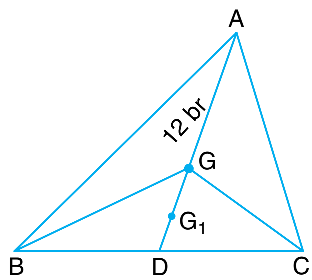
$x = 4$

$\dfrac{|AG|}{|GD|}=2 \Rightarrow \dfrac{y}{3}=2$

$y = 6$ bulunur.

Buradan $x + y = 4 + 6 = 10$ elde edilir.

Örnek



Yanda verilen şekilde G, $\widehat{ABC}$'nin, G_1 de $\widehat{BGC}$'nin ağırlık merkezidir.

A, G, G_1 ve D doğrusal noktalar

$|AG| = 12$ br olduğuna göre $|G_1D|$'nu bulalım.

Çözüm

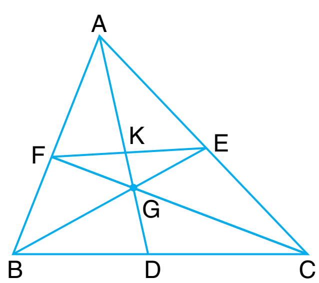
G, $\widehat{ABC}$'nin, G_1, $\widehat{BGC}$'nin ağırlık merkezi olduğundan

$|AG| = 2 \cdot |GD| \Rightarrow 12 = 2 \cdot |GD| \Rightarrow |GD| = 6$ br olur.

$|GG_1| = 2 \cdot |G_1D| = 2k$ dersek $|GG_1| = 2k$, $|G_1D| = k$ olur.

Bu durumda $|GD| = 2k + k = 6 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$ ve $|G_1D| = 2$ br elde edilir.

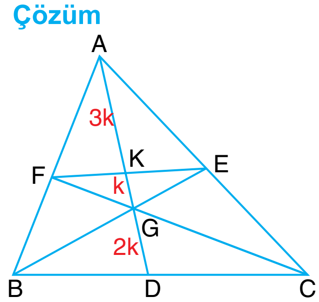
Örnek



Yanda verilen $\widehat{ABC}$'nde [AD], [BE], [CF] kenarortaylar, A, K, G, D doğrusal noktalardır.

Verilenlere göre $\dfrac{|AG|+|KD|}{|AK|+|GD|}$ oranını bulalım.

Çözüm

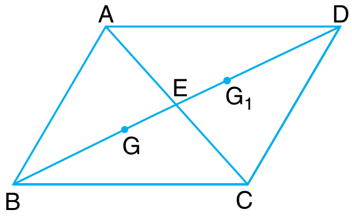


G ağırlık merkezi olduğundan [FE] orta tabandır.

Orta taban ve ağırlık merkezi, kenarortay üzerinde şekildeki gibi orantılı doğru parçaları oluşturacağından

$\dfrac{|AG|+|KD|}{|AK|+|GD|}=\dfrac{4k+3k}{3k+2k}=\dfrac{7\cancel{k}}{5\cancel{k}}=\dfrac{7}{5}$ elde edilir.

Örnek

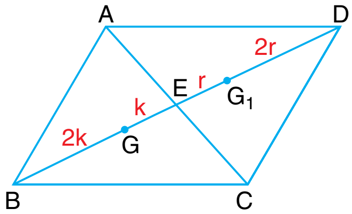


Şekilde D, G_1, E, G ve B noktaları doğrusal,

G, $\widehat{ABC}$'nin, G_1, $\widehat{ACD}$'nin ağırlık merkezi ve

$|BD| = 30$ br olduğuna göre $|GG_1|$'nu bulalım.

Çözüm



G ve G_1 bulundukları üçgenlerin ağırlık merkezi olduklarında

$|BG| = 2 \cdot |GE|$ ve

$|DG_1| = 2 \cdot |G_1E|$ eşitlikleri vardır.

$|GE| = k$ ve $|G_1E| = r$ dersek $|BG| = 2k$ ve $|DG_1| = 2r$ olur.

Bu durumda

$|BD| = 3k + 3r = 30 \Rightarrow k + r = 10$ ve

$|GG_1| = k + r = 10$ br olarak elde edilir.

Örnek

Herhangi bir üçgenin kenarlarının uzunlukları arasındaki sıralamayla bu kenarlara ait kenarortayların uzunlukları arasındaki sıralamayı dinamik matematik yazılımı yardımıyla inceleyelim.

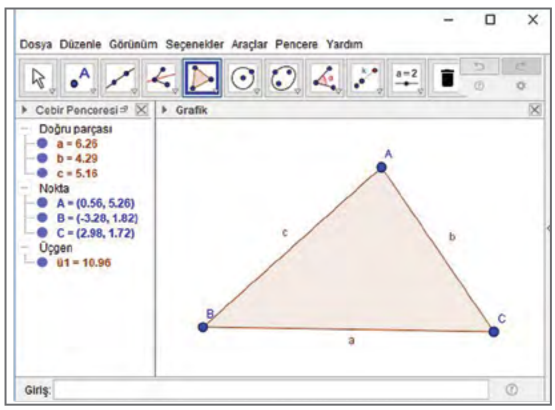
Çözüm

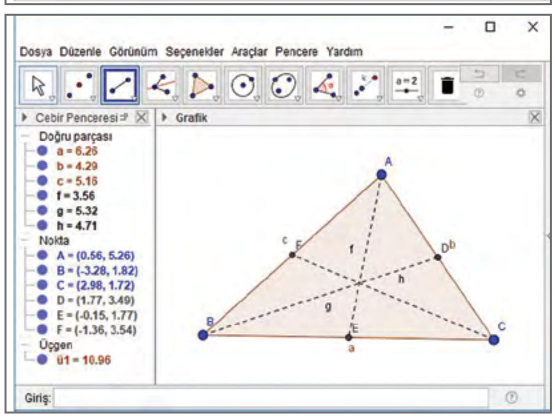
Dinamik matematik yazılımında grafik penceresini açalım. Araç çubuğundaki 5. kutuya tıklayarak gelen "Çokgen" seçeneğini seçip herhangi bir üçgen oluşturalım.

Araç çubuğundaki 2. kutuya tıklayarak "Orta nokta veya merkez" seçeneğini seçerek üçgenin köşelerine tıklayıp kenarlarının orta noktalarını belirleyelim. Daha sonra araç çubuğunda 3. kutuya tıklayarak "Doğru parçası" seçeneğini seçip üçgenin kenarortaylarını oluşturalım.

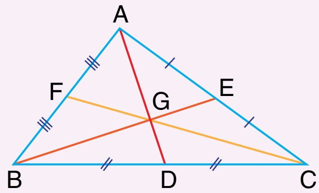
Cebir penceresinde üçgenin kenar uzunlukları ve bu kenarlara ait kenarortayların uzunlukları görülmektedir.

Bir üçgende kenar uzunlukları arasındaki sıralama ile bu kenarlara ait kenarortayların uzunlukları arasındaki sıralamada nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.





Bilgi

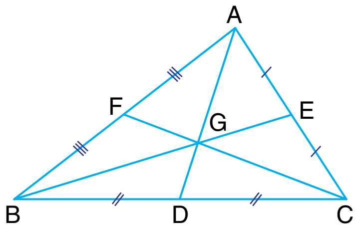


Bir üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarlara ait kenarortay uzunlukları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

G ağırlık merkezi, [AD], [BE], [CF] kenarortaylar olmak üzere

$$|BC| > |AC| > |AB| \Rightarrow |AD| < |BE| < |CF| \text{ olur.}$$

Örnek



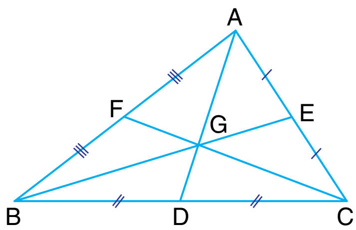
Yanda verilen üçgende [AD], [CF] ve [BE] kenarortaylar,

$|BE| = 10$ br, $|AD| = 7$ br ve

$m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{BCA}) < m(\widehat{BAC})$

olduğuna göre $|CF|$'nun hangi aralıkta değerler alacağını bulalım.

Çözüm

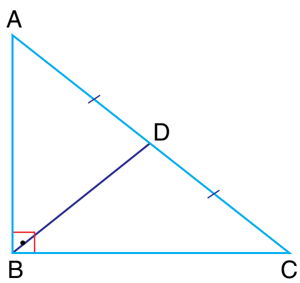


$\widehat{ABC}$'nde $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{BCA}) < m(\widehat{BAC})$ olduğu için

$|AC| < |AB| < |BC|$ olacağından $|BE| > |CF| > |AD|$ olur.

Bu durumda $10 > |CF| > 7$ elde edilir.

Örnek

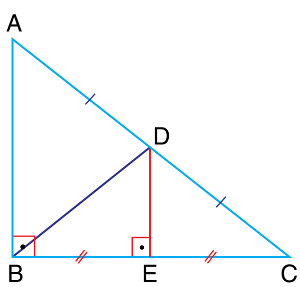


Yanda verilen ABC dik üçgeninde $m(\widehat{B}) = 90°$,

[BD], [AC]'na ait kenarortaydır.

Buna göre $|BD| = \dfrac{|AC|}{2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



D noktasında [DE] // [AB] olacak biçimde [DE] çizersek

$[DE] \perp [BC]$ ve $\widehat{C}$, $\widehat{CED}$ ve $\widehat{CBA}$'lerinde ortak açı olduğundan

$\widehat{CED} \sim \widehat{CBA}$ (A.A.) olur.

Buradan $\dfrac{|CE|}{|CB|} = \dfrac{|CD|}{|CA|} = \dfrac{1}{2}$

ve $|CB| = 2\,|CE| \Rightarrow |CE| = |BE|$ olur.

$|BE| = |CE|$, $|ED| = |ED|$ (ortak kenar) ve $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{CED}) = 90°$ olduğundan

$\widehat{BED} \cong \widehat{CED}$ (K.A.K.) olacağından $|BD| = |DC|$ olur.

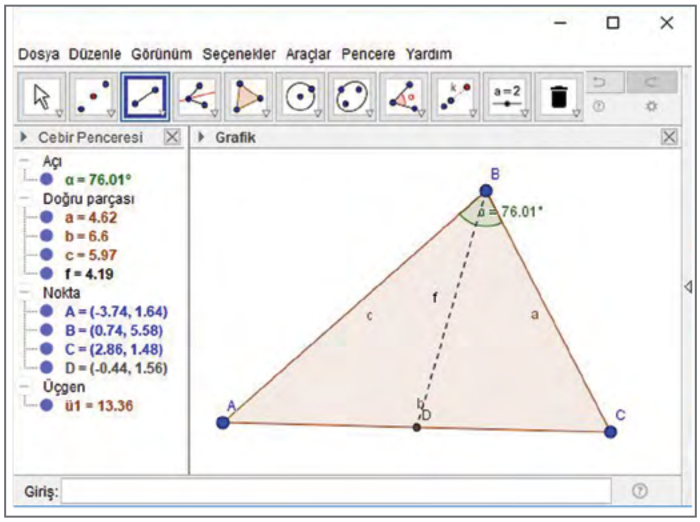
Bu durumda D noktası [AC]'nın orta noktası olduğundan $|DC| = |BD| = \dfrac{|AC|}{2}$ elde edilir.

Örnek

Bir üçgenin kenarları üzerinde değişiklikler yaparak üçgen çeşitlerine bağlı olarak değişikliklerin kenarortaylar üzerindeki etkisini dinamik matematik yazılımı yardımıyla gözlemleyelim.

Çözüm

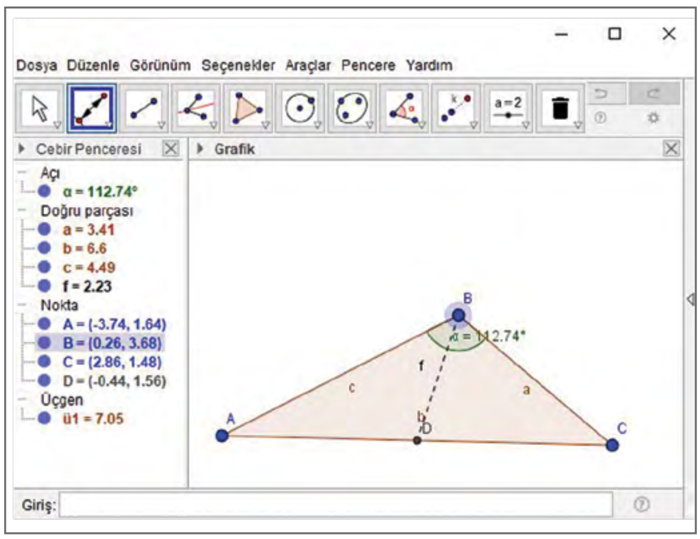
Dinamik matematik yazılımını indirip grafik penceresini açalım. Ekrandaki araç çubuğunda 5. kutuya tıklayarak "Çokgen" seçeneğini seçip herhangi bir $\widehat{ABC}$'ni oluşturalım. Araç çubuğunda 8. kutuya tıklayıp "Açı" seçeneğini seçerek üçgenin B açısının ölçüsünü bulalım. Araç çubuğunda 2. kutuya tıklayıp "Orta nokta veya merkez" seçeneği seçip [AC] kenarının orta noktasını belirleyelim. Daha sonra araç çubuğunda 3. kutuya tıklayarak "Doğru parçası" seçeneği yardımıyla [BD] kenarortayı oluşturalım.



Cebir penceresinde verilen ölçüler yardımıyla $m(\widehat{B}) < 90°$ ve $|BD| > \dfrac{|AC|}{2}$ olduğunu görebiliriz.

Araç çubuğunda 2. kutuya tıklayarak "Noktayı bağla / ayır" seçeneği yardımıyla B noktasını tutup aşağı yukarı çekelim.

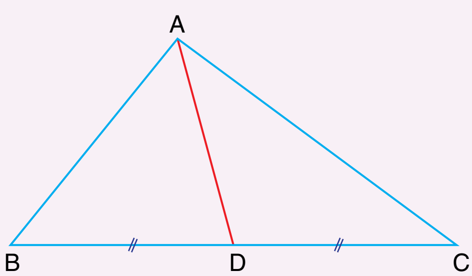
Cebir penceresinde $m(\widehat{B}) > 90°$ ve $|BD| < \dfrac{|AC|}{2}$ olduğunu görebiliriz.



Bir üçgen üzerinde değişiklik yapıldığında üçgen çeşitlerine bağlı olarak değişikliklerin kenarortaylar üzerindeki etkisi hakkında neler söyleyebilirsiniz?

Bilgi

Aşağıda verilen $\widehat{ABC}$'nde [AD] , [BC]'na ait kenarortay olmak üzere

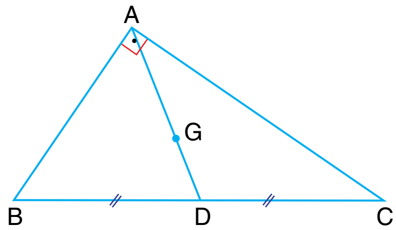


1) $m(\widehat{A}) < 90° \Rightarrow |AD| > \dfrac{|BC|}{2}$

2) $m(\widehat{A}) = 90° \Rightarrow |AD| = \dfrac{|BC|}{2}$

3) $m(\widehat{A}) > 90° \Rightarrow |AD| < \dfrac{|BC|}{2}$ olur.

Örnek

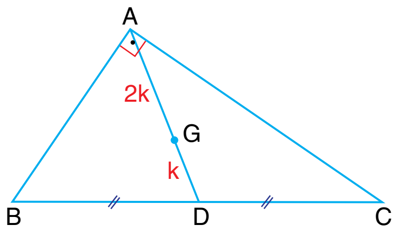


Şekilde $m(\widehat{BAC}) = 90°$,

G noktası ağırlık merkezi, A, G, D doğrusal noktalar ve

$|BC| = 18$ br olduğuna göre $|GD|$'nu bulalım.

Çözüm

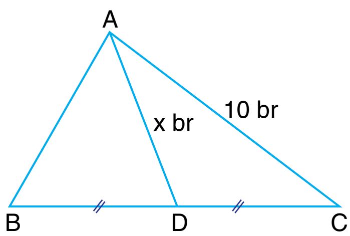


$\widehat{ABC}$ dik üçgen olduğundan $|AD| = \dfrac{|BC|}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$ br olur.

$|AG| = 2|GD| = 2k$ dersek $|AD| = 2k + k = 9 \Rightarrow 3k = 9$

$|GD| = k = 3$ br elde edilir.

Örnek



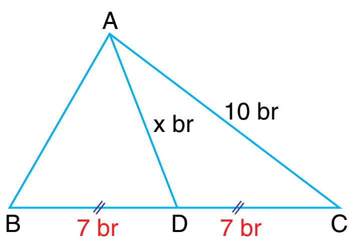
Yanda verilen $\widehat{ABC}$'nde $m(\widehat{BAC}) > 90°$,

[AD] kenarortay,

$|BC| = 14$ br, $|AC| = 10$ br ve $|AD| = x$ br

olduğuna göre x'in alacağı tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{BAC}) > 90°$ olduğundan

$|AD| < \dfrac{|BC|}{2} \Rightarrow x < \dfrac{14}{2} \Rightarrow x < 7$

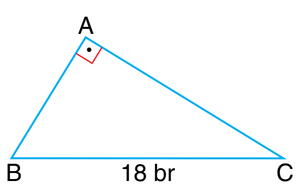
$\widehat{ADC}$'nde üçgen eşitsizliğinden

$10 - 7 < x < 10 + 7 \Rightarrow 3 < x < 17$ olur.

Bu iki eşitsizlikten $3 < x < 7$ olacağından x'in alacağı tam sayı değerleri 4, 5 ve 6 olarak bulunur.

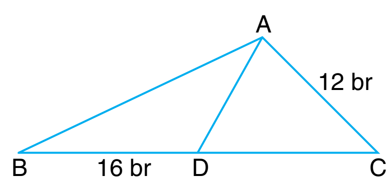
PEKİŞTİRME SORULARI

1.



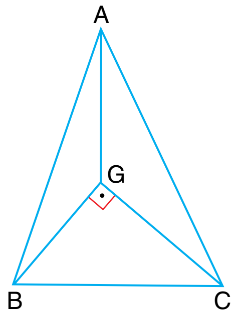
Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{A}) = 90°$ ve $|BC| = 18$ br olduğuna göre üçgenin en kısa kenarortay uzunluğunu bulunuz.

2.



Yukarıdaki şekilde [AD] kenarortay, $m(\widehat{BAC}) > 90°$, $|BD| = 16$ br ve $|AC| = 12$ br olduğuna göre $|AD|$ hangi aralıkta değerler alır?

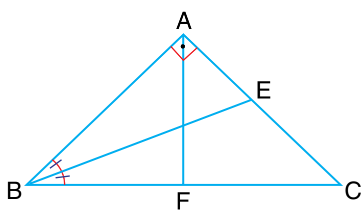
3.



Yukarıdaki şekilde G noktası $\widehat{ABC}$'nin ağırlık merkezi ve $|AG| = 18$ br ve $[BG] \perp [GC]$ olduğuna göre
$|BC|$ değeri kaç birimdir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

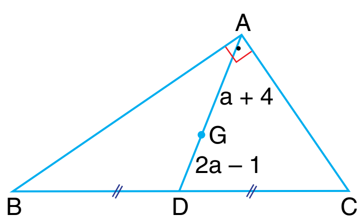
4.



Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{BAC}) = 90°$,
$[BE]$ açıortay, $[AF]$ kenarortaydır. $E \in [AC]$
$|AE| = 4$ br ve $|EC| = 5$ br olduğuna göre
$|AF| = x$ kaçtır?

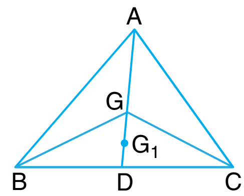
A) 5 B) 6 C) 7 D) $\frac{15}{2}$ E) $\frac{17}{2}$

5.



Yukarıdaki şekilde G noktası $\widehat{ABC}$'nin ağırlık merkezi, $[AB] \perp [AC]$,
$|AG| = (a + 4)$ br,
$|GD| = (2a - 1)$ br
olduğuna göre $|BC|$'nu bulunuz.

6.

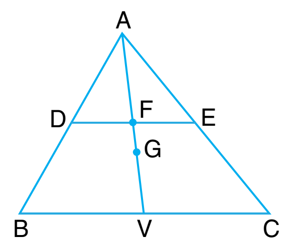


Yukarıda verilen şekilde G noktası $\widehat{ABC}$'nin, G_1 noktası $\widehat{BGC}$'nin ağırlık merkezidir.

A, G, G_1, D doğrusal noktalar

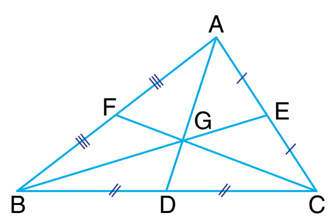
$|AG| = (4x + 6)$ br ve $|G_1D| = 5$ br olduğuna göre x değerini bulunuz.

7.



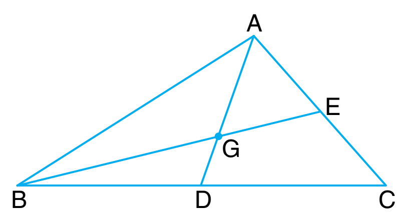
Yukarıdaki şekilde D, F, E ve A, F, G, V noktaları kendi aralarında doğrusal, [DE] orta taban G noktası $\widehat{ABC}$'nin ağırlık merkezidir. $|GF| = 2$ br olduğuna göre $|AV|$'nu bulunuz.

8.



Yukarıdaki şekilde $|AE| = |EC|$, $|AF| = |FB|$, $|BD| = |DC|$ ve $m(\widehat{CBA}) < m(\widehat{BCA}) < m(\widehat{BAC})$ olduğuna göre $|AD|$, $|BE|$ ve $|CF|$'nı küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

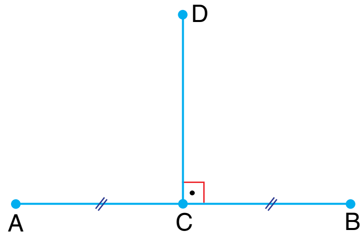
9.



Yukarıdaki şekilde G noktası ağırlık merkezi E ve D orta noktadır. $|BE| = 24$ br, $|GD| = 5$ br olduğuna göre $|BG| - |AG|$ farkını bulunuz.

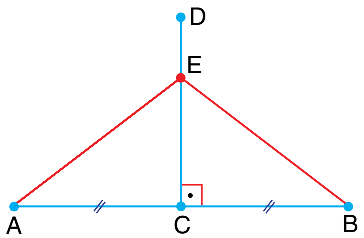
4.3.3. Üçgenin Kenar Orta Dikmeleri

Örnek



Şekilde C, [AB]'nın orta noktası ve [DC] ⊥ [AB] olduğuna göre [DC] üzerinde alınan herhangi bir noktanın A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu gösterelim.

Çözüm



[DC] üzerinde bir tane E noktası alalım ve |AE| = |BE| olduğunu gösterelim.

$\overset{\frown}{ACE} \cong \overset{\frown}{BCE}$ olduğunu gösterirsek |AE| = |BE| olur.

Buna göre

|AC| = |CB| (verilmiş)

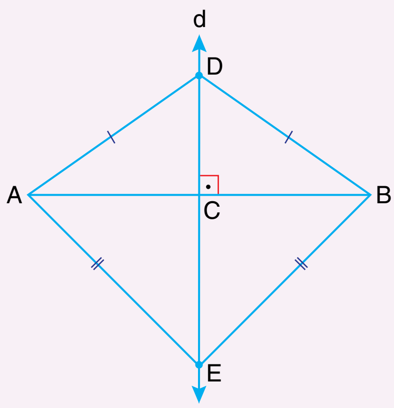
$m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{BCE}) = 90°$ (dik açı)

|CE| = |CE| ($\overset{\frown}{ACE}$ ve $\overset{\frown}{BCE}$'nde ortak kenar)

Bu durumda $\overset{\frown}{ACE} \cong \overset{\frown}{BCE}$ (K.A.K.) olur.

Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olacağından |AE| = |BE| elde edilir.

Bilgi



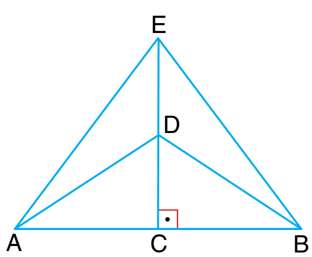
Bir doğru parçasına, orta noktasından dik olan doğruya **orta dikme** denir.

Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır ve bunun karşıtı da doğrudur.

Yandaki şekilde

|AC|=|BC| ve d⊥[AB] ⇔ |AD|=|DB| ve |AE|=|BE| olur.

Örnek

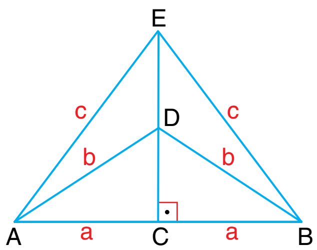


Yandaki şekilde [CE] , [AB]'nın orta dikmesidir.

|AE| + |AD| + |AC| = 16 br olduğuna göre

Ç($\overset{\frown}{ADB}$) + Ç($\overset{\frown}{AEB}$) + Ç(ADBE) toplamını bulalım.

Çözüm



Orta dikme üzerinde alınan her noktanın doğru parçasının uç noktalarına uzaklıkları eşittir.

Buna göre şekli incelersek

a + b + c = 16 br olur.

Buradan

$$Ç(\widehat{ADB}) + Ç(\widehat{AEB}) + Ç(ADBE) = 2a + 2b + 2a + 2c + 2b + 2c$$

$$= 4(a + b + c)$$

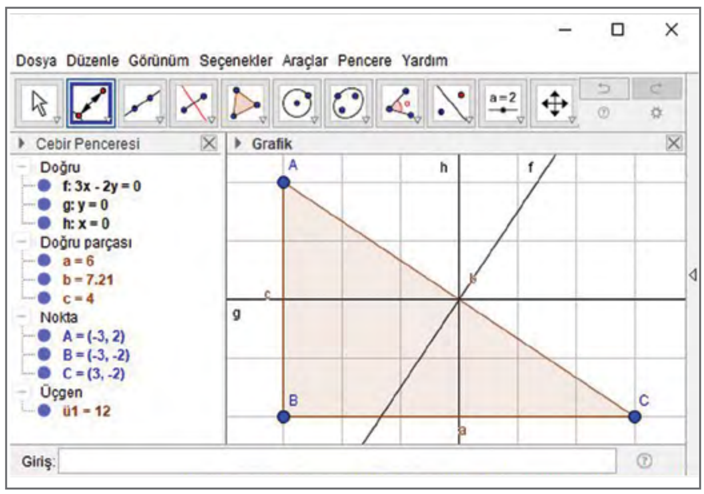
$$= 4 \cdot 16 = 64 \text{ br elde edilir.}$$

Örnek

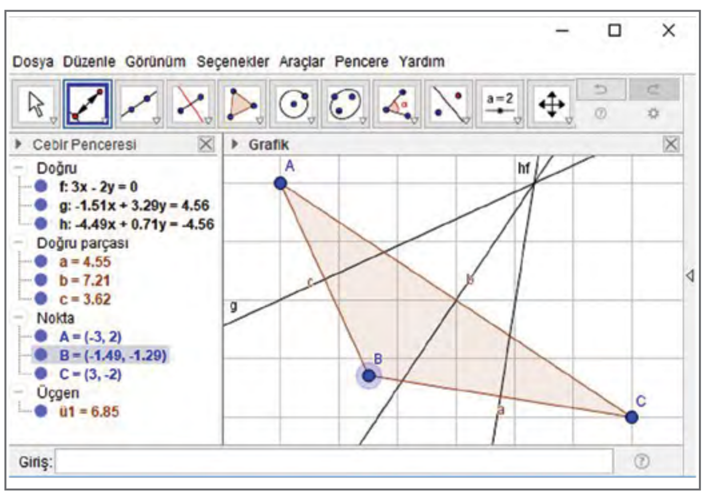
Üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiklerini dinamik matematik yazılımı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

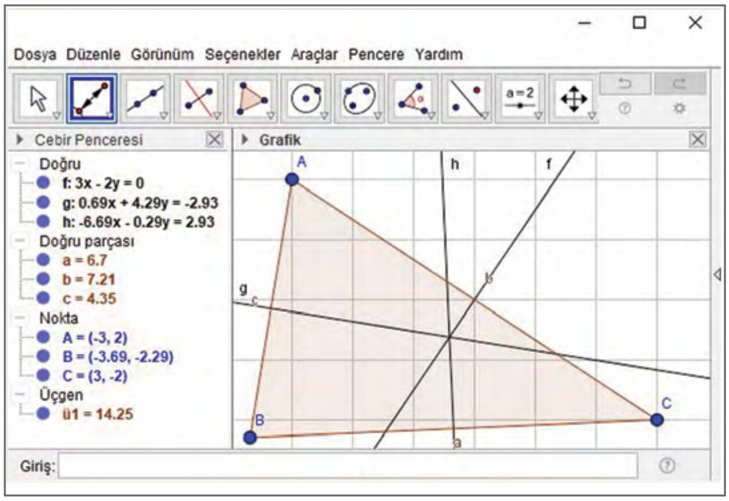
Dinamik matematik yazılımını açalım. Ekrana sağ tıklayıp “Grid” seçeneğini seçelim. Araç çubuğunda 5. kutuya tıklayarak “Çokgen” seçeneği yardımıyla bir dik üçgen oluşturalım. Sonra araç çubuğunda 4. kutuya tıklayarak “Orta dikme” seçeneği yardımıyla üçgenin kenarlarının orta dikmelerini oluşturalım.



Araç çubuğunda 2. kutuya tıklayarak “Noktayı bağla / ayır” seçeneği yardımıyla B noktasını ileri geri kaydırarak geniş açılı ve dar açılı üçgenler oluşturalım.



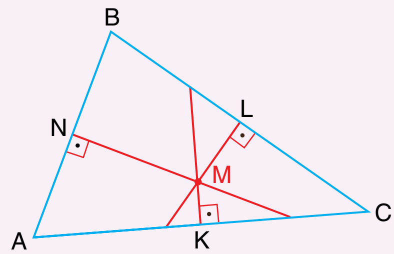
Üçgen çeşidine göre üçgenin kenarlarının orta dikmelerinin kesişim noktalarının yeri hakkında neler söyleyebilirsiniz?



Bilgi

Üçgenin bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir.

Dar açılı üçgen

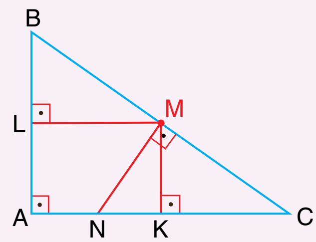


[ML] ⊥ [BC] ve |BL| = |CL|

[MK] ⊥ [AC] ve |AK| = |KC|

[MN] ⊥ [AB] ve |AN| = |NB|

Dik açılı üçgen

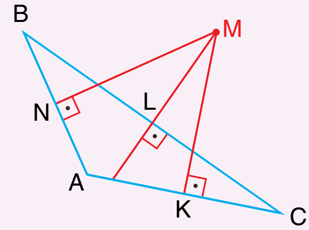


[ML] ⊥ [AB] ve |AL| = |LB|

[NM] ⊥ [BC] ve |BM| = |MC|

[MK] ⊥ [AC] ve |AK| = |KC|

Geniş açılı üçgen



[MN] ⊥ [AB] ve |BN| = |NA|

[ML] ⊥ [BC] ve |BL| = |LC|

[MK] ⊥ [AC] ve |AK| = |KC|

Bir üçgende kenar orta dikmeler bir noktada kesişirler. Bu nokta dar açılı üçgenin iç bölgesinde, dik üçgende hipotenüsü üzerinde, geniş açılı üçgenin dış bölgesinde bulunur.

Kenar orta dikmelerinin kesişim noktası üçgenin köşelerine eşit uzaklıktadır.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına “D” yanlış olanların başına “Y” yazınız.

(......) Kenar orta dikmelerinin kesişim noktası üçgenin köşelerine eşit uzaklıktadır.

(......) Dik üçgende kenar orta dikmeler hipotenüs üzerinde bir noktada kesişirler.

2. Bir $\widehat{ABC}$'nin iç bölgesinde alınan bir D noktası üçgenin köşelerine onar birim uzaklıktadır. D noktasının [AB] kenarına en kısa uzaklığı 6 br olduğuna göre [AB] kenarının uzunluğu kaç birimdir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

4.3.4. Üçgenin Çeşidine Göre Yüksekliklerinin Kesiştiği Noktanın Konumu

Örnek

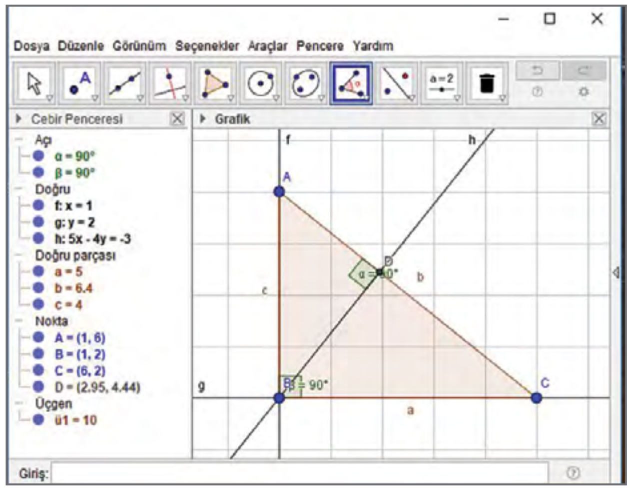
Bir üçgende yüksekliklerin kesiştiği noktayı dinamik matematik yazılımı yardımıyla bulalım.

Çözüm

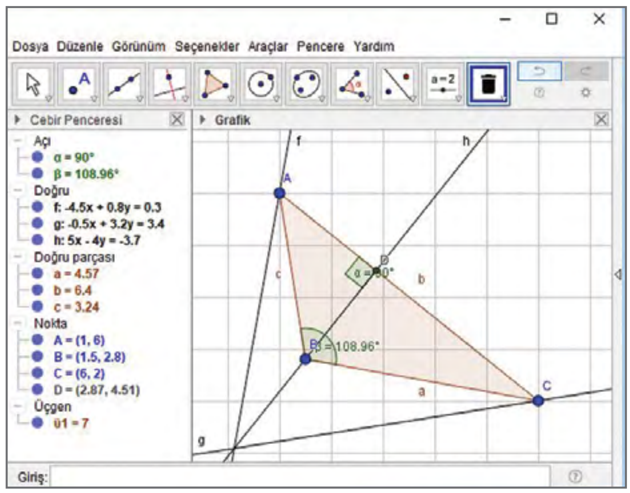
Dinamik matematik yazılımını açalım. Grafik penceresinde sağa tıklayarak açılan pencereden "Grid" seçeneğini seçelim.

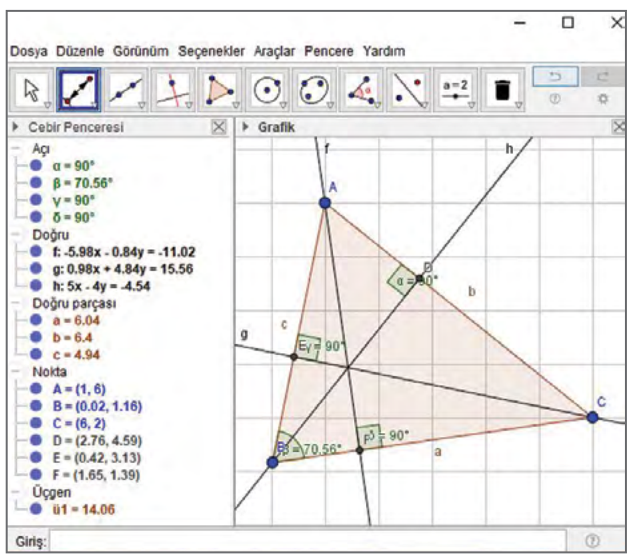
Ekranda araç çubuğundaki 5. kutuya tıklayarak "Çokgen" seçeneği yardımıyla ABC dik üçgenini oluşturalım. Araç çubuğunda 4. kutuya tıklayarak "Dik doğru" seçeneği yardımıyla üçgenin köşelerinden yükseklikleri oluşturalım.

2. kutuya tıklayarak "Nokta" seçeneği yardımıyla dik doğruların kenarları kestiği noktaları belirleyelim. 8. kutuya tıklayarak "Açı" seçeneği yardımıyla dik doğruların kenarlarla yaptığı açı ölçülerini belirleyelim.



Araç çubuğunda 2. kutuya tıklayıp "Noktayı bağla / ayır" seçeneği yardımıyla üçgenin B köşesini ileri geri çekelim.

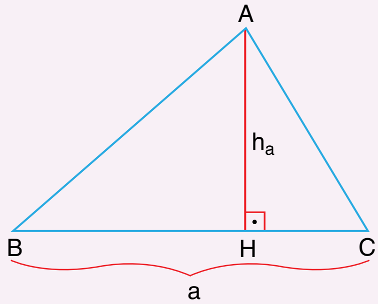




Bir üçgende yüksekliklerin kesişim noktalarının yerleri için neler söyleyebilirsiniz?

Bilgi

1)

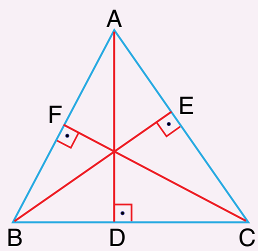


Bir üçgenin herhangi bir köşesinden karşı kenara veya kenarın uzantısına indirilen dikmenin karşı kenarı veya kenarın uzantısını kestiği nokta ile köşeyi birleştiren doğru parçasına üçgenin o kenarına ait **yüksekliği** denir.

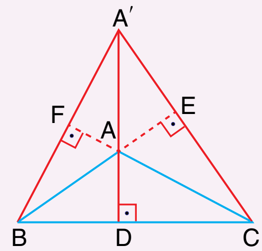
Şekilde [AH], [BC]'na ait yüksekliktir. Yükseklik "h" ile gösterilir. Hangi kenara ait olduğunu belirtmek için |BC| = a olmak üzere |AH| = h_a ile gösterilir.

H noktasına [BC]'na ait **dikme ayağı** denir.

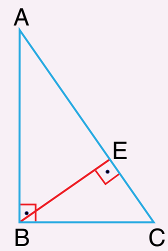
2)



Dar açılı üçgende yükseklikler üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişirler.



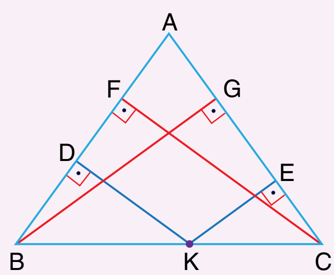
Geniş açılı üçgende yükseklikler üçgenin dış bölgesinde bir noktada kesişirler. $\widehat{ABC}$'nde yüksekliklerin kesişim noktası A′ noktasıdır.



Dik üçgende yükseklikler dik kenarların kesişim noktasında kesişirler.

Yüksekliklerin kesişim noktasına üçgenin diklik merkezi denir.

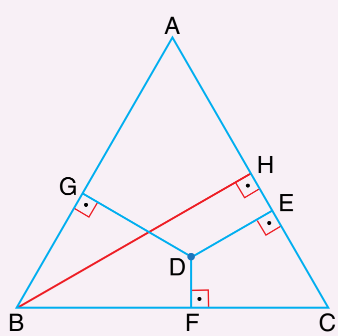
3)



İkizkenar bir üçgenin tabanından alınan bir noktadan eş kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı, üçgenin eş olan kenarlarından birinin yüksekliğine eşittir.

|AB| = |AC| $\Rightarrow$ |KE| + |KD| = |BG| = |CF| olur.

4)



Eşkenar üçgen içerisinde alınan bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir.

|AB| = |AC| = |BC| $\Rightarrow$ |DE| + |DF| + |DG| = |BH| olur.

ABC eşkenar üçgeninde

|AB| = |AC| = |BC| = a br ise

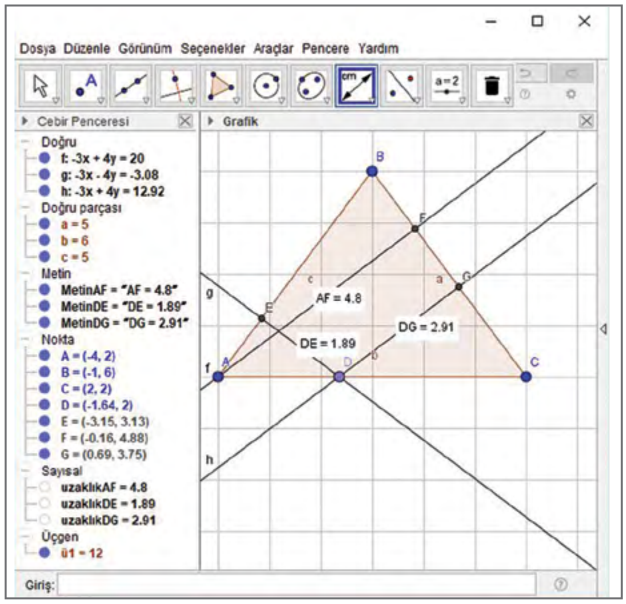
$|BH| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ br olur.

Örnek

Bilgi kutusunda verilen 3 ve 4. maddelerin doğru olduğunu dinamik matematik yazılımı yardımı ile gösterelim.

Çözüm

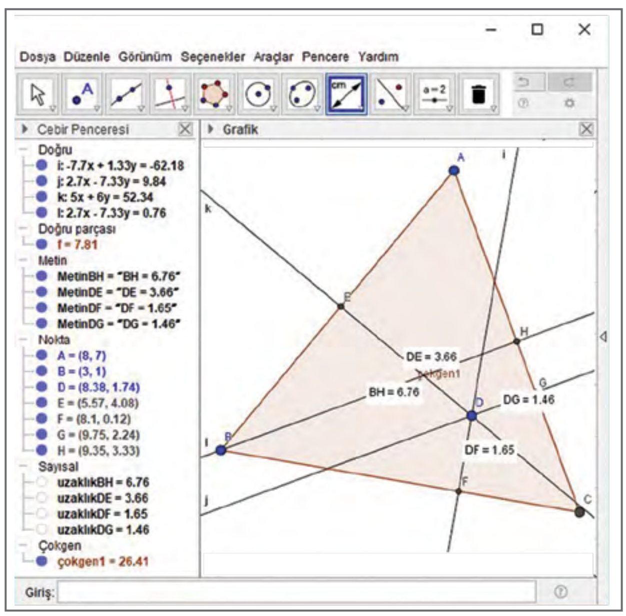
İkizkenar bir üçgenin tabanında alınan bir noktadan diğer kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı ile üçgenin eş olan kenarlarından birinin yüksekliği arasındaki ilişki.



Dinamik matematik yazılımını açalım. Grafik ekranına sağ tıklayıp “Grid” seçeneğini seçelim. Araç çubuğunda 5. kutuya tıklayıp “Çokgen” seçeneğini kullanarak ekrandaki kareli kâğıt yardımıyla ABC ikizkenar üçgenini oluşturalım. Araç çubuğunda 2. kutuya tıklayıp “Nokta” seçeneği yardımıyla üçgenin [AC] üzerinde bir D noktası seçelim. Daha sonra araç çubuğunda 4. kutuya tıklayıp dik doğru yardımıyla D noktasından [BA] ve [BC]’larına, A noktasından [BC]’na dik doğrular çizelim. Araç çubuğunda 2. kutuya tıklayıp “Nokta” seçeneği yardımıyla dik doğruların kenarları kestiği noktaları işaretleyelim. En sonunda araç çubuğunda 8. kutuya tıklayarak “Uzaklık veya uzunluk” seçeneği yardımıyla |DE|, |DG| ve |AF|’luklarını bulalım.

Yapılanları incelediğimizde |AF| = |DE| + |DG| olduğu görülür.

Eşkenar üçgen içerisinde alınan bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı ile eşkenar üçgenin yüksekliği arasındaki ilişki.

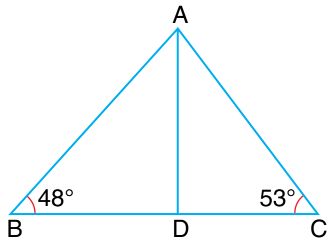


Araç çubuğunda 5. kutuya tıklayarak “Düzgün çokgen” seçeneği yardımıyla ABC eşkenar üçgenini oluşturalım. 2. kutudaki “Nokta” seçeneği yardımıyla üçgenin iç bölgesinde bir D noktası belirleyelim. Daha sonra araç çubuğunda 4. kutuya tıklayarak “Dik doğru” seçeneğini seçip D noktasından tüm kenarlara, B noktasından [AC]’na dik doğru çizelim. Araç çubuğundan 2. kutuda “Nokta” seçeneğini seçip doğruların kenarlarla dik kesiştiği noktalarını belirleyelim.

En sonunda araç çubuğunda 8. kutuya tıklayarak “Uzaklık veya uzunluk” seçeneği yardımıyla |DE|, |DF|, |DG| ve |BH| luklarını bulalım.

Yapılanları incelediğimizde |BH| = |DE| + |DF| + |DG| olduğu görülür.

Örnek

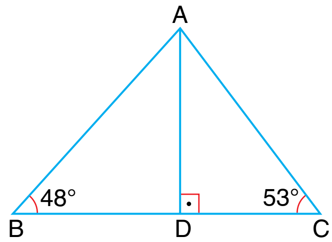


D noktası $\widehat{ABC}$'nde [BC]'na ait dikme ayağıdır.

$m(\widehat{B}) = 48°$, $m(\widehat{C}) = 53°$

olduğuna göre $m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{DAC})$ farkını bulalım.

Çözüm



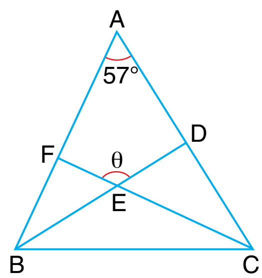
D noktası $\widehat{ABC}$'nde [BC]'na ait dikme ayağı ise

$[AD] \perp [BC]$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{BAD}) = 42°$, $m(\widehat{DAC}) = 37°$ olacağından

$m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{DAC}) = 42° - 37° = 5°$ elde edilir.

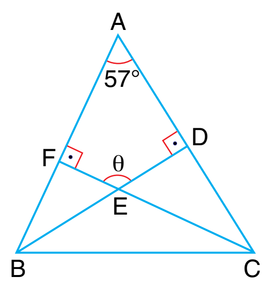
Örnek



Şekildeki $\widehat{ABC}$'nde E noktası diklik merkezi,

$m(\widehat{A}) = 57°$, $m(\widehat{FED}) = \theta$, B, E, D ve C, E, F kendi aralarında doğrusal noktalar olduğuna göre θ'nın kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



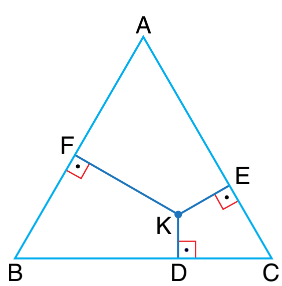
E noktası diklik merkezi olduğundan $[BD] \perp [AC]$ ve $[CF] \perp [AB]$ olur.

FEDA dörtgeninde

$$90° + 90° + 57° + \theta = 360°$$

$$\theta = 123° \text{ elde edilir.}$$

Örnek



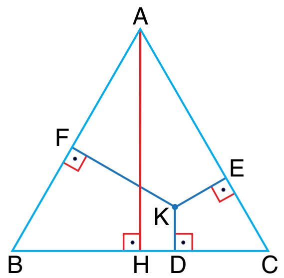
Şekilde ABC eşkenar üçgen

$[KF] \perp [AB]$, $[KD] \perp [BC]$, $[KE] \perp [AC]$

$|KD| + |KE| + |KF| = 10$ br

olduğuna göre $|BC|$'nu bulalım.

Çözüm

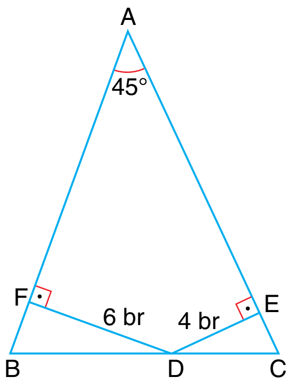


ABC eşkenar üçgen olduğundan |AH| = |KD| + |KE| + |KF| = 10 br olur.

|AH| yüksekliğine h br ve |BC| = a br dersek $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ br olduğundan

$10=\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=\dfrac{20}{\sqrt{3}}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ br $\Rightarrow |BC|=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ br elde edilir.

Örnek



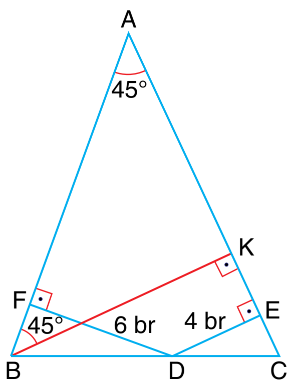
Yandaki $\widehat{ABC}$'nde $m(\widehat{A})$ = 45°,

|AB| = |AC|, |DE| = 4 br, |DF| = 6 br

[DE] ⊥ [AC] ve [DF] ⊥ [AB]

olduğuna göre |AB|'nu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen olduğundan

[BK] ⊥ [AC] çizilirse |BK| = |DE| + |DF|

|BK| = 4 + 6 = 10 br olur.

ABK dik üçgeninde |AK| = |BK| olduğundan

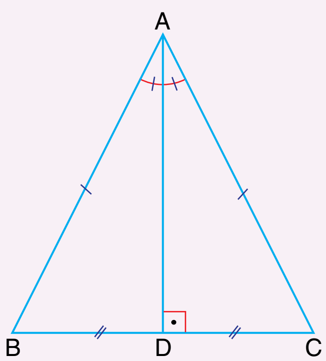
Pisagor bağıntısı yardımıyla

$|AB|^2 = |BK|^2 + |AK|^2$

$|AB|^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$

$|AB| = 10\sqrt{2}$ br elde edilir.

Bilgi



İkizkenar bir üçgende tabana ait kenarortay, yükseklik ve açıortay aynı doğru parçasıdır.

ABC ikizkenar üçgen, |AB| = |AC| ise [AD], A köşesinden çizilen hem yükseklik hem açıortay hem de kenarortaydır.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına “D” yanlış olanların başına “Y” yazınız.

(......) Dik üçgende diklik merkezi dik kenarların kesişim noktasıdır.

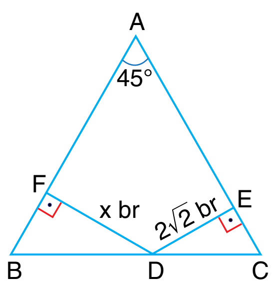
(......) Dar açılı üçgende diklik merkezi üçgenin iç bölgesindedir.

(......) Geniş açılı üçgende diklik merkezi üçgenin iç bölgesindedir.

(......) İkizkenar bir üçgenin tabanı üzerinde alınan bir noktadan eş kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı eş kenarların uzunluklarına eşittir.

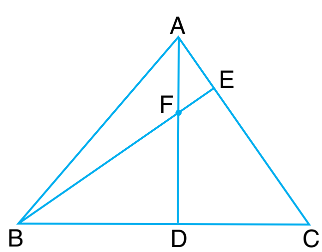
2. Bir eşkenar üçgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın kenarlara olan uzaklıkları toplamı $15\sqrt{3}$ br olduğuna göre bu eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğunu bulunuz.

3.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$, $|DE| = 2\sqrt{2}$ br, $|DF| = x$ br, $|AB| = 10$ br, $[DE] \perp [AC]$ ve $[DF] \perp [AB]$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

4.



Yukarıdaki üçgende F diklik merkezidir.

$m(\widehat{EFD}) = 128°$ olduğuna göre $\widehat{C}$'nın ölçüsünü bulunuz.

5. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi daima doğrudur?

I. Bir üçgende yükseklikler bir noktada kesişir.

II. Yüksekliklerin kesişim noktasına üçgenin diklik merkezi denir.

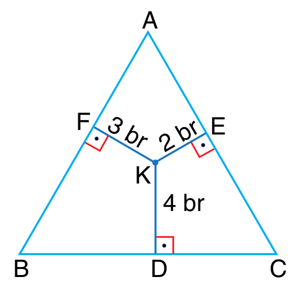
III. Bir üçgende yüksekliklerin kesişim noktasına üçgenin ağırlık merkezi denir.

IV. Eşkenar üçgenin içinde alınan bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir.

V. İkizkenar üçgenin tabanı üzerinde alınan bir noktadan eş kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir.

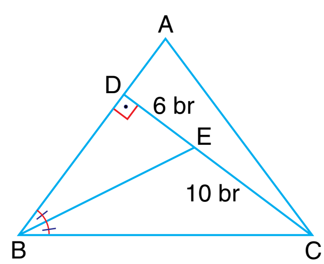
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC eşkenar üçgeninde $[KD] \perp [BC]$, $[KE] \perp [AC]$, $[KF] \perp [AB]$, $|KD| = 4$ br, $|KE| = 2$ br, $|KF| = 3$ br olduğuna göre $Ç(\widehat{ABC})$ değerini bulunuz.

7.



ABC ikizkenar üçgen $|AB| = |BC|$, $E \in [CD]$, $[CD] \perp [AB]$, $[BE]$ iç açıotay $|DE| = 6$ br, $|EC| = 10$ br olduğuna göre $|AC|$'nu bulunuz.

4.4. DİK ÜÇGEN VE TRİGONOMETRİ

4.4.1. Dik Üçgende Pisagor Teoremi

Pythagoras (Pisagor)

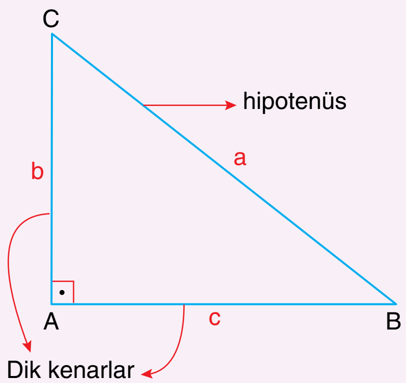
Ionia (İyonya) bölgesinde Samos (Sisam) adasında doğan Pythagoras; matematik, astronomi ve müzik teorisinde önemli gelişmelere katkı sağlamış Yunan filozofudur. Çocukluk yıllarını Samos'ta geçirdi, iyi bir eğitim aldı ve oldukça zengin olan babasının ticaret yapması nedeniyle birçok yere seyahat etti. 20'li yaşlarda Mısır'a gitti. MÖ 525'te Pers Kralı II.Cambyses Mısır'ı istila etti. Pythagoras esir alındı ve savaş esiri olarak Babil'e götürüldü. Babil o dönemde dünyanın o yöresindeki en kültürlü ve en büyük şehirdi. Babil'de ne kadar kaldığı tam bilinmemektedir. Mezopotamya, o dönemin en büyük matematikçilerini barındırmakla ünlüydü. Orada Babillilerden aritmetik, müzik ve diğer matematiksel bilimlerde öğrendikleriyle mükemmelliğin zirvesine ulaştı. Pythagoras'un Babil'de ne zaman serbest bırakıldığına dair kesin bir kayıt olmamakla birlikte MÖ 520 civarında Babil'den Samos'a geri döndü.

Pythagoras (Pisagor)
MÖ 580–MÖ 500 (Temsilî)

Bir dik üçgenin kenarları arasında Pythagoras teoremi olarak bilinen $a^2 + b^2 = c^2$ ilişkisi Mısırlılar, Babilliler ve Çinliler tarafından Pythagoras'un yaşadığı dönemden 1000 yıl öncesinde biliniyor olmasına karşın eşitliği geometrik düşünceyle ilk o kanıtladığı için resmî matematik tarihinde teorem onun adıyla anılmaktadır.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Bilgi



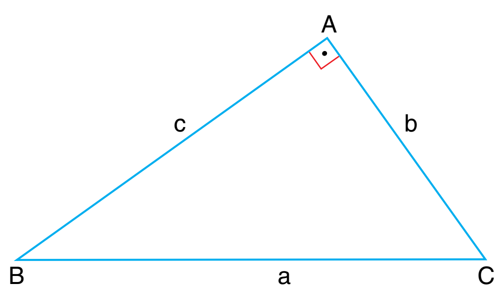
Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.

Bu eşitlik **Pisagor teoremi** olarak isimlendirilir ve

$a^2 = b^2 + c^2$ olarak gösterilir.

$m(\widehat{A}) = 90° \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ olur.

Örnek

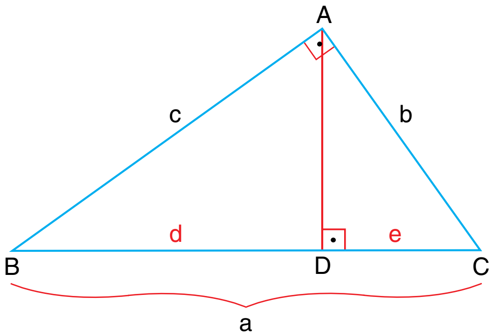


Yanda verilen ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{A}) = 90°$, $|BC| = a$ br, $|AB| = c$ br ve $|AC| = b$ br

olduğuna göre $a^2 = b^2 + c^2$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



A köşesinden [AD] ⊥ [BC] olacak biçimde [AD] yüksekliğini çizelim.

|BD| = d br, |DC| = e br kabul edelim. (a = d + e olur)

$\overset{\frown}{BDA}$ ile $\overset{\frown}{BAC}$ ve $\overset{\frown}{CDA}$ ile $\overset{\frown}{CAB}$'nin benzer olduklarını gösterelim.

$\overset{\frown}{BDA}$ ile $\overset{\frown}{BAC}$ arasında

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{B})$ (ortak açı)

$m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{BAC}) = 90°$ (dik açı olduğundan) $\overset{\frown}{BDA} \sim \overset{\frown}{BAC}$ (A.A.) bulunur.

Bu durumda $\dfrac{|BD|}{|BA|} = \dfrac{|DA|}{|AC|} = \dfrac{|BA|}{|BC|} \Rightarrow \dfrac{d}{c} = \dfrac{|DA|}{b} = \dfrac{c}{a}$

$c^2 = d \cdot a$ .... (1) olur.

$\overset{\frown}{CDA}$ ile $\overset{\frown}{CAB}$ arasında

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{C})$ (ortak açı)

$m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{CAB}) = 90°$ (dik açı) olduğundan $\overset{\frown}{CDA} \sim \overset{\frown}{CAB}$ (A.A.) bulunur. Bu durumda

$\dfrac{|CD|}{|CA|} = \dfrac{|CA|}{|CB|} = \dfrac{|DA|}{|AB|} \Rightarrow \dfrac{e}{b} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{|DA|}{c}$

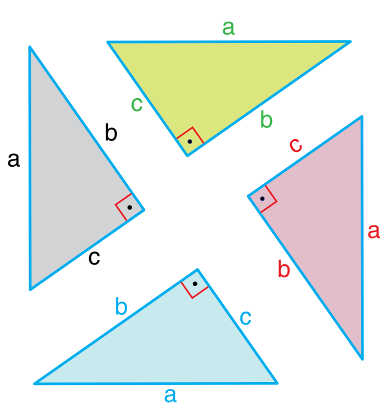
$b^2 = e \cdot a$ .... (2) olur.

1 ve 2 nolu eşitlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{rl} & c^2 = d \cdot a \\ + & b^2 = e \cdot a \\ \hline \end{array}$$

$b^2 + c^2 = a\,(d + e) = a \cdot a = a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$ elde edilir.

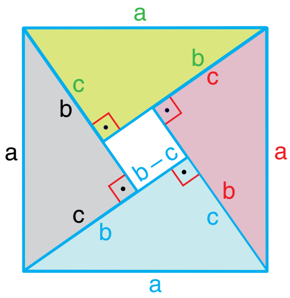
Örnek



Yanda birbirine eş dört tane dik üçgen verilmiştir. Dik üçgenlerin kenar uzunlukları kenarların üzerinde (a br, b br, c br) gösterilmiştir.

Bu üçgenleri aşağıdaki gibi birleştirerek oluşan şekiller yardımıyla dik üçgenin kenar uzunluklarının kareleri arasındaki ilişkiyi gösterelim.

Çözüm



Elde edilen şekil bir karedir. Büyük karenin bir kenar uzunluğu a br ve içteki küçük karenin bir kenar uzunluğu (b – c) br olur.

Büyük karenin alanı birbirine eş 4 tane dik üçgenin alanları ile içteki küçük karenin alanı toplamına eşittir. Şimdi bu ilişkiyi inceleyelim.

Her bir dik üçgenin alanı : $\dfrac{b \cdot c}{2}$ br^2

Büyük karenin alanı : a^2 br^2

Küçük karenin alanı : $(b - c)^2$ $br^2 = (b^2 - 2bc + c^2)$ br^2 olur.

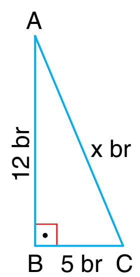
Bu durumda $a^2 = \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{b \cdot c}{\underset{1}{\cancel{2}}} + b^2 - 2bc + c^2$

$a^2 = \cancel{2bc} + b^2 - \cancel{2bc} + c^2$

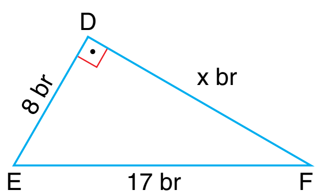
$a^2 = b^2 + c^2$ elde edilir.

Örnek

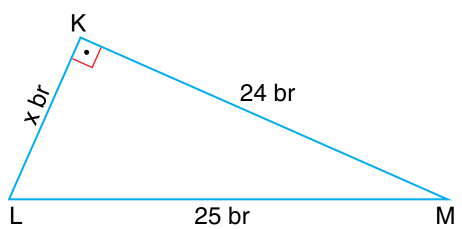
Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre istenenleri bulalım.

a) 

$|AB| = 12$ br
$|BC| = 5$ br
$|AC| = x$ br
$m(\widehat{B}) = 90°$
$x = ?$

b) 

$|DE| = 8$ br
$|EF| = 17$ br
$|DF| = x$ br
$m(\widehat{D}) = 90°$
$x = ?$

c) 

$|KM| = 24$ br
$|LM| = 25$ br
$|KL| = x$ br
$m(\widehat{K}) = 90°$
$x = ?$

Çözüm

Her bir üçgene Pisagor teoremini uygulayalım.

a)
$x^2 = 12^2 + 5^2$
$x^2 = 144 + 25$
$x^2 = 169$
$x = 13$ br

b)
$17^2 = 8^2 + x^2$
$289 = 64 + x^2$
$289 - 64 = x^2$
$225 = x^2$
$x = 15$ br

c)
$25^2 = x^2 + 24^2$
$625 = x^2 + 576$
$625 - 576 = x^2$
$49 = x^2$
$x = 7$ br

Bilgi

$k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere kenar uzunlukları birer tam sayı olan bazı özel üçgenler aşağıdaki gibidir.

3k	4k	5k
3	4	5
6	8	10
9	12	15
...	...	...

5k	12k	13k
5	12	13
10	24	26
15	36	39
...	...	...

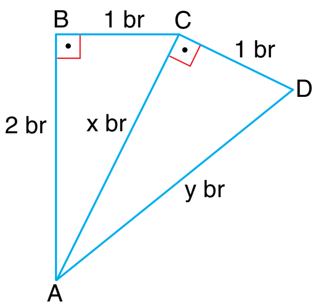
8k	15k	17k
8	15	17
16	30	34
24	45	51
...	...	...

7k	24k	25k
7	24	25
14	48	50
21	72	75
...	...	...

Örnek

Aşağıdaki dik üçgenlerde verilenlere göre istenenleri bulalım.

a)



$|AB| = 2$ br

$|BC| = |CD| = 1$ br

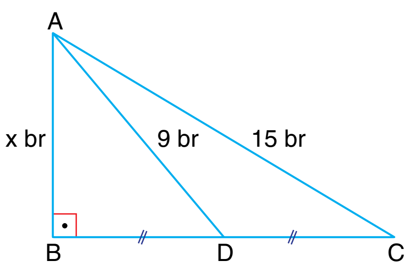
$|AC| = x$ br

$|AD| = y$ br

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 90°$

$\Rightarrow \quad x = ?\ ,\ y = ?$

b)



$|BD| = |DC|$

$|AD| = 9$ br

$|AC| = 15$ br

$m(\widehat{B}) = 90°$

$|AB| = x$ br

$\Rightarrow \quad x = ?$

Çözüm

a) ABC dik üçgeninde

$x^2 = 2^2 + 1$

$x^2 = 4 + 1$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5}$ br

ACD dik üçgeninde

$y^2 = x^2 + 1$

$y^2 = 5 + 1$

$y^2 = 6$

$y = \sqrt{6}$ br olur.

b) $|BD| = |DC| = a$ dersek

ABD dik üçgeninde

$9^2 = x^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + a^2 = 81$

ABC dik üçgeninde

$x^2 + (2a)^2 = 15^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4a^2 = 225$

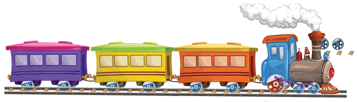
Bu iki denklemi yok etme metoduyla çözelim.

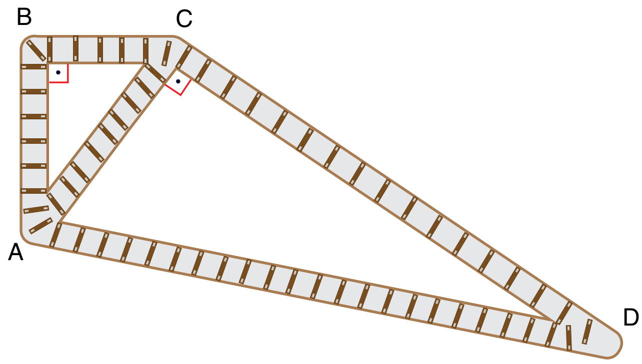
$$\begin{array}{rl} & x^2 + 4a^2 = 225 \\ + & \mp x^2 \mp a^2 = \mp 81 \\ \hline & 3a^2 = 144 \\ & a^2 = 48 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x^2 + 48 = 81 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 33$

$x = \sqrt{33}$ br olur.

Örnek





Ufuk babasının hediye olarak aldığı oyuncak treninin raylarını yandaki gibi kurmuştur. Rayların uzunlukları aşağıda verilmiştir.

$|AB| = 80$ cm,

$|BC| = 60$ cm,

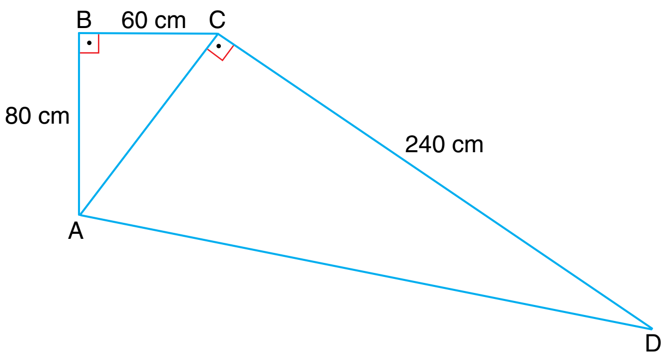
$|CD| = 240$ cm

$[AB] \perp [BC]$ ve

$[AC] \perp [CD]$ olduğuna göre

A ile D arasındaki rayın uzunluğunu bulalım.

Çözüm



Modeli yandaki gibi oluşturalım.

ABC dik üçgeninde

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$|AC|^2 = 80^2 + 60^2 = 6400 + 3600$

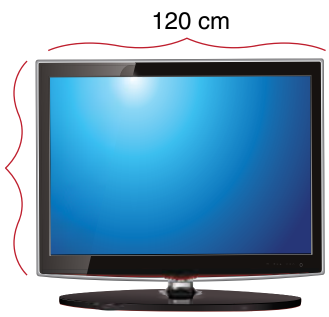
$|AC|^2 = 10000 \quad \Rightarrow \quad |AC| = 100$ cm

ACD dik üçgeninde

$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2$

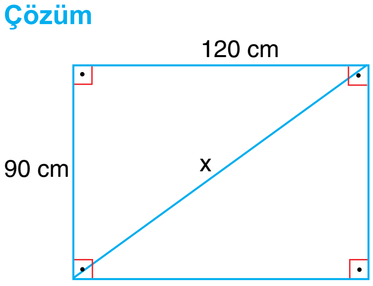
$|AD|^2 = 10000 + 57600 = 67600 \quad \Rightarrow \quad |AD| = 260$ cm olarak elde edilir.

Örnek



Bir televizyonun ekran boyutu köşegen uzunluğu ile ifade edilmektedir. Burak'ın evine aldığı dikdörtgen biçimindeki televizyonun kenar uzunlukları 90 cm, 120 cm olduğuna göre Burak'ın aldığı televizyonun kaç ekran olduğunu bulalım.

Çözüm



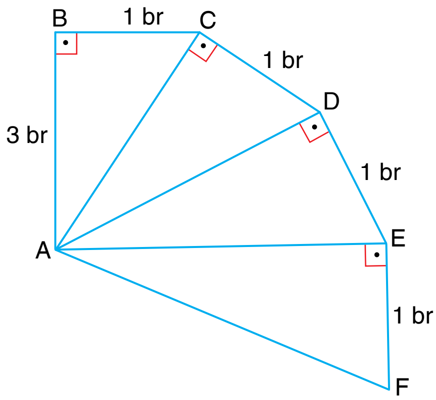
Televizyonu yandaki gibi modelleyelim.

Bu durumda Pisagor teoremi yardımıyla televizyonun ekran boyutu

$x^2 = 90^2 + 120^2 = 8100 + 14400$

$x^2 = 22500 \quad \Rightarrow \quad x = 150$ cm olarak elde edilir.

Örnek



Yandaki şekilde

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = m(\widehat{E}) = 90°$

$|AB| = 3$ br,

$|BC| = |CD| = |DE| = |EF| = 1$ br olduğuna göre

$|AF|$'nu bulalım.

Çözüm

ABC dik üçgeninde

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \Rightarrow 3^2 + 1^2 = |AC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 10$$

ACD dik üçgeninde

$$|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 \Rightarrow 10 + 1^2 = |AD|^2 \Rightarrow |AD|^2 = 11$$

ADE dik üçgeninde

$$|AD|^2 + |DE|^2 = |AE|^2 \Rightarrow 11 + 1 = |AE|^2 \Rightarrow |AE|^2 = 12$$

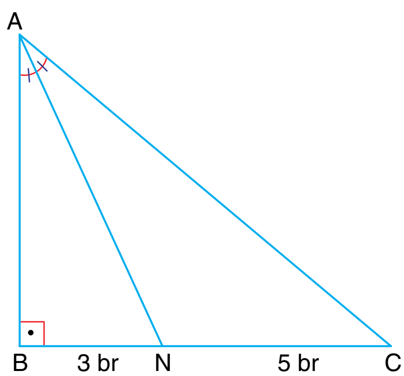
AEF dik üçgeninde

$$|AE|^2 + |EF|^2 = |AF|^2 \Rightarrow |AF|^2 = 12 + 1^2 = 13 \text{ olduğundan}$$

$|AF| = \sqrt{13}$ br olarak elde edilir.

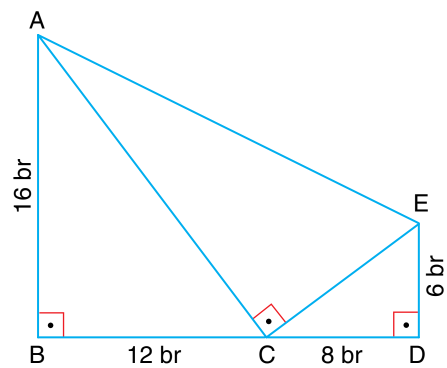
PEKİŞTİRME SORULARI

1.



Yukarıda verilen ABC dik üçgeninde [AN] iç açıortay, $|BN| = 3$ br, $|NC| = 5$ br olduğuna göre $\widehat{ABC}$'nin çevre uzunluğunu bulunuz.

2.



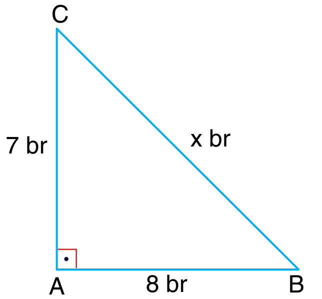
Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = m(\widehat{ACE}) = 90°$

$|AB| = 16$ br, $|BC| = 12$ br, $|CD| = 8$ br ve $|DE| = 6$ br olduğuna göre $|AE|$'nu bulunuz.

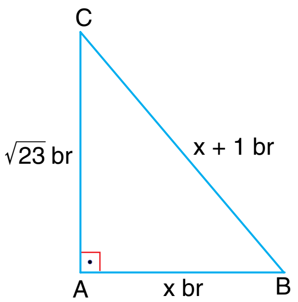
3. Aşağıdaki şekillerde dik açılar ve kenar uzunlukları birim olarak şekillerin üzerinde verilmiştir.

Buna göre istenenleri bulunuz.

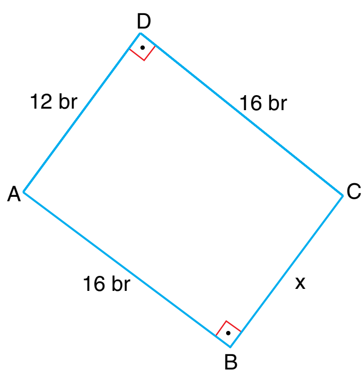
a) $x = ?$



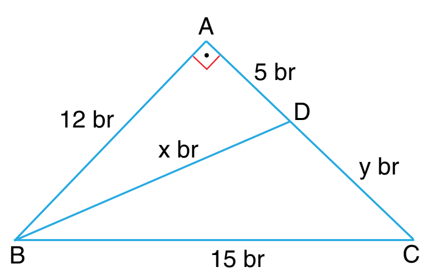
b) $x = ?$



c) $x = ?$

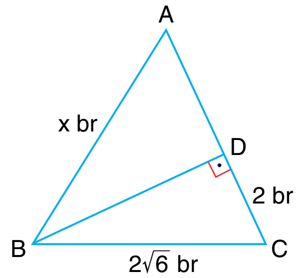


ç)



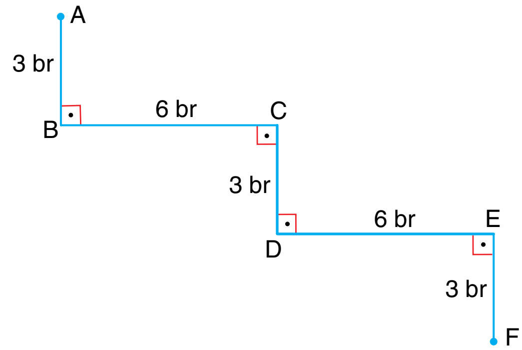
$x + y = ?$

4.



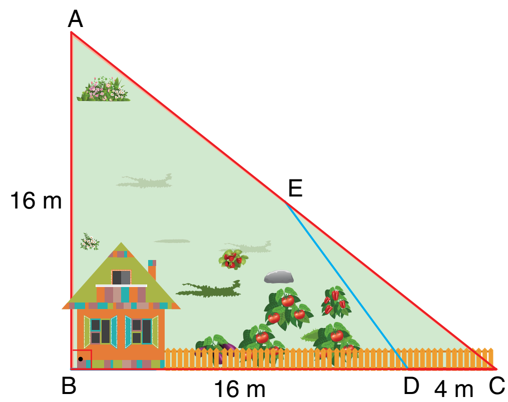
Yandaki şekilde $|AB| = |AC|$, $|BC| = 2\sqrt{6}$ br, $|DC| = 2$ br olduğuna göre $|AB| = x$ değerini bulalım.

5.



Yukarıdaki şekilde
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = m(\widehat{E}) = 90°$
$|AB| = |CD| = |EF| = 3$ br, $|BC| = |DE| = 6$ br olduğuna göre A ile F arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde Pınar Hanım'ın bahçe içindeki evi görülmektedir. $|AB| = 16$ m, $|BD| = 16$ m, $|DC| = 4$ m ve E noktası [AC]'nın orta noktasıdır. Pınar Hanım bahçesini [ED] boyunca ayırıp üçgen biçimindeki kısma sebze ekecektir. [ED] boyunca çit çekmek isteyen Pınar Hanım'ın kaç metre çit çekmesi gerektiğini bulunuz.

4.4.2. Öklid Teoremi

Euclid (Öklid)

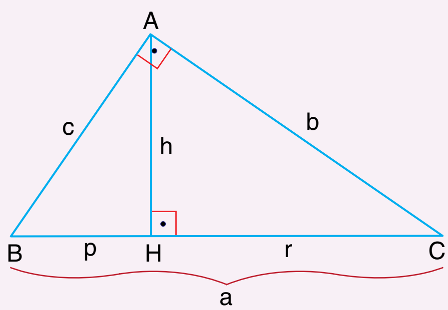
Museum'da ders veren ilk önemli matematikçi Öklid'dir. Öklid'in yazdığı çok sayıda eser arasında en önemlisi, Öklid'in Elementleri olarak bilinen on üç kitaplık matematik dizisidir. O tarihlerdeki kitap uzunlukları bir papirüslüktür. Bu da bizim ölçülerimizle 20 ile 50 sayfa arasında bir kitaba karşılık gelmektedir. Bu kitaplarda Öklid o zamanlarda bilinen matematiğin sistematik bir derlemesini sunar. Bu eserin önemi Öklid'in geometriye yaklaşımında ve konuları sunuşundadır. Öklid, geometride, önce evrensel geçerliliği olan beş aksiyom verir. Bunlar A = B ve B = C ise A = C gibi sağduyunun kabul edeceği kurallardır. Sonra nokta, doğru, düzlem gibi kavramların ne olduğunu belirten 31 tanım verir. Sonra da Öklid geometrisinin aksiyomları olarak bilinen şu beş aksiyomu verir.

Euclid (Öklid)
(MÖ 330 – MÖ 275) (Temsilî)

1) İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2) Bir doğru parçası iki yönde sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
3) Merkezi ve üzerinde bir noktası verilen bir çember çizilebilir.
4) Bütün dik açılar eşittir.
5) Bir doğruya dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilir.

(İkinci Dönem: Eski Yunan Matematiği, Matematik Dünyası)

Bilgi



Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalarla ilgili;

1) $h^2 = p \cdot r$

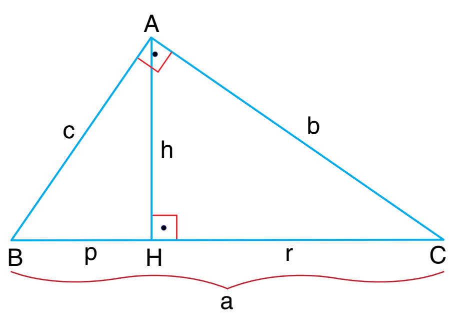
2) $c^2 = p \cdot a$

3) $b^2 = r \cdot a$

4) $h \cdot a = c \cdot b$ eşitlikleri vardır.

Bu eşitliklere **Öklid teoremi** denir.

Örnek



Yanda verilen dik üçgende

$h^2 = p \cdot r$

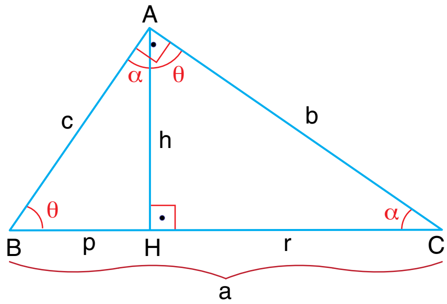
$c^2 = p \cdot a$

$b^2 = r \cdot a$

$a \cdot h = b \cdot c$

eşitliklerinin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm



$m(\widehat{BAH}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CAH}) = \theta$ dersek $\alpha + \theta = 90°$

ve $m(\widehat{HBA}) + m(\widehat{BAH}) = 90°$,

$m(\widehat{HCA}) + m(\widehat{CAH}) = 90°$ olacağından

$m(\widehat{HBA}) = m(\widehat{CAH}) = \theta$,

$m(\widehat{HCA}) = m(\widehat{BAH}) = \alpha$ olur.

Bu durumda

$\widehat{ABC} \sim \widehat{HBA} \sim \widehat{HAC}$ (A.A.) olur.

$\widehat{HBA} \sim \widehat{HAC}$ benzerliğinden

$$\frac{|HB|}{|HA|} = \frac{|HA|}{|HC|} \Rightarrow \frac{p}{h} = \frac{h}{r} \Rightarrow h^2 = p \cdot r$$

$\widehat{ABC} \sim \widehat{HBA}$ benzerliğinden

$$\frac{|AB|}{|HB|} = \frac{|BC|}{|BA|} \Rightarrow \frac{c}{p} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = p \cdot a$$

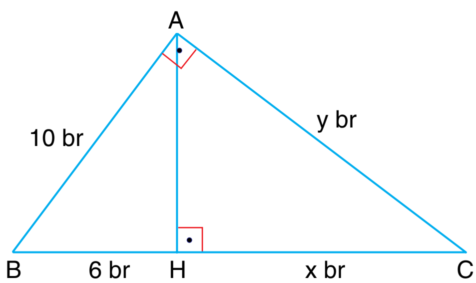
$\widehat{ABC} \sim \widehat{HAC}$ benzerliğinden

$$c \cdot b = h \cdot a$$

$$\frac{|AB|}{|HA|} = \frac{|AC|}{|HC|} = \frac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{b}{r} = \frac{a}{b}$$ biçiminde elde edilir.

$$b^2 = r \cdot a$$

Örnek



Yandaki şekilde

$[AB] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$,

$|AB| = 10$ br, $|BH| = 6$ br, $|HC| = x$ br, $|AC| = y$ br

olduğuna göre x ve y değerlerini bulalım.

Çözüm

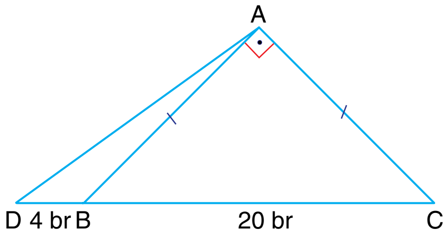
$\widehat{ABC}$'nde Öklid teoremi gereğince

$$10^2 = 6 \cdot (6 + x) \Rightarrow 100 = 36 + 6x \Rightarrow 64 = 6x \Rightarrow x = \frac{\overset{32}{\cancel{64}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{32}{3} \text{ br}$$

$$y^2 = x \cdot (x + 6) \Rightarrow y^2 = \frac{32}{3} \cdot \left(\frac{32}{3} + 6\right) = \frac{32}{3} \cdot \frac{50}{3} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 50}{3^2} = \left(\frac{4 \cdot 10}{3}\right)^2$$

$y = \dfrac{40}{3}$ br olarak bulunur.

Örnek



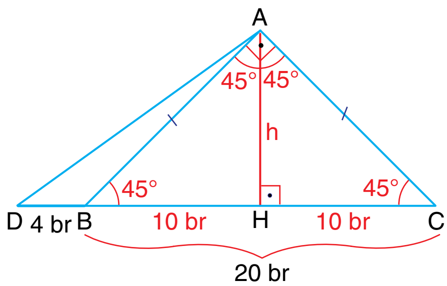
Yandaki şekilde

$[BA] \perp [CA]$, D, B, C doğrusal noktalar

$|AB| = |AC|$, $|DB| = 4$ br, $|BC| = 20$ br

olduğuna göre $|AD|$'nu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$'nde

$|AB| = |AC|$ olduğundan

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 45°$ olur.

Buradan

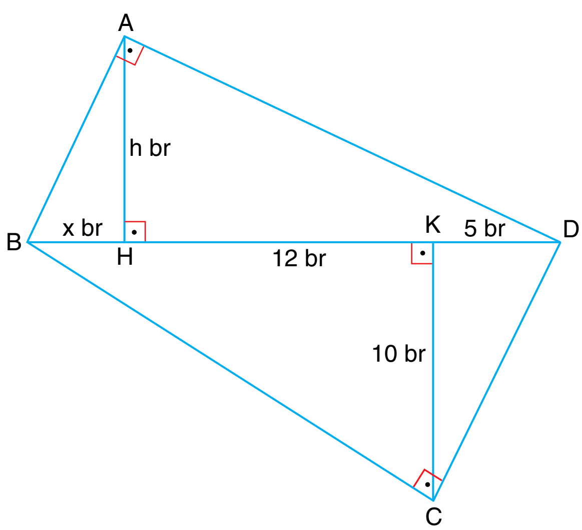
$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{CAH}) = 45°$ ve

$|BH| = |AH| = |HC| = 10$ br bulunur.

ADH dik üçgeninde

$|AD|^2 = |DH|^2 + |AH|^2 \Rightarrow |AD|^2 = 14^2 + 10^2 = 196 + 100 = 296 \Rightarrow |AD| = 2\sqrt{74}$ br bulunur.

Örnek



Şekilde

$[AB] \perp [AD]$,

$[CD] \perp [BC]$,

$[AH] \perp [BD]$,

$[CK] \perp [BD]$,

$|CK] = 10$ br,

$|DK| = 5$ br,

$|KH| = 12$ br,

$|HB| = x$ br, $|AH| = h$ br olduğuna göre

x ve h değerlerini bulalım.

Çözüm

BCD dik üçgeninde Öklid teoremi gereğince,

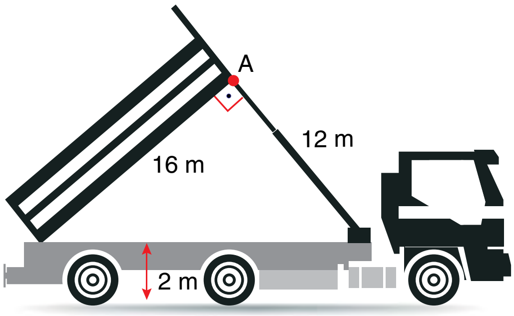
$|CK|^2 = |DK| \cdot |KB| \Rightarrow 10^2 = 5 \cdot (12 + x) \Rightarrow 20 = 12 + x \Rightarrow x = 8$ br

ABD dik üçgeninde Öklid teoremi gereğince,

$|AH|^2 = |BH| \cdot |HD| \Rightarrow h^2 = 8 \cdot 17$

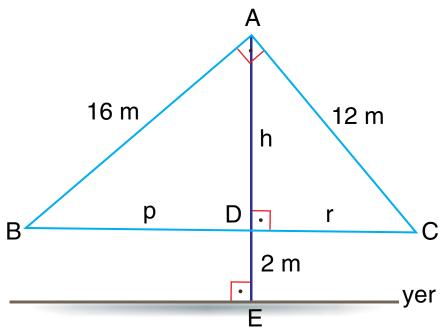
$h = 2\sqrt{34}$ br elde edilir.

Örnek



İş insanı Ali Bey bir okula spor salonu yaptırmak istemektedir. Yandaki yardım kamyonunda römorkun uzunluğu 16 m, römorkun tabanının yerden yüksekliği 2 m, kaldıracın uzunluğu 12 m olduğuna göre A noktasının yerden kaç metre yükseklikte olduğunu bulalım.

Çözüm



Römork, tabanı ve kaldıracı yandaki gibi modelleyelim.

Bu durumda ABC dik üçgen

[AD], [BC]'na ait yükseklik olur.

Buna göre |AE|'nu bulmalıyız.

Pisagor bağıntısından

$|BC|^2 = 16^2 + 12^2$

$= 256 + 144 = 400 \Rightarrow |BC| = 20$ m olur.

Öklid teoremi yardımıyla

$h \cdot |BC| = |AB| \cdot |AC|$

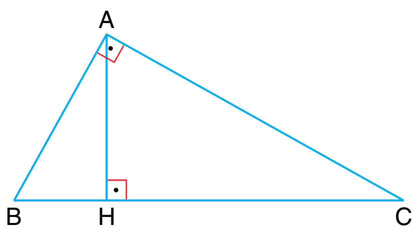
$h \cdot 20 = 16 \cdot 12$

$h = \dfrac{48}{5}$ m olur.

Buradan $|AE| = |AD| + |DE| = \dfrac{48}{5} + 2 = \dfrac{58}{5}$ m elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

1.



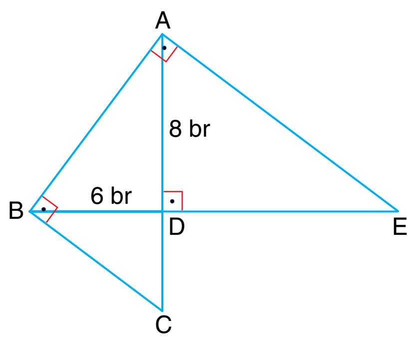
Yukarıda verilen şekilde

$[AB] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$

$\dfrac{|BH|}{|HC|} = \dfrac{4}{9}$ olduğuna göre

$\dfrac{|AC|}{|AB|}$ oranını bulunuz.

2.

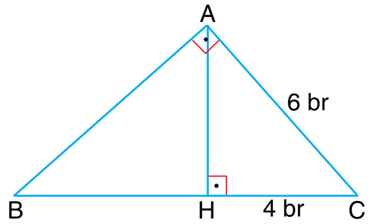


Yukarıdaki şekilde $[AD] \perp [BE]$, $[AB] \perp [BC]$

$[AB] \perp [AE]$, $|AD| = 8$ br, $|BD| = 6$ br

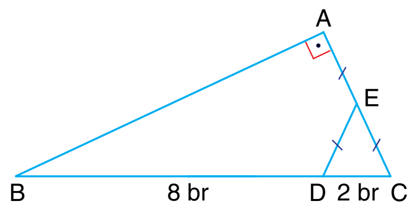
olduğuna göre |DC| ve |AE|'nu bulunuz.

3.



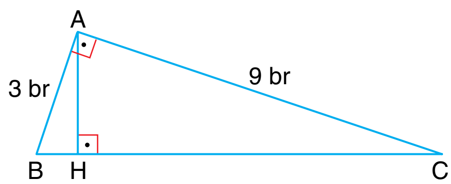
Yukarıda verilen şekilde [AB] ⊥ [AC], [AH] ⊥ [BC], |HC| = 4 br, |AC| = 6 br olduğuna göre |AB|'nu bulunuz.

4.



Yukarıdaki şekilde [AB] ⊥ [AC], |AE| = |EC| = |ED|, |BD| = 8 br, |DE| = 2 br olduğuna göre |AB|'nu bulunuz.

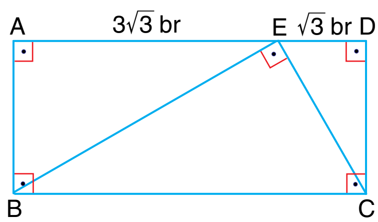
5.



Yukarıdaki şekilde [AB] ⊥ [AC], [AH] ⊥ [BC] |AB| = 3 br, |AC| = 9 br

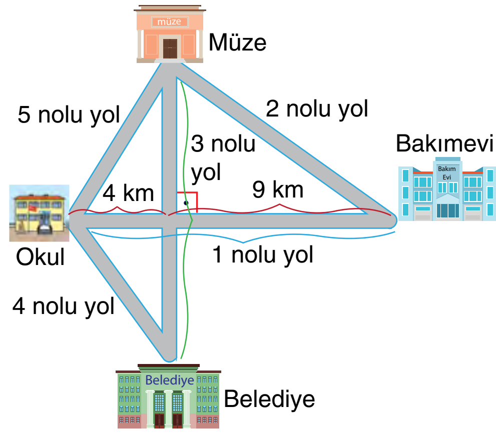
olduğuna göre $\frac{|HC|}{|HB|}$ oranını bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde ABCD dikdörtgen [BE] ⊥ [CE], |AE| = $3\sqrt{3}$ br, |ED| = $\sqrt{3}$ br olduğuna göre |AB|'nu bulunuz.

7.

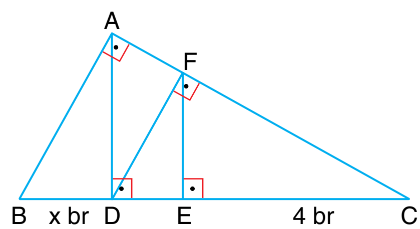


Erol Bey öğrencileriyle okulda toplanıp önce yaşlılar bakımevini, ardından müzeyi daha sonra da ilçe belediye binasını ziyaret edip tekrar okula döneceklerdir. Bu gezi için okul servisi ayarlanmıştır.

Yukarıdaki krokide okul, bakımevi, müze ve belediye binası görülmektedir. Servis güzergâhındaki yollar numaralandırılmıştır. Servisle 1 ⟶ 2 ⟶ 3 ⟶ 4 yollarını takip ederek ziyaretleri gerçekleştireceklerdir. Krokide 1 ve 3 numaralı yollar, 2 ve 5 numaralı yollar ile 4 ve 5 numaralı yollar birbirini dik kesmektedir.

Krokide verilen uzunluklara göre Erol Bey ve öğrencilerinin toplam kaç km yol katettiklerini bulunuz.

8.



Yukarıdaki şekilde

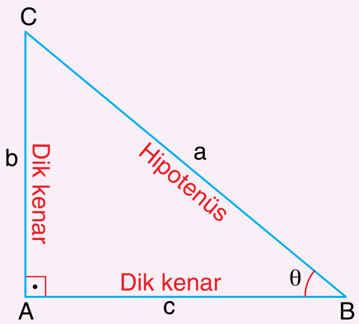
[AD] ⊥ [BC], [FE] ⊥ [BC],

[AB] ⊥ [AC], [DF] ⊥ [AC],

|EC| = 4 br, |CF| = 4|AF| ve |BD| = x br olduğuna göre x değerini bulunuz.

4.4.3. Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

Bilgi



Şekilde ABC dik üçgen, $m(\widehat{ABC}) = \theta$ (θ dar açı).

θ açısı için

[AB] ⟶ komşu dik kenar

[AC] ⟶ karşı dik kenar

[BC] ⟶ hipotenüs olmak üzere

1) Sinüsü, $\sin\theta$ olarak gösterilir ve

$$\sin\theta = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{b}{a}$$

2) Kosinüsü, $\cos\theta$ olarak gösterilir ve

$$\cos\theta = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

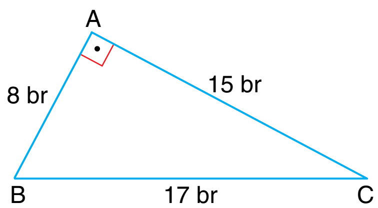
3) Tanjantı, $\tan\theta$ olarak gösterilir ve

$$\tan\theta = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

4) Kotanjantı, $\cot\theta$ olarak gösterilir ve

$$\cot\theta = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$ biçiminde ilişkilendirilir.

Örnek



Yanda verilen ABC dik üçgeninde

$|AB| = 8$ br, $|AC| = 15$ br, $|BC| = 17$ br

olduğuna göre $\widehat{B}$'nın trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm:

$\widehat{B}$ sı için

$$\sin\widehat{B} = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{15}{17}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{8}{17}$$

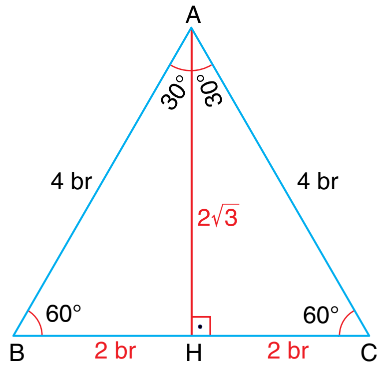
$$\tan\widehat{B} = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{15}{8}$$

$$\cot\widehat{B} = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{8}{15}$$ elde edilir.

Örnek

Bir kenar uzunluğu 4 br olan bir eşkenar üçgen çizip 30° ve 60°lik açıların trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm



|AB| = |BC| = |AC| = 4 br olacak biçimde eşkenar üçgeni çizelim. A köşesine ait açıortayı çizersek şekilde görüldüğü gibi $[AH] \perp [BC]$ ve |BH| = |HC| = 2 br olur.

AHC dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa

$|AC|^2 = |AH|^2 + |HC|^2$

$4^2 = |AH|^2 + 2^2 \Rightarrow |AH| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ br bulunur.

Şimdi de 30° ve 60°lik açıların trigonometrik oranlarını bulalım.

AHC dik üçgeninde

$$\sin 60° = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin 30° = \frac{|HC|}{|AC|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{|HC|}{|AC|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

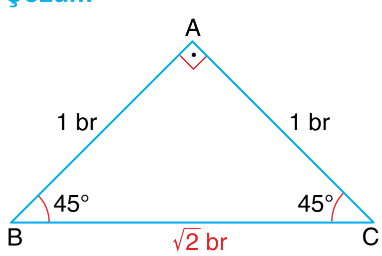
$$\tan 60° = \frac{|AH|}{|HC|} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \qquad \tan 30° = \frac{|HC|}{|AH|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 60° = \frac{|HC|}{|AH|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{|AH|}{|HC|} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$ bulunur.

Örnek

|AB| = |AC| = 1 br olacak biçimde ABC ikizkenar dik üçgenini çizip 45°lik açının trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm



Pisagor teoreminden

$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

$|BC|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$|BC| = \sqrt{2}$ br olur.

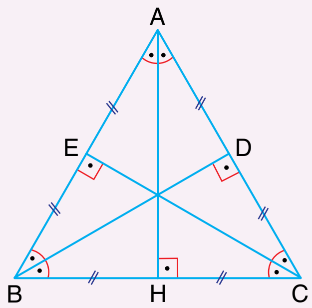
$m(\widehat{B}) = 45°$ için;

$$\sin \widehat{B} = \sin 45° = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan \widehat{B} = \tan 45° = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos \widehat{B} = \cos 45° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cot \widehat{B} = \cot 45° = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{1} = 1$$ bulunur.

Bilgi

1)

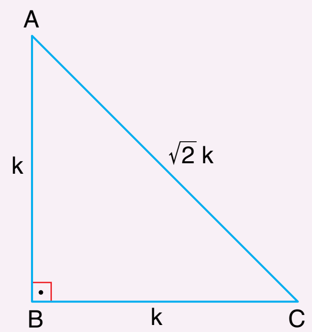


Eşkenar üçgende herhangi bir köşeden çizilen yükseklik hem açıortay hem de kenarortaydır.

ABC eşkenar üçgeninde [AH], [BD] ve [CE] hem yükseklik hem açıortay hem de kenarortaydır.

$|AH| = |BD| = |CE|$

2)

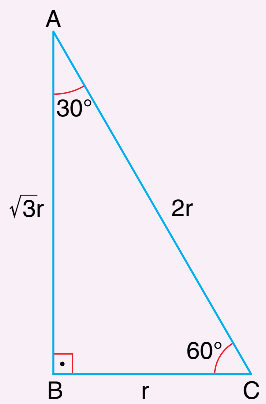


İkizkenar dik (45° – 45° – 90°) üçgende hipotenüsün uzunluğu dik kenarların uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır.

ABC ikizkenar dik üçgeninde

$|AB| = |BC| = k$ br $\Rightarrow |AC| = \sqrt{2}\,k$ br olur.

3)



İç açı ölçüleri 30° – 60° – 90° olan dik üçgende hipotenüsün uzunluğu 30°lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun 2 katına eşit, 60°lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katına eşittir.

ABC üçgeninde $|BC| = r$ br $\Rightarrow$ $|AC| = 2r$ br, $|AB| = \sqrt{3}\,r$ br olur.

4) Tümler açılardan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir.

$a + b = 90° \Rightarrow \sin a = \cos b,\ \sin b = \cos a,\ \tan a = \cot b,\ \tan b = \cot a$ olur.

Örnek

Bir ABC dik üçgeninde $m(\widehat{B}) = 90°$ ve $\tan \widehat{A} = \dfrac{5}{9}$ olduğuna göre $\cot \widehat{C}$ değerini bulalım.

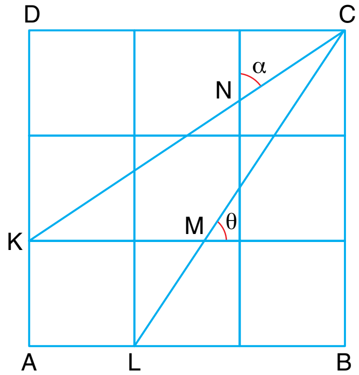
Çözüm

ABC dik üçgen ve $m(\widehat{B}) = 90°$ olduğundan $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 90°$ olur.

A ve C açıları tümler açılar olduğundan birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir.

Bu durumda $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 90° \Rightarrow \tan \widehat{A} = \cot \widehat{C} = \dfrac{5}{9}$ olarak bulunur.

Örnek

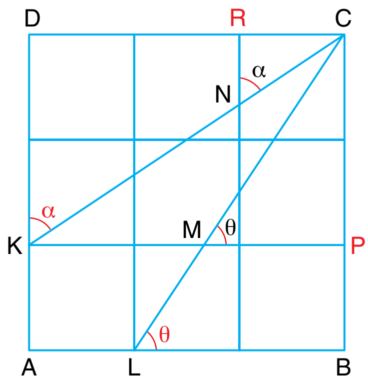


Yandaki şekil birbirine eş 9 birimkareden oluşmuştur.

C, N, K ve C, M, L doğrusal noktalar, L ∈ [AB]

Buna göre $\tan\theta + \cot\alpha$ toplamını bulalım.

Çözüm



Şekli incelediğimizde

$$\left.\begin{aligned} m(\widehat{CMP}) &= m(\widehat{CLB}) = \theta \\ m(\widehat{RNC}) &= m(\widehat{DKC}) = \alpha \end{aligned}\right\}$$ (Yöndeş açılar) olur.

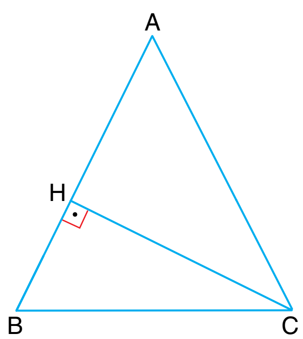
Bu durumda

KDC dik üçgeninde $\cot\alpha = \dfrac{2}{3}$ ve

CLB dik üçgeninde $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$ olacağından

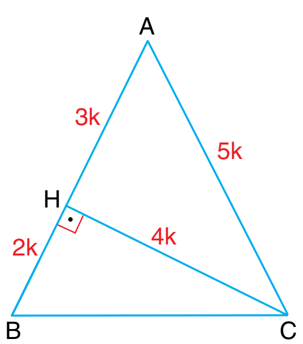
$\tan\theta + \cot\alpha = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{13}{6}$ elde edilir.

Örnek



Şekilde $|AB| = |AC|$, $[CH] \perp [AB]$ ve $\tan\widehat{A} = \dfrac{4}{3}$ olduğuna göre $\cot\widehat{B}$ değerini bulalım.

Çözüm



AHC dik üçgeninde $\tan\widehat{A} = \dfrac{|HC|}{|HA|} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow |HC| = 4k$ br,

$|HA| = 3k$ br ($k \in \mathbb{R}^+$) olur.

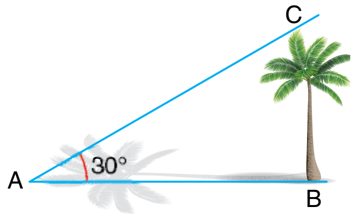
3k – 4k – 5k özel dik üçgeninden $|AC| = |AB| = 5k$ br ve

$|BH| = 2k$ br bulunur.

Buradan

$\cot\widehat{B} = \dfrac{|BH|}{|HC|} = \dfrac{2k}{4k} = \dfrac{1}{2}$ elde edilir.

Örnek



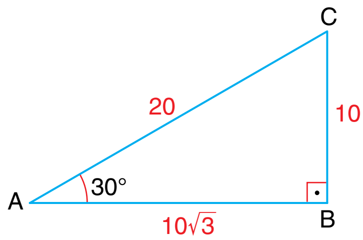
Yandaki şekilde A noktasında zeminle dik duran bir ağacın gölgesinin bitiş noktası ağacın tepe noktası ile 30°lik açı yapmaktadır. Gölgenin bitiş noktasının ağacın tepesine uzaklığı 20 metre olduğuna göre ağacın yüksekliği ile ağacın gölgesinin bitiş noktasının ağaca olan uzaklığını bulalım.

Çözüm

Şekli yandaki gibi modelleyelim.

Bu durumda |BC| = 10 m, |BA| = $10\sqrt{3}$ m

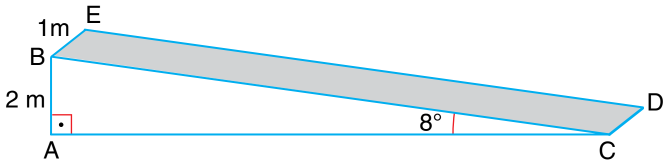
(30° – 60° – 90° dik üçgeni) elde edilir.



Örnek

Bir okul aile birliği yönetimi öğrencilerini düşünerek okulun giriş medivenlerinin yanına engelli merdiveni yaptırmaya karar vermiştir. Merdivenin yüksekliği 2 metre ve rampa zeminle 8°lik açı yapmaktadır. Okul aile birliği rampada kaymaları önlemek için rampayı halıfleks ile kaplamak istemektedir. Rampanın genişliği 1 metre olduğuna göre rampa için kaç m^2 halıfleks kullanılacağını bulalım.

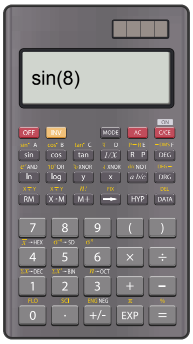
Çözüm

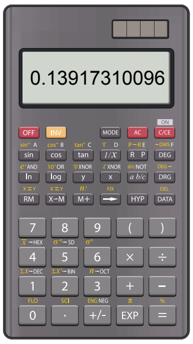


Rampayı yandaki gibi modelleyelim.

Bu durumda rampanın uzunluğu |BC| olur.

ABC dik üçgeninde $\sin 8° = \dfrac{|AB|}{|BC|} \Rightarrow |BC| = \dfrac{2}{\sin 8°}$





$\sin 8° \approx 0{,}14$ alınırsa $|BC| = \dfrac{2}{0{,}14} \approx 14{,}29\,\text{m}$ elde edilir.

Halıfleks kaplanacak kısım dikdörtgen biçiminde olduğundan toplam : $14{,}29 \cdot 1 = 14{,}29$ m^2 halıfleks kullanılacaktır.

Örnek

Dinamik matematik yazılımı yardımıyla dik üçgenin kenarlarının belli oranlarda büyütüldüğünde veya küçültüldüğünde dar açıların trigonometrik oranlarının değişimini inceleyelim.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımında grafik penceresini açalım. Araç çubuğunda 5. kutuya tıklayarak "Çokgen" seçeneği yardımıyla ABC dik üçgenini oluşturalım.

Ekranın sol altındaki giriş kısmına

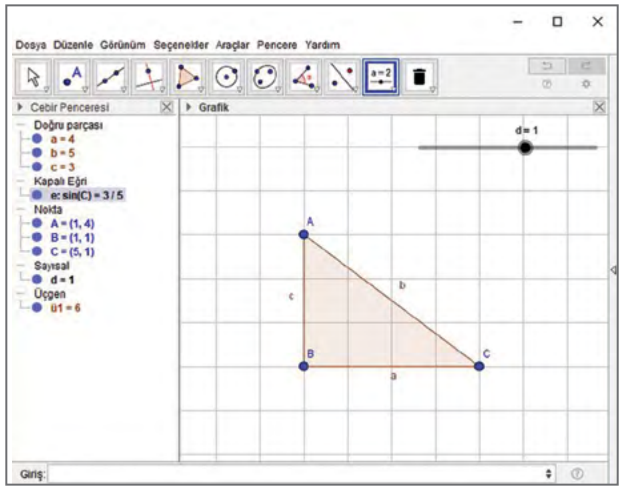
$\sin(C) = \dfrac{c}{b}$ yazıp enter tuşuna basarak sinC değerini bulalım.

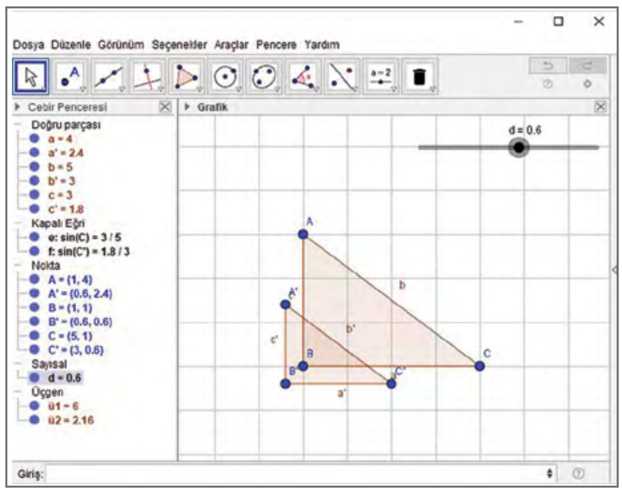
Araç çubuğunda 10. kutuya tıklayıp "Sürgü" seçeneği yardımıyla d sürgüsünü oluşturalım.

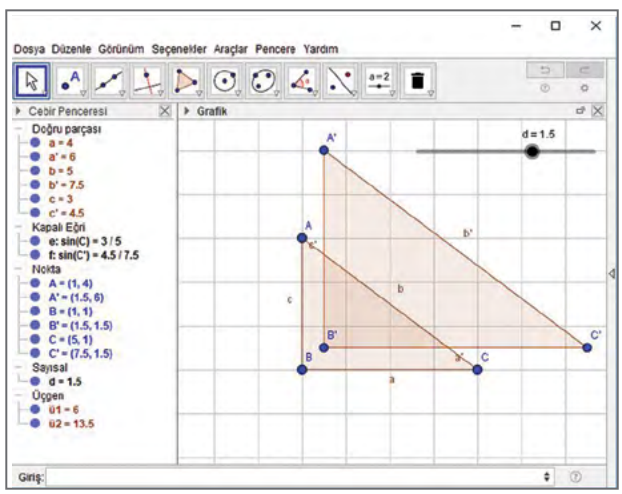
Ekranın sol altındaki giriş kısmına "Genişlet" (çokgen (A, B, C), (d)) yazıp enter tuşuna basalım.

Tekrar giriş kısmına $\sin(C') = \dfrac{c'}{b'}$ yazıp enter tuşuna basalım.

En sonunda sürgüyü sağa sola kaydırarak üçgeni küçültüp büyültelim.



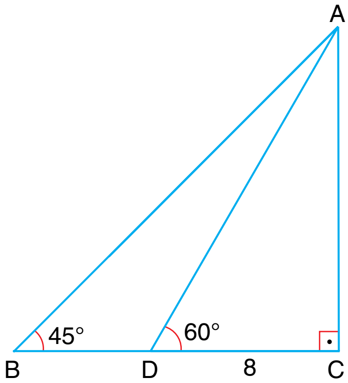




Bir dik üçgenin kenarları aynı oranda büyültülüp küçültüldüğünde elde edilen üçgenlerdeki dar açıların trigonometrik oranları hakkında neler söyleyebilirsiniz?

PEKİŞTİRME SORULARI

1.

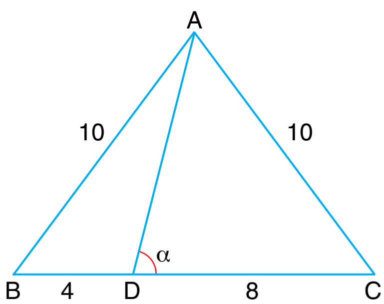


Şekilde m($\widehat{ABC}$) = 45°, m($\widehat{ADC}$) = 60° ve |DC| = 8 br olduğuna göre |BD|'nu bulunuz.

2. $\dfrac{\sin 30° + \cos 30°}{\tan 60° + \cot 60°}$

ifadesinin değerini bulunuz.

3.

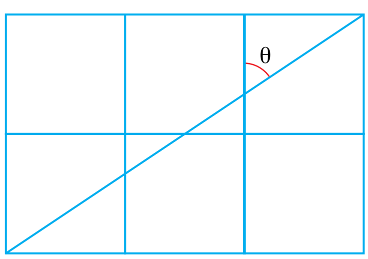


Yukarıdaki şekilde |AB| = |AC| = 10 br

|BD| = 4 br, |DC| = 8 br olduğuna göre

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ değerini bulunuz.

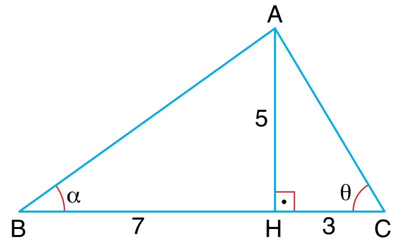
4.



Yukarıdaki şekil 6 eş kareden oluşmuştur.

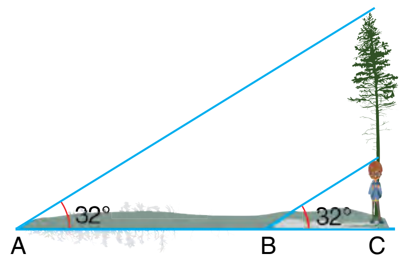
Buna göre $\tan\theta + \cot\theta$ değerini bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde [AH] ⊥ [BC], |BH| = 7 br, |HC| = 3 br, |AH| = 5 br olduğuna göre $\sin\theta$, $\tan\alpha$, $\cot\theta$ ve $\cos\alpha$ değerlerini bulunuz.

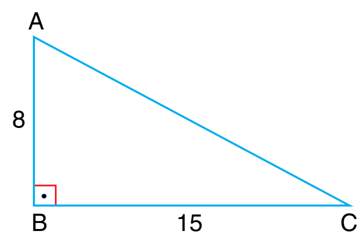
6.



Zemine dik olan ağaca yaslanan Murat'ın boyunun uzunluğu 180 cm, ağacın boyunun uzunluğu 7 m'dir.

Buna göre Güneş ışınlarının 32°lik bir açıyla geldiği bir saatte ağaç ve Murat'ın gölgelerinin bitiş noktaları arasındaki farkı (|AB|) bulunuz. (32°lik açının tanjant değerini hesap makinesi kullanarak bulunuz.)

7.



Yukarıdaki şekilde [AB] ⊥ [BC], |AB| = 8 br, |BC| = 15 br olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $\sin\widehat{C} = \dfrac{8}{17}$

B) $\cos\widehat{C} = \dfrac{15}{17}$

C) $\tan\widehat{C} = \dfrac{8}{15}$

D) $\cot\widehat{A} = \dfrac{8}{15}$

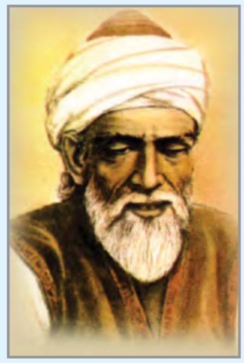
E) $\sin\widehat{C} + \cos\widehat{C} = 1$

4.4.4. Birim Çember Üzerinde Trigonometrik Oranlar

Ebu'l Vefa el – Buzcani

Ebu'l Vefa 10 Haziran 940 tarihinde İran, Buzgan'da doğmuştur. Tam adı Ebu el-Vefa Muhammed bin Yahya bin İsmail bin el-Abbas el Büzcani'dir.

Ebu'l Vefa, matematik ve astronomideki hizmetleriyle ilim tarihinde unutulmazlar arasında yerini almıştır. Onu, gerek klasik ve gerekse modern matematik konularında gördüğümüz birçok trigonometrik kavram, tarif, teorem ve formülleri ilk defa ortaya koyan bir Müslüman bilgin olarak tanıyoruz. Yazdığı eserler, yüzyıllarca hem İslam dünyasında, hem de Avrupa'da kaynak kitaplar olarak kabul edilmiştir.



Ebu'l Vefa
940 – ? (Temsilî)

Ebu'l Vefa matematik ve özellikle trigonometri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Trigonometrinin altı esas oranı arasındaki trigonometrik ilişkileri ilk defa ortaya koymuştur. Bu oranlar günümüzde aynen kulanılmaktadır.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Gıyaseddin Cemşid el-Kaşi

Giyaseddin Cemşid, 14. yüzyılın son yarısında Keşan'da doğmuş, yaptığı çalışmalar ve araştırmalarla tanınan astronom ve matematikçidir. Doğum ve ölüm tarihi kesin olarak bilinmemekle beraber öğrenimini Keşan'da tamamladığı söylenmektedir. Matematik tarihinde ondalık sistemin kaşifi olarak geçer. Yüksek dereceden sayısal denklemlerin yaklaşık çözümlerine ilişkin bulduğu yöntemlerle de dikkat çeken Cemşid, aynı zamanda hekim, matematikçi ve gök bilimcidir. Yapmış olduğu gözlemlere dayanarak yazdığı "Khagani Zici" adlı eseri Doğu ve Batı dünyasında birkaç yüzyıl boyunca kullanılmıştır.

Gıyaseddin Cemşid (Temsilî)

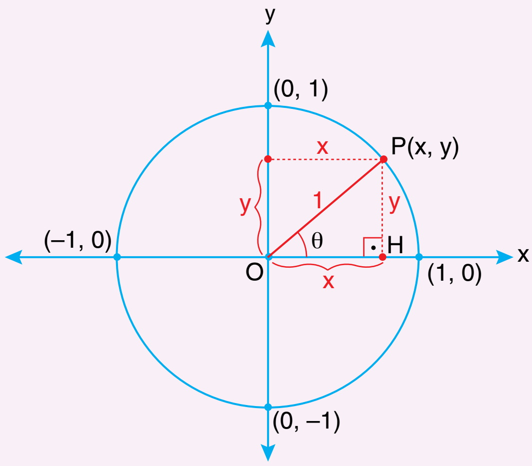
Gıyaseddin Cemşid el–Kaşi'nin en önemli eseri, Ortaçağ İslâm Dünyası'ndaki matematik bilgisini bütün yönleriyle sergilediği "Matematiğin Anahtarı" adlı kitabıdır; bu eserinin bir bölümünde ondalık kesirleri kuramsal yönden incelemiş ve kesirlerle toplama, çıkarma, çapma ve bölme gibi aritmetiksel işlemlerin nasıl yapılacağını örnekleriyle göstermiştir. Burada vermiş olduğu bilgiler daha sonra 16. yüzyılın Osmanlı ünlü matematikçilerinden ve astronomlarından Takiyuddin tarafından kullanılacak, trigonometri ve astronomiye uygulanarak geliştirilecektir.

Giyaseddin Cemşid yüksek dereceden sayısal denklemlerin yaklaşık çözümlerine ilişkin bulduğu yöntemlerle de ünlüdür. 1 derecenin sinüsünü 18 ondalığa kadar, pi sayısını da 12 ondalığa kadar doğru olarak bulmuştur. Astronomi ve matematiğe ait çok sayıda eseri vardır. En önemli eseri "Risalet'ül Muhitiyye ve Miftah-ül Hitap"tır. Bu eserlerinden bazıları İstanbul, Ayasofya ve Nuruosmaniye Kütüphanelerindedir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Bilgi

Merkezi orijinde (O(0, 0) noktası) ve yarıçapı r = 1 birim olan çembere **birim çember** denir.



Birim çember üzerinde alınan bir P(x, y) noktasını orijinle birleştirelim. Yanda oluşan OHP dik üçgeninde $m(\widehat{POH}) = \theta$ olmak üzere

$$\sin\theta = \frac{|PH|}{|OP|} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{|OH|}{|OP|} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\theta = \frac{|PH|}{|OH|} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{|OH|}{|PH|} = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ eşitlikleri elde edilir.

P noktasının apsisi θ açısının kosinüs değerine ordinatı da θ açısının sinüs değerine eşittir.

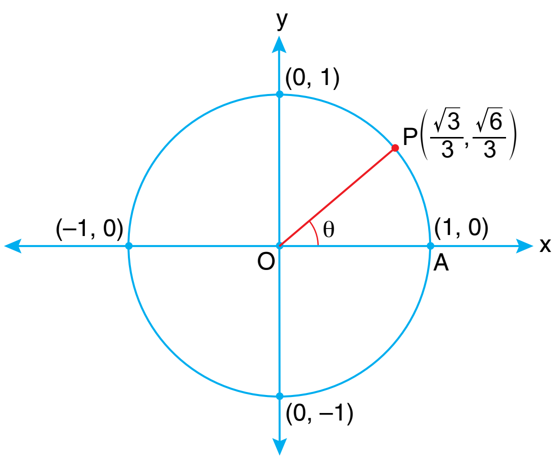
OHP dik üçgeninde

$x^2 + y^2 = 1$ ifadesinde $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ değerlerini yerine yazarsak

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ elde edilir.

$x^2 + y^2 = 1$ ifadesine **birim çemberin denklemi** denir.

Örnek



Şekilde, [OP] birim çemberi $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ noktasında kesmektedir.

$m(\widehat{POA}) = \theta$ olmak üzere θ açısının trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm

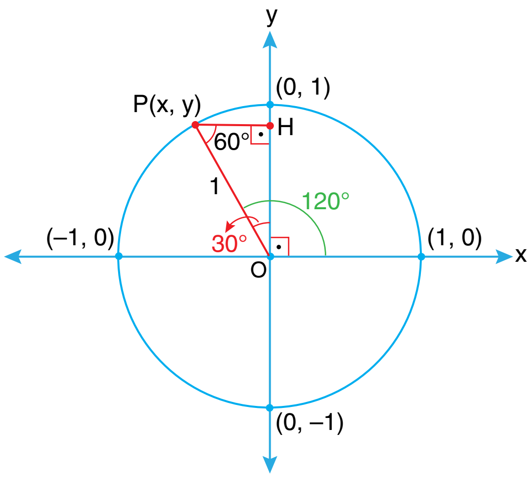
P noktası birim çember üzerindedir. Bu yüzden P noktasının apsisi θ açısının kosinüsü, ordinatı da sinüsü olacağından

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ elde edilir.

Örnek

120°lik açının trigonometrik oranlarını birim çember yardımıyla bulalım.

Çözüm



Verilen açıyı birim çember üzerinde gösterelim.

Şekilde OHP dik üçgen (30°– 60° – 90° dik üçgeni) olduğundan

$|OP| = 1$ br,

$|PH| = \frac{1}{2}$ br,

$|OH| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ br olur.

Bu durumda $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olacağından

$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$\tan 120° = \frac{\sin 120°}{\cos 120°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$,

$\cot 120° = \frac{\cos 120°}{\sin 120°} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ olur.

Daha önce $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\tan 60° = \sqrt{3}$, $\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ olduğunu görmüştük.

Buradan $\sin 120° = \sin 60°$,

$\cos 120° = -\cos 60°$,

$\tan 120° = -\tan 60°$,

$\cot 120° = -\cot 60°$ bulunur.

Bilgi

θ dar açı ve $\theta + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \theta$

(θ ile α bütünler açılar) olmak üzere

$\sin \alpha = \sin (180° - \theta) = \sin \theta$, $\cos \alpha = \cos (180° - \theta) = -\cos \theta$

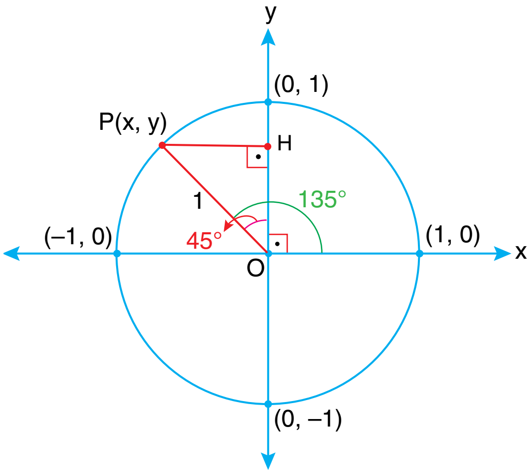
$\tan \alpha = \tan (180° - \theta) = -\tan \theta$, $\cot \alpha = \cot (180° - \theta) = -\cot \theta$ olur.

Geniş açıların sinüsleri pozitif; kosinüs, tanjant ve kotanjantları negatif gerçek sayıdır.

Örnek

Ölçüsü 135° olan açının trigonometrik oranlarını birim çember yardımıyla bulalım.

Çözüm



Şekilde OHP dik üçgen (45° – 45° – 90° dik üçgeni) olduğundan

|OP| = 1 br,

$|PH| = |OH| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ br olur.

Bu durumda

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olacağından

$\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 135° = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$, $\cot 135° = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$ bulunur .

PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\sin 140° = \sin 40°$

II. $\sin 150° = \cos 30°$

III. $\tan 80° = -\tan 100°$

IV. $\cot 110° = -\cot 70°$

V. $\cos 40° = \cos 60°$

VI. $\cos 150° = \cos 30°$

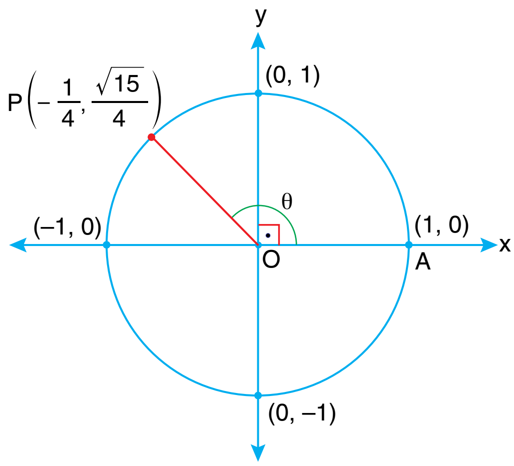
VII. $\tan 100° = -\cot 70°$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. $\dfrac{\sin 137° \cdot \cos 141°}{\sin 43° \cdot \cos 39°}$

ifadesinin değerini bulunuz.

3.



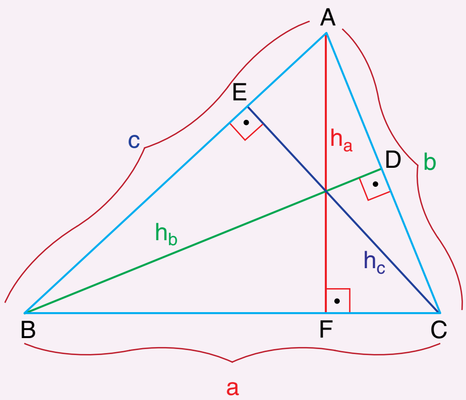
Şekilde [OP] birim çemberi $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ noktasında kesiyor.

$m(\widehat{AOP}) = \theta$ olduğuna göre θ açısının trigonometrik oranlarını bulunuz.

4.5. ÜÇGENİN ALANI

4.5.1. Üçgenin Alanı İle İlgili Problemler

Bilgi



Bir üçgenin alanı, herhangi bir kenarının uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.

Yanda verilen üçgende

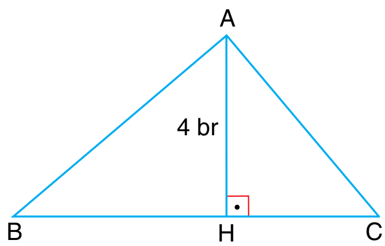
[CE] ⊥ [AB], [BD] ⊥ [AC], [AF] ⊥ [BC]

|AB| = c br, |BC| = a br, |AC| = b br olmak üzere

$$A(\overset{\frown}{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

biçiminde hesaplanır.

Örnek



Yanda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde

[AH] ⊥ [BC]

|AH| = 4 br,

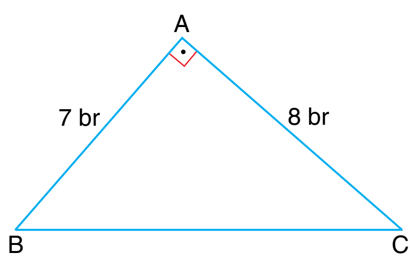
|BC| = 8 br olduğuna göre üçgenin alanını bulalım.

Çözüm

[AH], [BC] kenarına ait yükseklik olduğundan

$$A(\overset{\frown}{ABC}) = \frac{|BC| \cdot |AH|}{2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 8}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 16 \text{ br}^2$$ elde edilir.

Örnek



Yanda verilen ABC dik üçgeninde

[AB] ⊥ [AC],

|AB| = 7 br,

|AC| = 8 br olduğuna göre

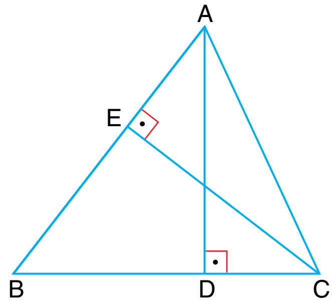
$A(\overset{\frown}{ABC})$ değerini bulalım.

Çözüm

Dik üçgende dik kenarlar birbirlerine ait yükseklik olduğundan

$$A(\overset{\frown}{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \frac{7 \cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 28 \text{ br}^2$$ elde edilir.

Örnek



Yanda verilen üçgende

$[CE] \perp [AB]$, $[BC] \perp [AD]$,

$|CE| = 9$ br, $|AD| = 8$ br, $|BC| = 10$ br

olduğuna göre $|AB|$'nu bulalım.

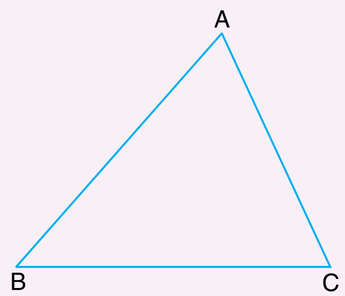
Çözüm

Bir üçgenin alanı, bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğinin çarpımının yarısına eşit olacağından

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{|AB| \cdot |CE|}{2}$$

$$\frac{10 \cdot 8}{\cancel{2}} = \frac{|AB| \cdot 9}{\cancel{2}} \Rightarrow |AB| = \frac{80}{9} \text{ br olur.}$$

Bilgi



Bir üçgenin alanı iki kenar uzunluğu ile bu kenarlar arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısına eşittir.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \widehat{A}}{2}$$

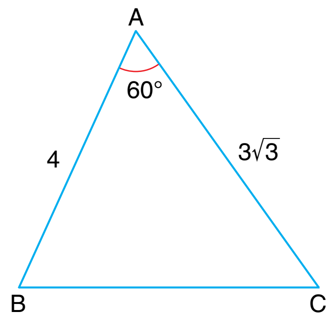
$$= \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot \sin \widehat{B}}{2}$$

$$= \frac{|AC| \cdot |CB| \cdot \sin \widehat{C}}{2} \text{ olur.}$$

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$'nde $m(\widehat{A}) = 60°$, $|AB| = 4$ br, $|AC| = 3\sqrt{3}$ br olduğuna göre üçgenin alanını bulalım.

Çözüm



Üçgeni yandaki gibi modelleyelim.

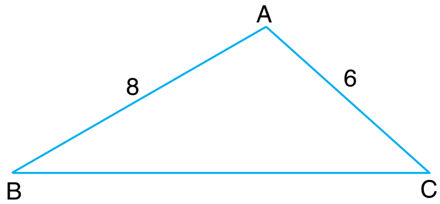
Üçgenin alanı, iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısı olduğundan

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin 60°}{2}$$

$$= \frac{\cancel{4} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\cancel{2}}$$

$= 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$ br^2 olarak elde edilir.

Örnek



Yanda verilen $\widehat{ABC}$'nde $\widehat{A}$ geniş açıdır.

$|AB| = 8$ br ve

$A(\widehat{ABC}) = 12\sqrt{3}$ br^2 olduğuna göre

$\widehat{A}$'nın ölçüsünü bulalım.

Çözüm

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB|\cdot|AC|\cdot \sin\widehat{A}}{2} \Rightarrow 12\sqrt{3} = \frac{8\cdot 6\cdot \sin\widehat{A}}{2} \Rightarrow \sin\widehat{A} = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olur.}$$

A geniş açı olduğundan $m(\widehat{A}) = 120°$ elde edilir.

Örnek

Benzer üçgenlerin alanları oranı ile benzerlik oranları arasındaki ilişkiyi dinamik matematik yazılımı yardımıyla inceleyelim.

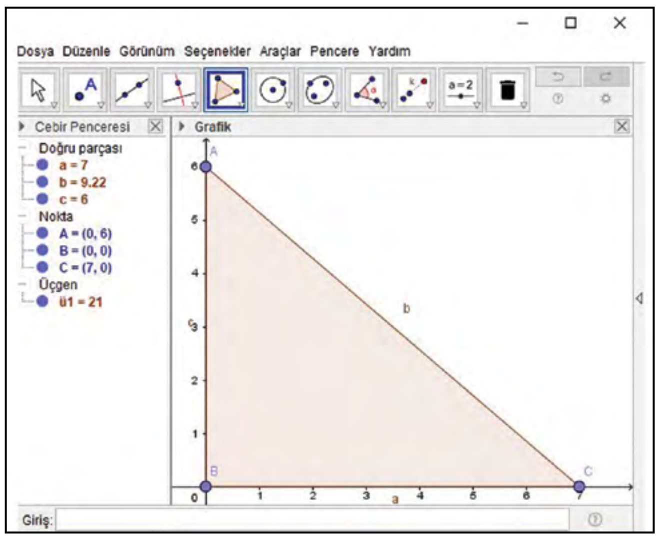
Çözüm

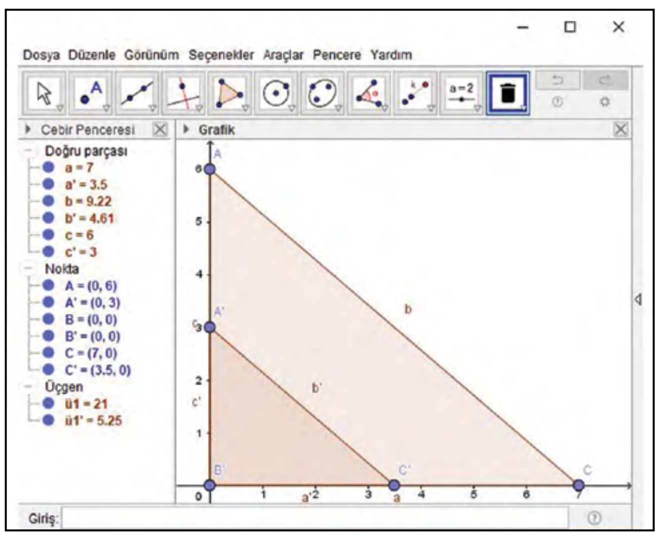
Dinamik matematik yazılımında grafik penceresini açalım. Araç çubuğunda 5. kutuya tıklayıp "Çokgen seçeneği" yardımıyla $\widehat{ABC}$'ni oluşturalım.

Daha sonra araç çubuğunda 9. kutuya tıklayıp "Nesneyi noktada genişlet" seçeneği yardımıyla önce üçgene daha sonra B noktasına tıklayalım. Gelen ekranda ölçek yerine $\frac{1}{2}$ yazıp tamama basalım.

Ekranın solunda üçgenlerin kenar uzunlukları ve alanları verilmiştir. Bu ölçüler yardımıyla üçgenlerin benzerlik oranını ve alanları oranını bulalım.

Benzer üçgenlerin alanları oranı ile benzerlik oranı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.



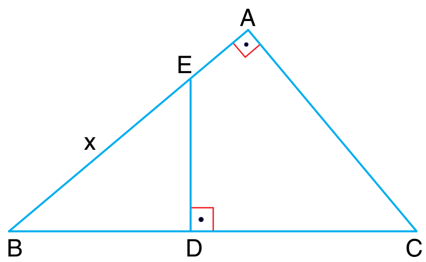


Bilgi

Benzer üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir.

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \text{ ve } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k \Rightarrow \frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2, \ (k \in \mathbb{R}^+) \text{ olur.}$$

Örnek



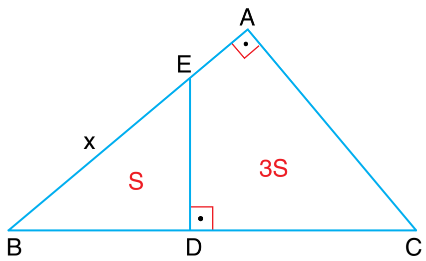
Yanda verilen şekilde

$[AB] \perp [AC]$, $[ED] \perp [BC]$,

$A(AEDC) = 3 \cdot A(\widehat{BED})$, $|BC| = 10$ br ve $|BE| = x$ br

olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm



Verilenlere göre $A(\widehat{BED}) = S \text{ br}^2 \Rightarrow A(AEDC) = 3S \text{ br}^2$ olduğundan $A(\widehat{ABC}) = 4S \text{ br}^2$ olur.

Ayrıca şekilde $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90°$ (verilmiş) ve

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{EBD})$ (ortak açılar) olduğundan

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DBE}$ (A.A.) elde edilir.

Benzer üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBE})} = \left(\frac{|BC|}{|BE|}\right)^2 \Rightarrow \frac{4\cancel{S}}{\cancel{S}} = \left(\frac{10}{x}\right)^2$$

$$\left(\frac{10}{x}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow \frac{10}{x} = 2$$

$x = 5$ br elde edilir.

Örnek

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ için

$\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \dfrac{1}{25}$ ve $|AB| = 6$ br olduğuna göre $|DE|$'nu bulalım.

Çözüm

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \left(\frac{|AB|}{|DE|}\right)^2$$

$$\frac{1}{25} = \left(\frac{|AB|}{|DE|}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{|DE|}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{6}{|DE|} \Rightarrow |DE| = 30 \text{ br bulunur.}$$

Örnek

Taban uzunlukları eşit olan üçgenlerde alan–yükseklik ilişkisini ve yükseklikleri eşit olan üçgenlerde alan–taban ilişkisini dinamik matematik yazılımı yardımıyla inceleyelim.

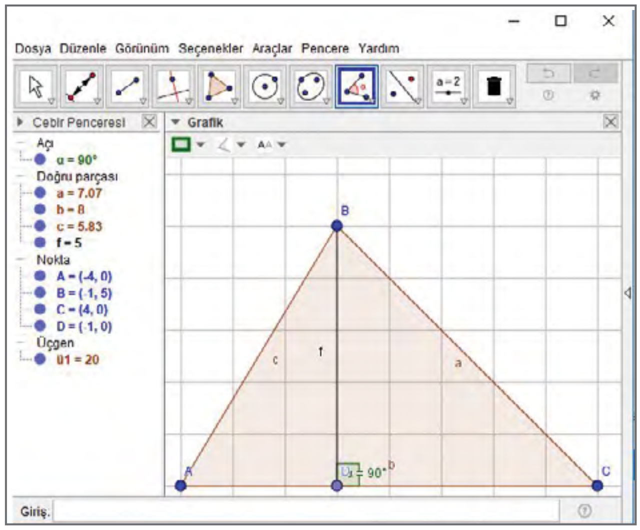
Çözüm

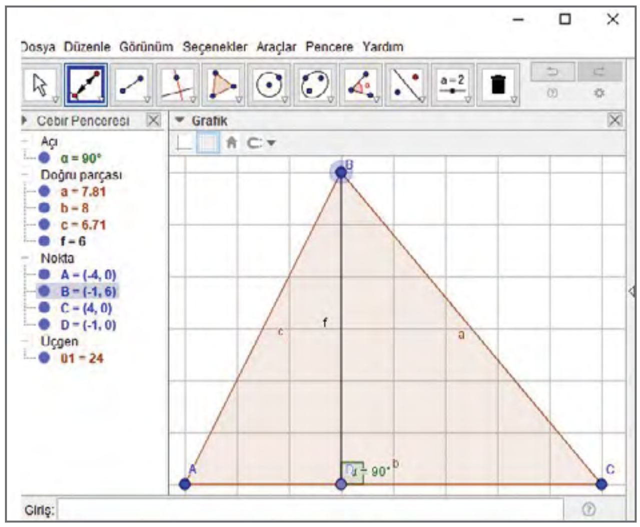
Dinamik matematik yazılımını açalım. Grafik ekranında araç çubuğunda 5. kutuya tıklayarak “Çokgen” seçeneği yardımıyla $\widehat{ABC}$’ni oluşturalım. Araç çubuğunda 3. kutuya tıklayarak “Doğru parçası” seçeneği yardımıyla üçgenin [AC]’na ait yüksekliği [BD] bulalım. Araç çubuğunda 8. kutuya tıklayarak “Açı” seçeneği yardımıyla $\widehat{BDC}$’nın ölçüsünü belirleyelim.

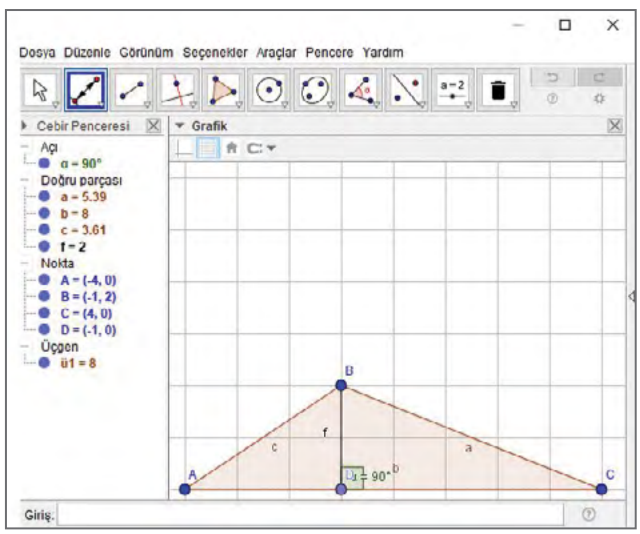
Daha sonra araç çubuğunda 2. kutuya tıklayarak "Noktayı bağla / ayır” seçeneği yardımıyla B noktasını aşağı ve yukarı kaydıralım.

Görsellerin sağ tarafındaki cebir penceresinde verilen ölçüler yardımıyla elde ettiğimiz üçgenlerden herhangi ikisinin alanları oranı ile yükseklikleri oranını bulalım. Bu işlemi elde ettiğimiz üçgenlerin hepsi için uygulayalım.

Taban uzunlukları eşit üçgenlerin yüksekliklerinin oranı ile alanları oranı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.





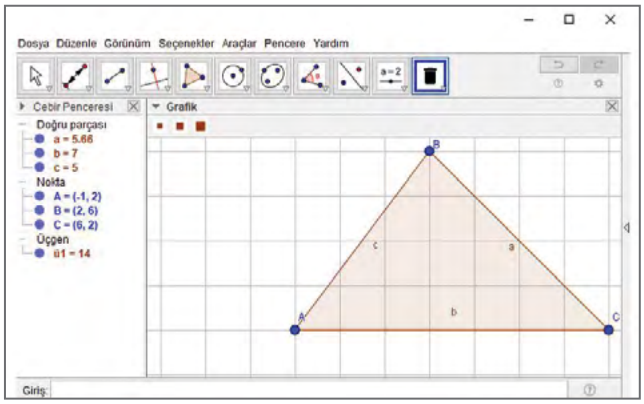


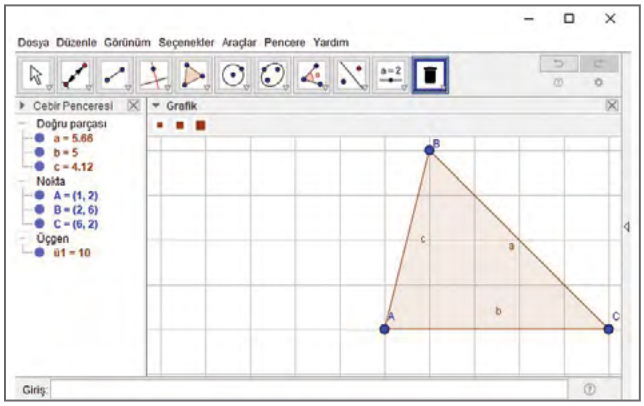
Araç çubuğundaki 5. kutuya tıklayarak "Çokgen" seçeneği yardımıyla yeni bir tane $\widehat{ABC}$'ni oluşturalım.

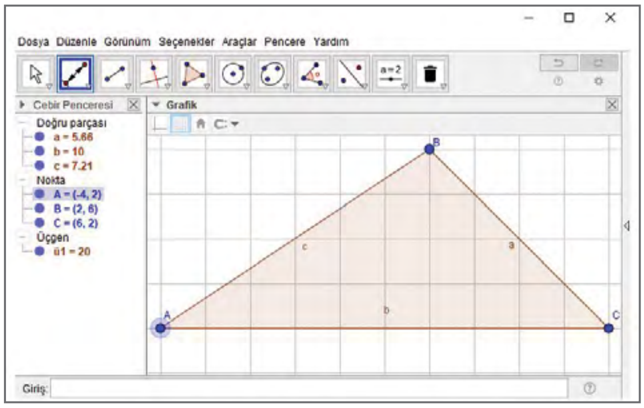
Daha sonra araç çubuğunda 2. kutuya tıklayarak "Noktayı bağla /ayır" seçeneği yardımıyla A noktasını sağa ve sola kaydıralım.

Görsellerin sağ tarafındaki cebir penceresinde verilen ölçüler yardımıyla elde ettiğimiz üçgenlerin herhangi ikisinin alanları oranı ile taban uzunlukları (|AC|) oranını bulalım. Bu işlemi elde ettiğimiz üçgenlerin hepsi için uygulayalım.

Yükseklikleri eşit üçgenlerin alanları oranı ile taban uzunluklarının oranı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

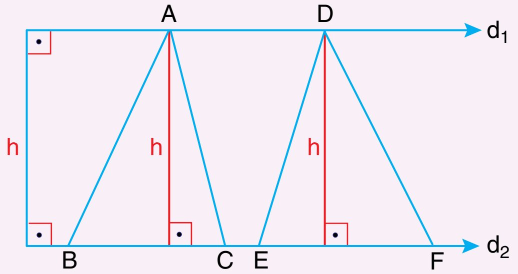




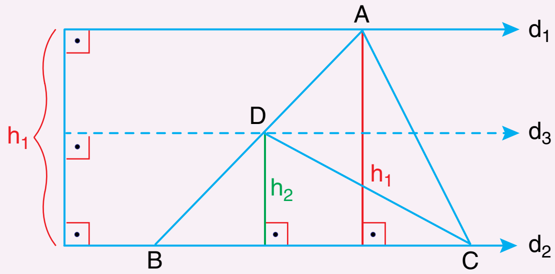


Bilgi

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı taban uzunlukları oranına, taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları oranı yüksekliklerinin oranına eşittir.

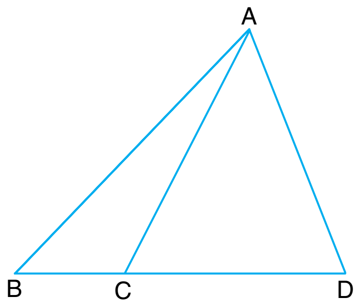


$d_1 \parallel d_2$, $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \dfrac{|BC|}{|EF|}$



$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$, $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{h_1}{h_2}$

Örnek



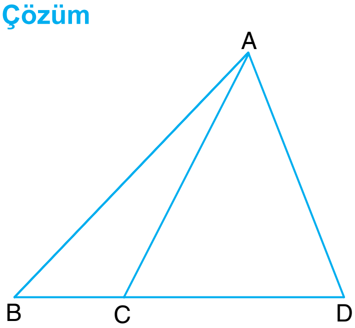
Şekilde B, C, D noktaları doğrusal

$|CD| = 2|BC|$ ve

$A(\overset{\frown}{ACD}) = 20$ br^2 olduğuna göre

$\overset{\frown}{ABC}$'nin alanını bulalım.

Çözüm



B, C ve D noktaları doğrusal olduğundan $\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{ACD}$'nin yükseklikleri eşittir.

Bu durumda bu üçgenlerin alanları oranı taban uzunlukları oranına eşit olacağından

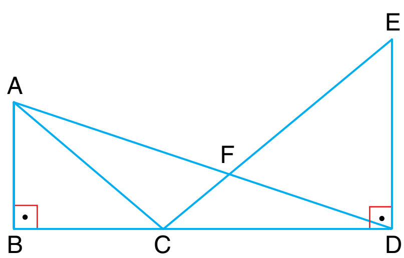
$|CD| = 2|BC| = 2k$ dersek

$|CD| = 2k$, $|BC| = k$ ve

$$\frac{A(\overset{\frown}{ABC})}{A(\overset{\frown}{ACD})} = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{A(\overset{\frown}{ABC})}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow A(\overset{\frown}{ABC}) = 10 \text{ br}^2 \text{ elde edilir.}$$

Örnek



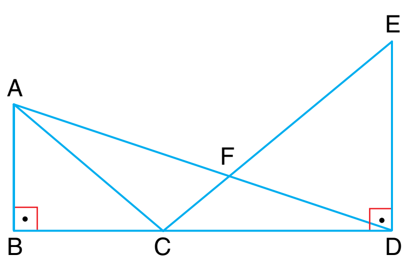
Yandaki şekilde $[AB] \perp [BD]$, $[DE] \perp [BD]$

B, C, D doğrusal noktalar, $[AD] \cap [CE] = \{F\}$

$\dfrac{|ED|}{|AB|} = \dfrac{3}{2}$ ve $A(\overset{\frown}{ACD}) = 30$ br^2 olduğuna göre

$A(\overset{\frown}{ECD})$ değerini bulalım.

Çözüm



$\overset{\frown}{ACD}$ ve $\overset{\frown}{ECD}$'inde [CD] ortak tabandır.

Bu durumda üçgenlerin alanları oranı yüksekliklerinin oranına eşit olur.

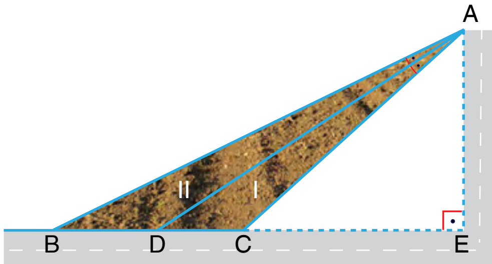
[AB], $\overset{\frown}{ACD}$'nde [CD]'na ait yükseklik ve

[ED], $\overset{\frown}{ECD}$'nde [CD] 'na ait yükseklik olduğundan

$$\frac{A(\overset{\frown}{ECD})}{A(\overset{\frown}{ACD})} = \frac{|ED|}{|AB|}$$

$$\frac{A(\overset{\frown}{ECD})}{\underset{15}{\cancel{30}}} = \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow A(\overset{\frown}{ECD}) = 45 \text{ br}^2 \text{ elde edilir.}$$

Örnek



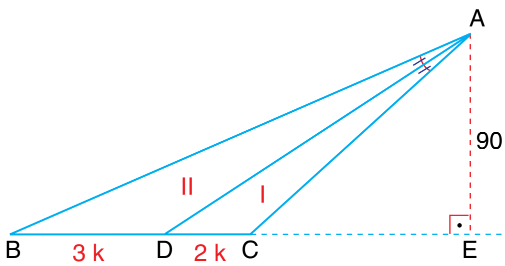
Kemal Bey yandaki şekilde görülen ve köşelerini A, B, C diye işaretlediği tarlasını [AD] boyunca ayıracaktır. Kemal Bey I nolu kısmı çocukları arasında eşit paylaştırmak, II nolu kısmı ise satıp Mehmetçik Vakfına bağışlamak istemektedir.

[AD], A köşesinde iç açıortaydır. Tarlanın [BC] uzunluğu 100 m ve [AC] ve [AB] arasında $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2}{3}$ oranı vardır.

Tarlanın [BC]'nda ve A noktasından geçen yollar birbirlerini E noktasında dik kesmektedir ve E noktasının A noktasına uzaklığı 90 m'dir.

Buna göre tarlanın I ve II nolu kısımlarının alanlarını bulalım.

Çözüm



Şekli yandaki gibi modellersek

[AD], $\widehat{ABC}$'nde iç açıortay olduğundan

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |CD| = 2k,\ |BD| = 3k \text{ olur.}$$

$|CD| + |BD| = 100 \Rightarrow 2k + 3k = 100 \Rightarrow k = 20$ bulunur.

Bu durumda $|BD| = 3k = 60$ m, $|CD| = 2k = 40$ m olur.

Ayrıca [AE] hem $\widehat{ABD}$ hem de $\widehat{ADC}$'nin ortak yüksekliğidir. Buna göre

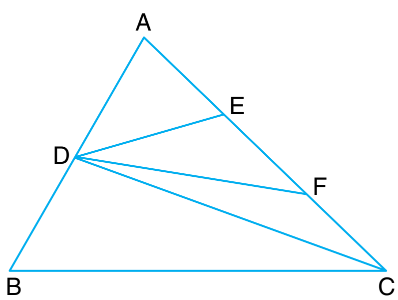
$$A(\widehat{ADC}) = \frac{|DC| \cdot |AE|}{2} = \frac{\cancelto{20}{40} \cdot 90}{\cancelto{1}{2}} = 1800\,m^2 \quad \text{(1 nolu kısmın alanı)}$$

$$A(\widehat{ABD}) = \frac{|BD| \cdot |AE|}{2} = \frac{\cancelto{30}{60} \cdot 90}{\cancelto{1}{2}} = 2700\,m^2 \quad \text{olur. (2 nolu kısmın alanı)}$$

Kemal Bey hem yardımseverlik hem de vatanseverlik örneği göstererek Mehmetçik Vakfına destek olmuştur.

Bizler de kurallara ve kanunlara uyarak, çalışarak ve dayanışma içinde ülkemize yararlı bireyler olmalıyız.

Örnek



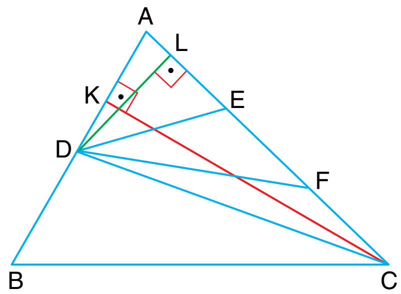
Yanda verilen $\widehat{ABC}$'nde [AC] 3 eş parçaya, [AB] 2 eş parçaya ayrılmıştır.

A, D, B ve A, E, F, C kendi aralarında doğrusal noktalar,

$A(\widehat{ADE}) = 8$ br^2 olduğuna göre

$A(\widehat{ABC})$ değerini bulalım.

Çözüm



Şekilde |AE| = |EF| = |FC| ve $\overset{\frown}{ADE}$, $\overset{\frown}{EDF}$ ve $\overset{\frown}{FDC}$'nin D köşesinden çizilen yükseklikleri ([DL]) eşit olacağından

A($\overset{\frown}{ADE}$) = A($\overset{\frown}{EDF}$) = A($\overset{\frown}{FDC}$) = 8 br^2 ve

A($\overset{\frown}{ADC}$) = 8 + 8 + 8 = 24 br^2 olur.

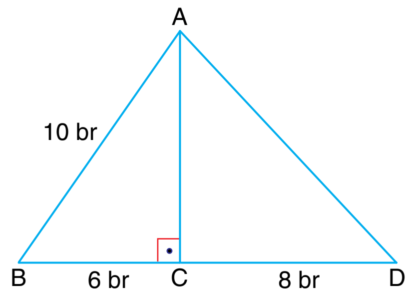
Ayrıca;

|AD| = |DB| ve $\overset{\frown}{ADC}$ ile $\overset{\frown}{DBC}$'nin C köşelerinden çizilen yükseklikleri ([CK]) eşit olacağından

A($\overset{\frown}{ADC}$) = A($\overset{\frown}{DBC}$) = 24 br^2 olur. Bu durumda A($\overset{\frown}{ABC}$) = 24 + 24 = 48 br^2 olarak elde edilir.

PEKİŞTİRME SORULARI

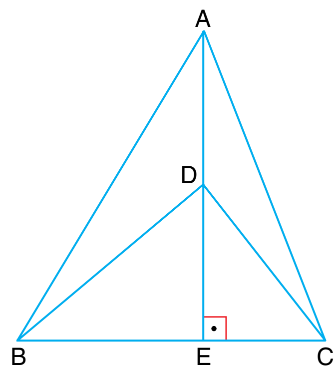
1.



Yukarıda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde [AC] ⊥ [BD]

|AB| = 10 br, |BC| = 6 br, |CD| = 8 br olduğuna göre $\overset{\frown}{ABC}$'nin alanını bulunuz.

2.



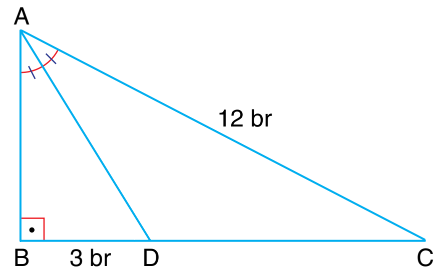
Yukarıda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde

A, D, E noktaları doğrusal, |AE| = |BC|,

|AD| = |DE| ve [AE] ⊥ [BC] olduğuna göre

$\dfrac{A(\overset{\frown}{BDC})}{A(BDCA)}$ oranını bulunuz.

3.

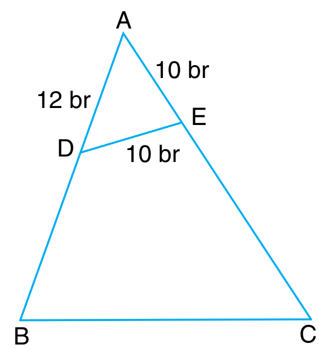


Yukarıda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde [AB] ⊥ [BC]

[AD] iç açıortay, D ∈ [BC], |BD| = 3 br,

|AC| = 12 br olduğuna göre $\overset{\frown}{ADC}$'nin alanını bulunuz.

4.



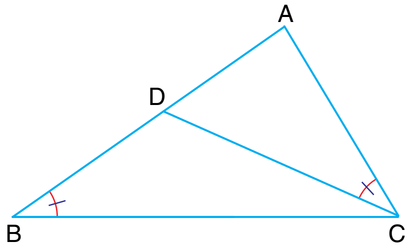
Yukarıda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde |AD| = 12 br,

|AE| = |ED| = 10 br, |EC| = 3·|AE| ve

$\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{2}{3}$ olduğuna göre

A($\overset{\frown}{ABC}$) değerini bulunuz.

5.



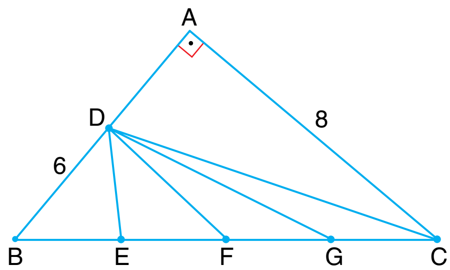
Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DBC})$, $D \in [AB]$

$\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{2}{3}$ ve $A(\widehat{ADC}) = 8\ br^2$

olduğuna göre $\widehat{BDC}$'nin alanını bulunuz.

6.



Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde $[AB] \perp [AC]$

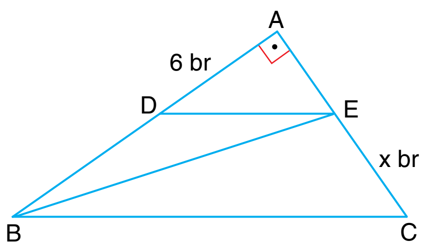
$|BD| = 6$ br, $|AC| = 8$ br, $D \in [AB]$,

B, E, F, G, C noktaları doğrusal

$|BE| = |EF| = |FG| = |GC|$ olduğuna göre

$\widehat{DEF}$'nin alanını bulunuz.

7.



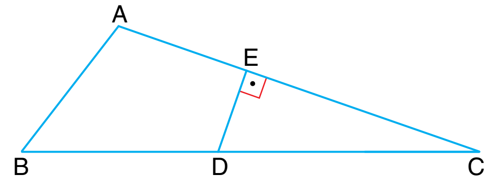
Yukarıda verilen ABC dik üçgeninde

$[AB] \perp [AC]$, $[DE] // [BC]$, $D \in [AB]$, $F \in [AC]$,
$A(\widehat{DBE}) = 30\ br^2$ $|AD| = 6$ br, $|EC| = x$ br olduğuna göre x değerini bulunuz.

8. Bir $\widehat{ABC}$'nde $m(\widehat{A}) = 45°$, $|AB| = 4\sqrt{2}$ br,

$|AC| = 6$ br olduğuna göre $\widehat{ABC}$'nin alanını bulunuz.

9.



Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde, $D \in [BC]$,

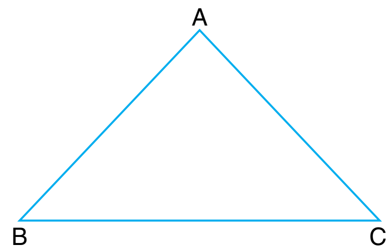
$[DE] \perp [AC]$, $|BC| = 12$ br, $|AC| = 10$ br ve

$|DC| = 3|ED|$ olduğuna göre $\widehat{ABC}$'nin alanını bulunuz.

10. Bir $\widehat{ABC}$'nde $|AB| = 10$ br, $|AC| = 12$ br olduğuna göre $\widehat{ABC}$'nin alanının alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) 80 B) 70 C) 60 D) 50 E) 40

11.



Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde $|AB| = |AC|$

$\sin\widehat{B} = \dfrac{3}{5}$ ve $|BC| = 16$ br olduğuna göre

$A(\widehat{ABC})$ değerini bulunuz.

A) 44 B) 46 C) 48 D) 50 E) 52

12. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve $\dfrac{|AB|}{|DE|} = 5$ olduğuna göre

$\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})}$ oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

13. Tabanları ortak olan iki üçgenin yükseklikleri oranı 4 olduğuna göre alanları oranı kaçtır?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

4. BÖLÜM ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

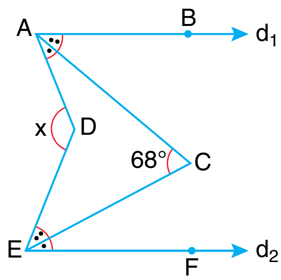
1. $2x - 4°$'lik açı dar açı, $3y + 6°$'lik açı geniş açı olduğuna göre $x + y$ toplamının alacağı en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 94 B) 98 C) 102 D) 104 E) 106

2. Tümlerinin bütünlerine oranı $\frac{2}{11}$ olan açı kaç derecedir?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 60 E) 70

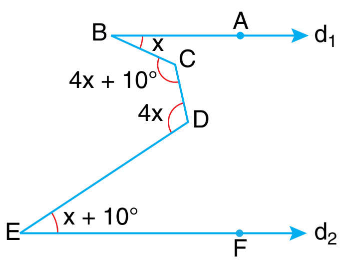
3.



Yukarıdaki şekilde $d_1 \parallel d_2$, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DEC})$, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CEF})$ ve $m(\widehat{ACE}) = 68°$ olduğuna göre $m(\widehat{ADE}) = x$ kaç derecedir?

A) 120 B) 124 C) 128 D) 132 E) 136

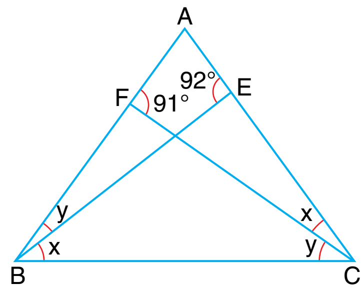
4.



Yukarıdaki şekilde $d_1 \parallel d_2$, $m(\widehat{ABC}) = x$, $m(\widehat{BCD}) = 4x + 10°$, $m(\widehat{CDE}) = 4x$ ve $m(\widehat{DEF}) = x + 10°$ olduğuna göre x kaçtır?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

5.



Yukarıdaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$'nde

$m(\widehat{AEB}) = 92°$, $m(\widehat{AFC}) = 91°$,

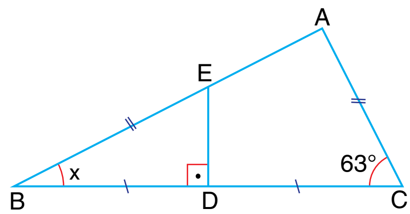
$m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{EBC}) = x$,

$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{FCB}) = y$ olduğuna göre

$\widehat{A}$'nın ölçüsü kaç derecedir?

A) 54 B) 55 C) 56 D) 57 E) 58

6.



Yukarıdaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$'nde

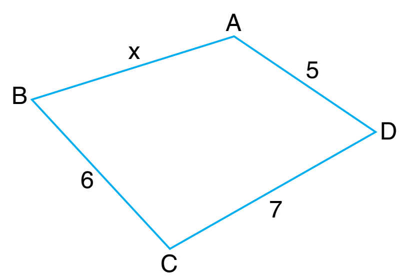
$m(\widehat{C}) = 63°$, $m(\widehat{B}) = x$, $[ED] \perp [BC]$,

$|BE| = |AC|$ ve $|BD| = |DC|$ olduğuna göre

x kaç derecedir?

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

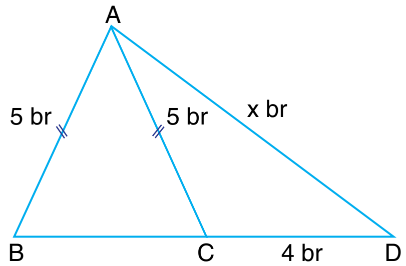
7.



ABCD bir dörtgen olduğuna göre x'in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 19 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

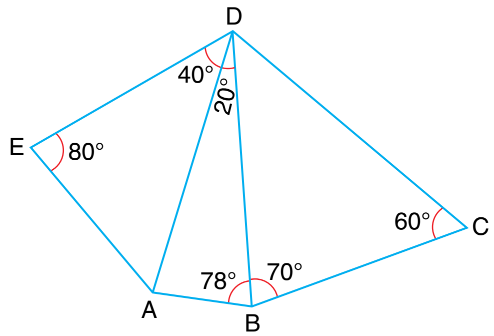
8.



Yukarıdaki şekilde ABD bir üçgen, ABC ikizkenar üçgen, |AB| = |AC| = 5 br, |CD| = 4 br ve |AD| = x br olduğuna göre x aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?

A) 9 B) 7 C) 5 D) 3 E) 2

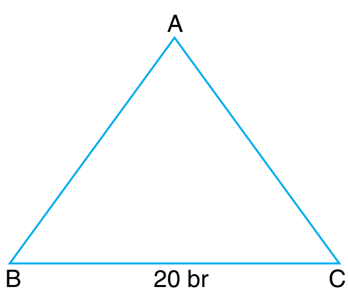
9.



Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{E}) = 80°$, $m(\widehat{EDA}) = 40°$, $m(\widehat{ABD}) = 78°$, $m(\widehat{ADB}) = 20°$, $m(\widehat{CBD}) = 70°$ ve $m(\widehat{C}) = 60°$ olduğuna göre en uzun kenar aşağıdakilerden hangisidir?

A) [BC] B) [AE] C) [AD]
D) [BD] E) [CD]

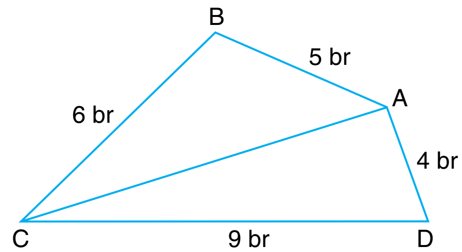
10.



Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde |BC| = 20 br olduğuna göre Ç($\widehat{ABC}$)'nin alacağı <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

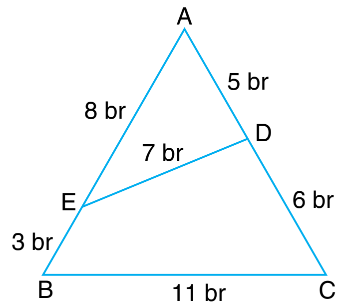
11.



Yukarıdaki şekilde |AB| = 5 br, |BC| = 6 br, |AD| = 4 br ve |DC| = 9 br olduğuna göre |AC| hangi aralıkta değerler alır?

A) (5, 9) B) (5, 11) C) (4, 9)
D) (6, 13) E) (7, 13)

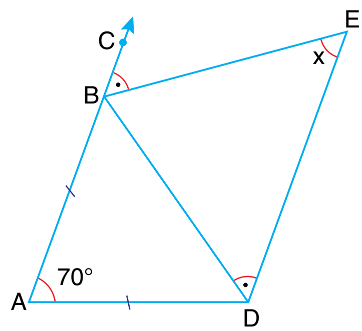
12.



Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde D ∈ [AC], E ∈ [AB], |BC| = 11 br, |CD| = 6 br, |AD| = 5 br, |AE| = 8 br, |EB| = 3 br ve |ED| = 7 br olduğuna göre ölçüsü <u>en büyük</u> olan açı hangisidir?

A) $\widehat{ADE}$ B) $\widehat{AED}$ C) $\widehat{EAD}$
D) $\widehat{EBC}$ E) $\widehat{BCA}$

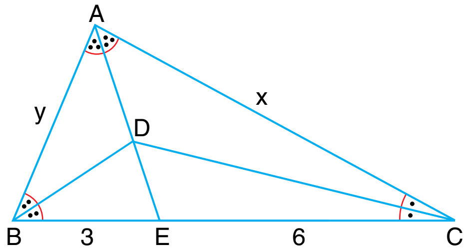
13.



Şekilde |AB| = |AD| , A, B, C doğrusal noktalar, $m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{BDE})$, $m(\widehat{BAD}) = 70°$ ve $m(\widehat{BED}) = x$ olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

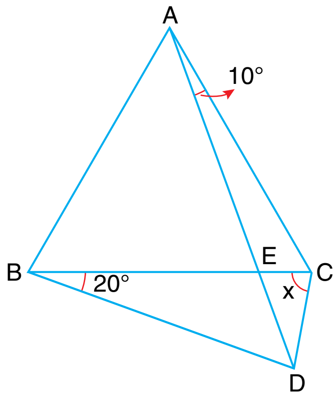
14.



Yukarıdaki şekilde ABC bir üçgen,
[AE], [CD] ve [BD] iç açıortaylardır.
3|AD| = 4|DE|, |BE| = 3 br, |EC| = 6 br,
|AC| = x br ve |AB| = y br olduğuna göre
x + y toplamı kaçtır?

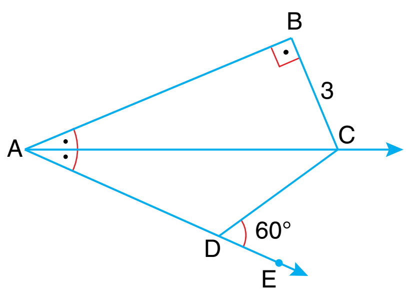
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

15.



Yukarıdaki şekilde ABC eşkenar üçgen
A, E, D ve B, E, C kendi aralarında doğru-
sal noktalar, $m(\widehat{EAC}) = 10°$,
$m(\widehat{EBD}) = 20°$ ve $m(\widehat{ECD}) = x$ olduğuna
göre x kaç derecedir?
A) 74 B) 76 C) 78 D) 80 E) 82

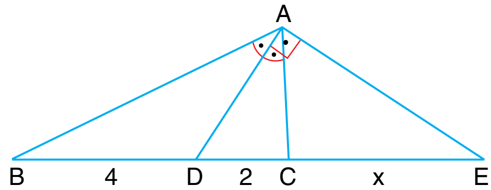
16.



Yukarıdaki şekilde [AC] açıortay,
[BC] ⊥ [AB], |BC| = 3 br ve $m(\widehat{CDE}) = 60°$
olduğuna göre |CD| kaç birimdir?

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

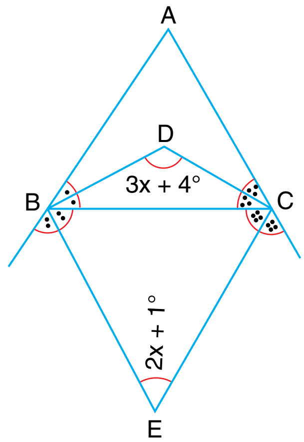
17.



Yukarıdaki şekilde [AD], $\widehat{ABC}$'nde $\widehat{A}$'nın iç
açıortayı, B, D, C ve E doğrusal noktalar
[AD] ⊥ [AE], |EC| = x br,
[DC] = 2 br ve |BD| = 4 br olduğuna göre x
kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

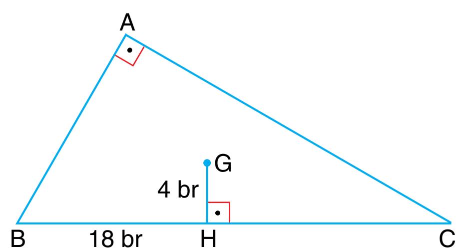
18.



Yukarıdaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$'nde
[DC] ve [BD] iç açıortaylar,
[BE] ve [CE] dış açıortaylar,
$m(\widehat{BDC}) = 3x + 4°$, $m(\widehat{BEC}) = 2x + 1°$ oldu-
ğuna göre x kaçtır?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

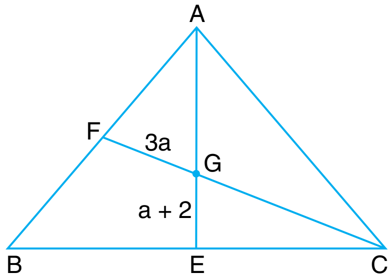
19.



Yukarıdaki şekilde ABC dik üçgen
[AB] ⊥ [AC], G ağırlık merkezi,
[GH] ⊥ [BC], |GH| = 4 br, ve BH| = 18 br ise
|HC|'nun değeri kaçtır?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

20.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC ikizkenar üçgeninde |AB| = |BC|, G ağırlık merkezi, |GF| = 3a br, |GE| = (a + 2) br olduğuna göre a kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

21. Aşağıda verilen ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

I. Dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

II. Bir üçgende kenarortayların kesişim noktasına üçgenin ağırlık merkezi denir.

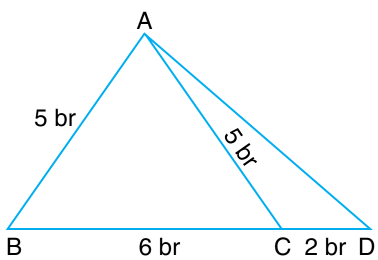
III. Bir üçgende ağırlık merkezinin köşeye olan uzaklığı, köşenin karşısındaki kenara olan uzaklığının iki katına eşittir.

IV. Bir üçgende herhangi bir köşeden çizilen iç açıortay ile dış açıortayın arasındaki açının ölçüsü 90°dir.

V. Bir üçgende açıortaylar aynı zamanda kenarortaylardır.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

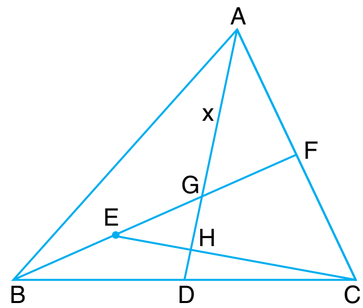
22.



Yukarıdaki şekilde ABC ikizkenar üçgen, $C \in [BD]$, |AB| = |AC| = 5 br, |BC| = 6 br, |DC| = 2 br olduğuna göre |AD| kaç birimdir?

A) 6 B) $\sqrt{38}$ C) $\sqrt{41}$ D) $\sqrt{43}$ E) $2\sqrt{5}$

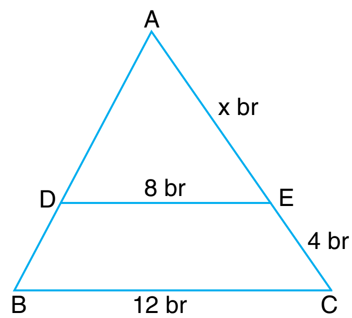
23.



Şekilde verilen $\widehat{ABC}$'nde G ağırlık merkezi A, G, H, D ve B, E, G, F kendi aralarında doğrusal noktalar, |BE| = |EG| = |GF|, |HD| = 3 br ve |AG| = x br olduğuna göre x kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

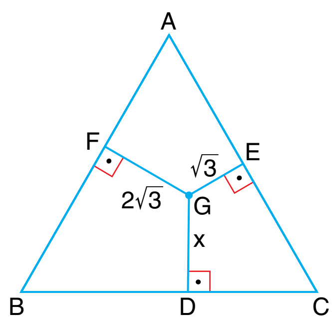
24.



Yukarıdaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$'nde [DE] // [BC], $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, |DE| = 8 br, |BC| = 12 br, |EC| = 4 br ve |AE| = x br olduğuna göre x kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

25.



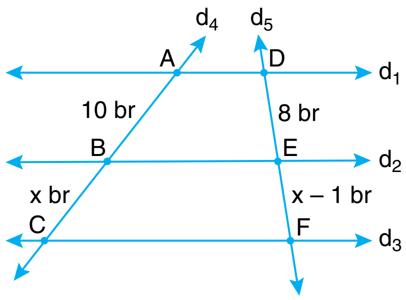
Yukarıdaki şekilde ABC eşkenar üçgen $[GE] \perp [AC]$, $[GF] \perp [AB]$, $[GD] \perp [BC]$, |AB| = 10 br, |GE| = $\sqrt{3}$ br, |GF| = $2\sqrt{3}$ br olduğuna göre |GD| kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 3

26. $\overset{\frown}{ABC}$ ile $\overset{\frown}{DEF}$ arasında $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$,
$|BC| = (x + 3)$ cm, $|EF| = (2x + 1)$ cm ilişkisi olduğuna göre x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

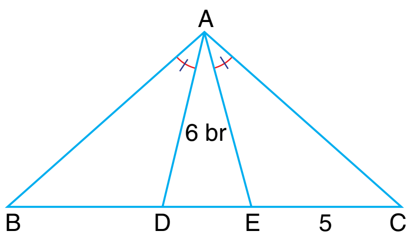
27.



Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2 // d_3$, A, B, C ve D, E, F kendi aralarında doğrusal noktalar $|AB| = 10$ br, $|BC| = x$ br, $|DE| = 8$ br ve $|EF| = (x – 1)$ br olduğuna göre x kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

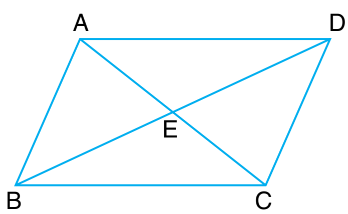
28.



Yukarıdaki şekilde ABC ikizkenar üçgen, B, D, E, C doğrusal noktalar $|AB| = |AC|$, $m(\overset{\frown}{BAD}) = m(\overset{\frown}{EAC})$, $|AD| = 6$ br, $|EC| = 5$ br olduğuna göre $|BD| + |AE|$ toplamı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

29.



Yukarıda verilen şekilde ABCD bir paralelkenardır. [AC] ve [BD] köşegenler olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\overset{\frown}{BEC} \cong \overset{\frown}{DEA}$ B) $\overset{\frown}{BEC} \cong \overset{\frown}{DEC}$

C) $\overset{\frown}{ABE} \cong \overset{\frown}{BEC}$ D) $\overset{\frown}{ABE} \cong \overset{\frown}{AED}$

E) $\overset{\frown}{AED} \cong \overset{\frown}{CED}$

30. I. Eş üçgenler aynı zamanda benzer üçgenlerdir.

II. Benzer üçgenler aynı zamanda eş üçgenlerdir.

III. Benzer üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanlarının oranları benzerlik oranına eşittir.

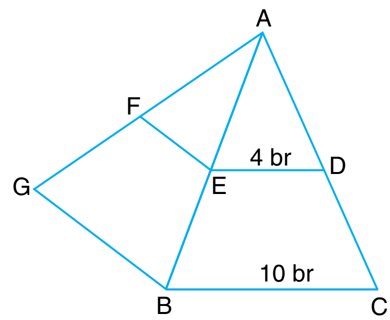
IV. Benzer üçgenlerin çevre uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir.

V. Benzer üçgenlerde karşılıklı açılar eştir.

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

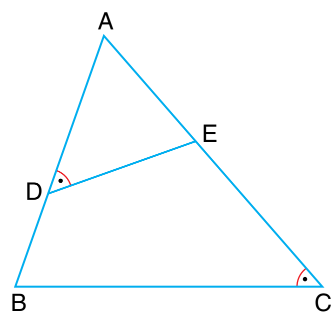
31.



Yukarıdaki şekilde [EF] // [GB], F ∈ [AG], E ∈ [AB], D ∈ [AC], [ED] // [BC], $|ED| = 4$ br, $|BC| = 10$ br olduğuna göre $\dfrac{|AF|}{|FG|}$ oranı kaçtır?

A) $\dfrac{2}{7}$ B) $\dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{5}{2}$

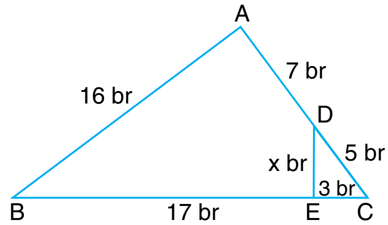
32.



Yukarıda verilen $\overset{\frown}{ABC}$'nde $m(\overset{\frown}{ADE}) = m(\overset{\frown}{ACB})$
$\dfrac{|AD|}{|AC|} = \dfrac{1}{3}$ ve $Ç(\overset{\frown}{ADE}) = 24$ br olduğuna göre $Ç(\overset{\frown}{ABC})$ kaç br olur?

A) 48 B) 56 C) 64 D) 72 E) 80

33.



Yukarıdaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$'nde

$D \in [AC]$, $F \in [BC]$,

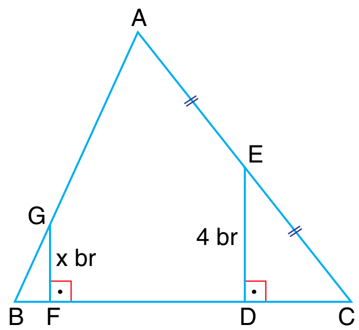
$|AD| = 7$ br, $|DC| = 5$ br, $|EC| = 3$ br,

$|BE| = 17$ br, $|AB| = 16$ br ve $|DE| = x$ br

olduğuna göre x kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

34.



Yukarıdaki şekilde ABC bir üçgen

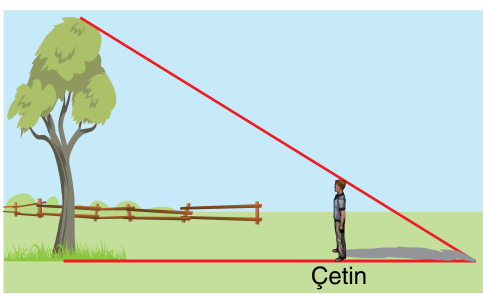
$|AE| = |EC|$, $[ED] \perp [BC]$, $[GF] \perp [BC]$,

$|ED| = 4$ br, $|GF| = x$ br ve $|AG| = 3 \cdot |GB|$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

35.

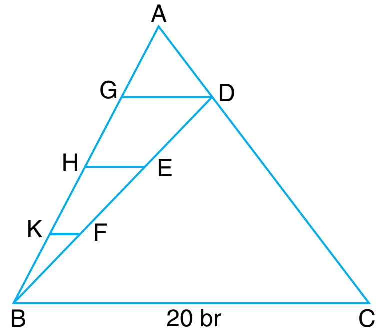


Çetin, ağacın boyunu ölçmek istemektedir. Çetin'in boyu 180 cm ve gölgesinin boyu 3 m'dir. Çetin ağaçtan 780 cm uzaklıkta olduğuna göre ağacın boyu kaç cm'dir?

A) 648 B) 656 C) 664

D) 672 E) 680

36.



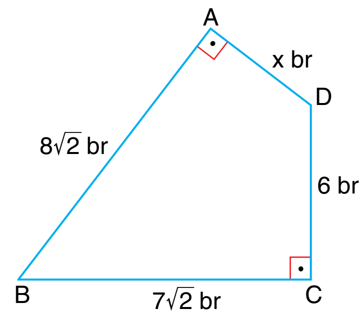
Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde A, G, H, K, B ve D, E, F, B kendi aralarında doğrusal noktalar

$[GD] // [HE] // [KF] // [BC]$,

$|AG| = |GH| = |HK| = |KB|$ ve $|BC| = 20$ br olduğuna göre $|KF|$ kaç br'dir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{3}$

37.



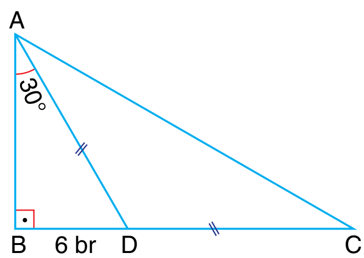
Yukarıdaki şekilde $[AB] \perp [AD]$,

$[BC] \perp [CD]$, $|AB| = 8\sqrt{2}$ br, $[BC] = 7\sqrt{2}$ br,

$|CD| = 6$ br ve $|AD| = x$ br olduğuna göre x kaçtır?

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

38.



Yukarıdaki şekilde ABC dik üçgen, $D \in [BC]$

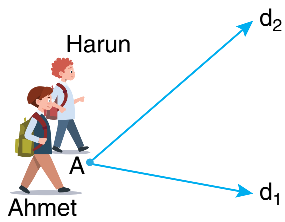
$m(\widehat{ABC}) = 90°$, $m(\widehat{BAD}) = 30°$, $|AD| = |DC|$,

$|BD| = 6$ br olduğuna göre $|AB| + |AC|$ toplamı kaç br'dir?

A) 12 B) 18 C) $12\sqrt{3}$

D) $18\sqrt{3}$ E) $20\sqrt{3}$

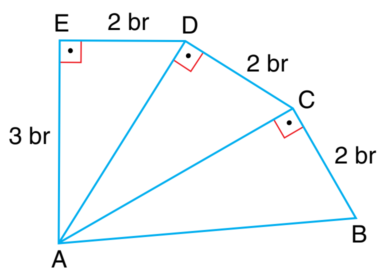
39.



A noktasında sabit hızla yürüyüşe başlayan Ahmet d_1 doğrusu boyunca, Harun ise d_2 doğrusu boyunca hareket etmektedirler. Harekete başladıklarından 1 saat sonra aralarındaki en kısa mesafe 600 m'dir. Ahmet ve Harun 1 saat daha aynı yönlerde aynı hızlarla hareket ettiklerinde aralarındaki en kısa mesafe kaç m olur?

A) 1000 B) 1200 C) 1400
D) 1600 E) 1800

40.



Yukarıdaki şekilde |ED| = |DC| = |BC| = 2 br, [AE] ⊥ [ED], [AD] ⊥ [DC], [AC] ⊥ [BC], |AE| = 3 br olduğuna göre |AB| kaç br'dir?

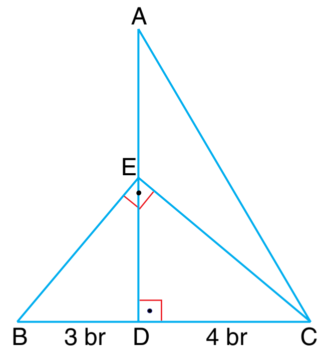
A) $\sqrt{17}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{19}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{21}$

41. Aşağıdaki noktalardan hangileri daima üçgenin iç bölgesinde kalır?

I. Diklik merkezi
II. Ağırlık merkezi
III. İç açıortayların kesişim noktası

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) II ve III E) I, II ve III

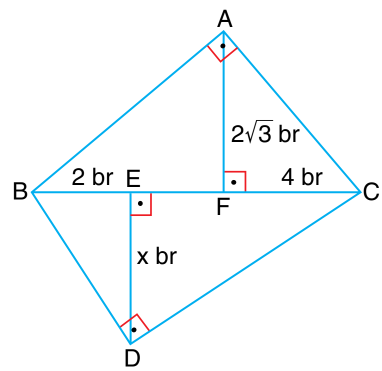
42.



Şekilde A, E, D ve B, D, C kendi aralarında doğrusal noktalar [AD] ⊥ [BC], [BE] ⊥ [EC], |AE| = |ED|, |BD| = 3 br, |DC| = 4 br olduğuna göre |AC| kaç br'dir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

43.



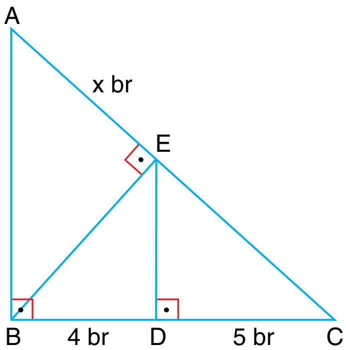
Yukarıdaki şekilde [AB] ⊥ [AC], [AF] ⊥ [BC], [DE] ⊥ [BC], [BD] ⊥ [DC], |AF| = $2\sqrt{3}$ br, |FC| = 4 br, [BE] = 2 br ve |DE| = x br olduğuna göre x kaçtır?

A) $\sqrt{10}$ B) 3 C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{6}$

44. $B\left(m, \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre m'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) $-\frac{\sqrt{22}}{5}$ B) $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ C) 0
D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{22}}{5}$

45.



Yukarıdaki şekilde [AB] ⊥ [BC], [ED] ⊥ [BC], [BE] ⊥ [AC], |BD| = 4 br, |DC| = 5 br ve AE| = x br olduğuna göre x kaçtır?

A) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ C) $2\sqrt{5}$

D) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

46. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\tan 45° = 1$

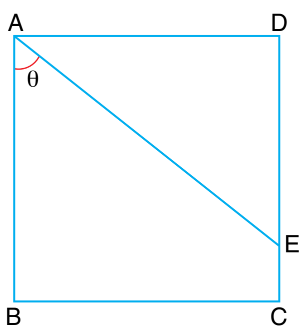
B) $\cot 30° = \sqrt{3}$

C) $\sin 120° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

E) $\tan 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

47.

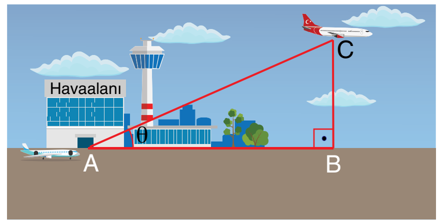


ABCD bir kare, |BC| = 5|CE| ve $m(\widehat{BAE}) = \theta$ olduğuna göre $\tan\theta + \cot\theta$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{37}{20}$ B) $\frac{19}{10}$ C) $\frac{39}{20}$

D) 2 E) $\frac{41}{20}$

48.

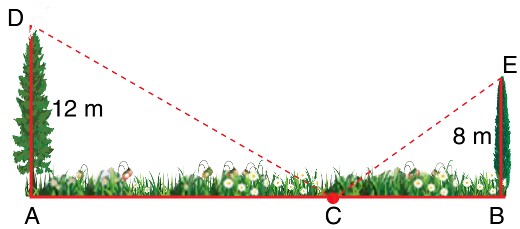


Şekilde C noktasındaki uçak B noktasında yere dik konumdadır. Uçağın piste uzaklığı (A – C arası) 1300 m, $m(\widehat{A}) = \theta$ ve $\tan\theta = \frac{5}{12}$ olduğuna göre uçak yerden kaç metre yüksektedir?

A) 300 B) 400 C) 500

D) 600 E) 700

49.

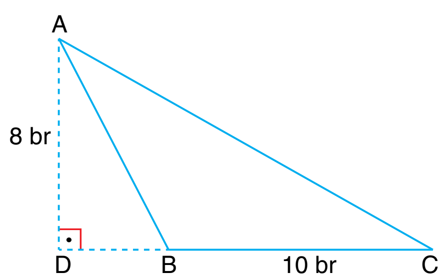


Şekilde boyu 12 m olan ağacın üzerindeki D noktasında bulunan bir arı önce [AB] üzerindeki C noktasına, sonra 8 m'lik ağacın tepesindeki E noktasına konuyor. Ağaçlar yere dik konumdadırlar. |AB| = 15 m olduğuna göre arının alabileceği en kısa yol kaç m dir?

A) 27 B) 25 C) 23

D) 21 E) 19

50.



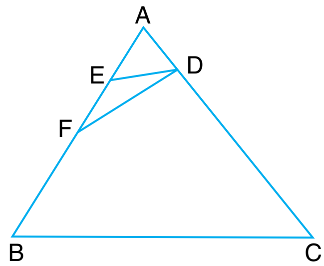
ABC bir üçgen, D, B, C noktaları doğrusal [AD] ⊥ [DC], |BC| = 10 br, |AD| = 8 br olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç br^{2}dir?

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 80

51. $\dfrac{\sin 45° \cdot \cos 45°}{\tan 60° \cdot \cot 60°}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

52.



Yukarıdaki şekilde ABC bir üçgen
A, E, F, B doğrusal noktaları, $D \in [AC]$
$|CD| = 4|AD|$, $|BF| = 2|FE| = 2|AE|$ olduğuna göre $\dfrac{A(\widehat{EFD})}{A(\widehat{ABC})}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{17}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{19}$ E) $\frac{1}{20}$

53. I. Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı taban uzunlukları oranına eşittir.
II. Taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları oranı yükseklikleri oranına eşittir.
III. Benzer üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir.
IV. Bütünler açıların sinüsleri birbirine eşittir.
V. Herhangi bir açının sinüs ve kosinüs değerleri birbirine eşittir.

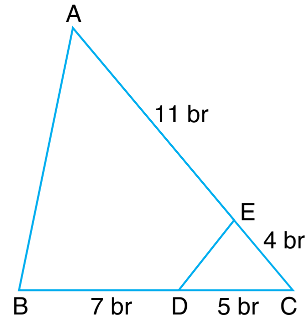
Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

54. Osman yerdeki topa vurduğunda top 45° lik bir açıyla doğrusal bir şekilde ilerleyerek karşısındaki duvara çarpıyor. Topun, aldığı toplam yol $45\sqrt{2}$ m olduğuna göre topun duvara değdiği nokta yerden kaç metre yüksekliktedir?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

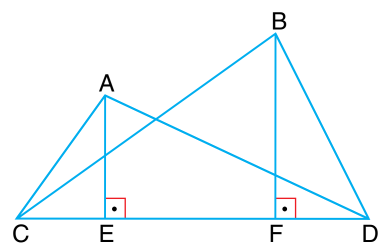
55.



Yukarıdaki şekilde ABC ve DEC birer üçgen
$D \in [BC]$, $F \in [AC]$ ve $|AE| = 11$ br,
$|EC| = 4$ br, $|CD| = 5$ br,
$|BD| = 7$ br olduğuna göre $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEC})}$ oranı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

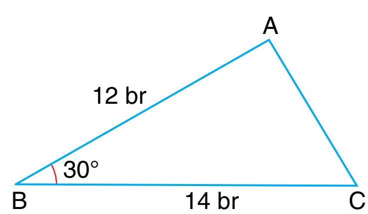
56.



Yukarıdaki şekilde ACD ve CBD birer üçgen
$[AE] \perp [CD]$, $[BF] \perp [CD]$ ve $\dfrac{|BF|}{|AE|} = \dfrac{3}{2}$
olduğuna göre $\dfrac{A(\widehat{CBD})}{A(\widehat{CAD})}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

57.



Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$'nde $m(\widehat{ABC}) = 30°$
$|AB| = 12$ br, $|BC| = 14$ br
olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ değeri kaç br^2 dir?

A) 34 B) 36 C) 38 D) 40 E) 42

VERİ, SAYMA VE OLASILIK

5. BÖLÜM

VERİ

Konular

5.1. Merkezî Eğilim ve Yayılım Ölçüleri

5.2. Verilerin Grafikle Gösterilmesi

Sembol ve Gösterimler

$\overline{X}$, S, Q_1, Q_2

Terimler ve Kavramlar

Veri

Kesikli Veri

Sürekli Veri

Aritmetik Ortalama

Ortanca (medyan)

Tepe değer (mod)

Açıklık

En büyük değer

En küçük değer

Standart sapma

Çizgi grafiği

Sütun grafiği

Daire grafiği

Histogram

Grup sayısı

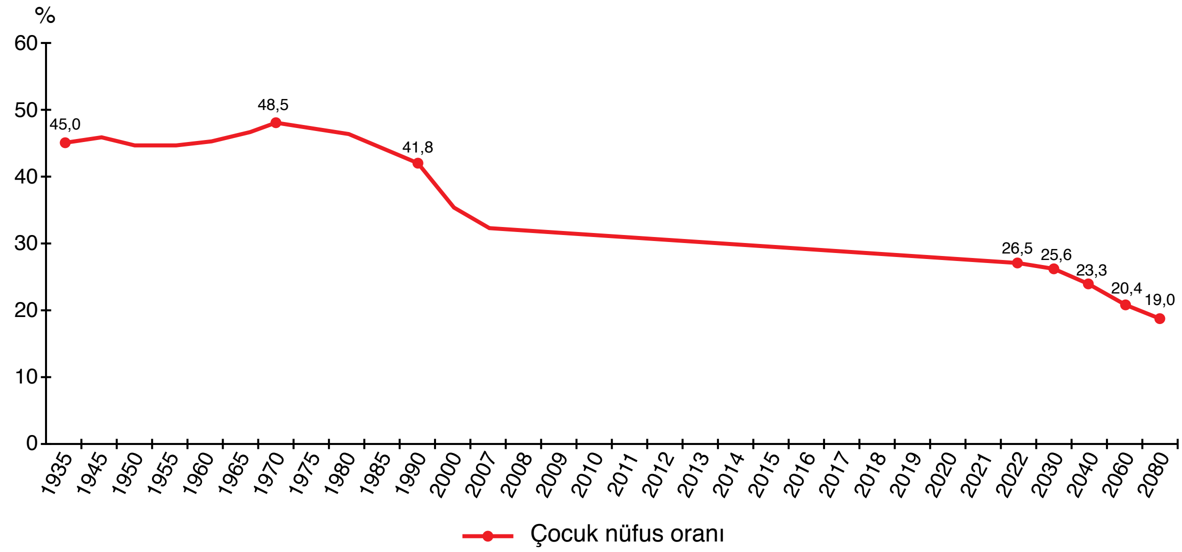
Grup genişliği

5. VERİ

İstatistiklerle Çocuk, 2022

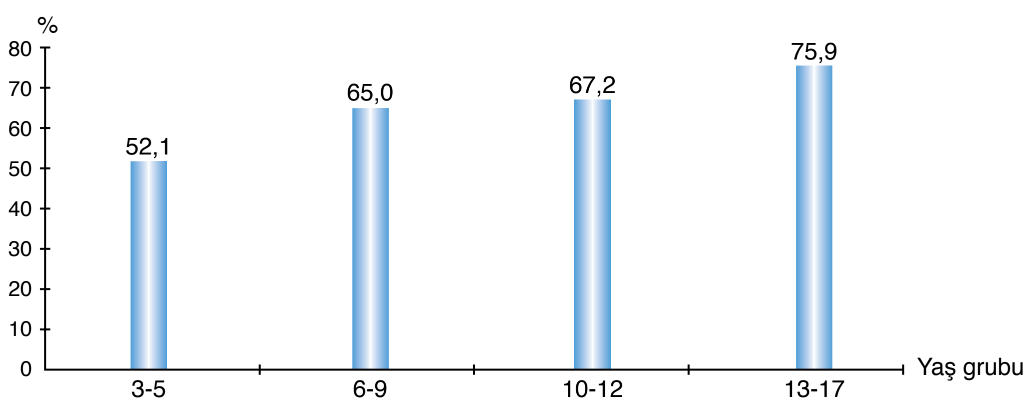
Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi (ADNKS) sonuçlarına göre 2022 yıl sonu itibarıyla, Türkiye nüfusu 85 milyon 279 bin 553 kişi iken bunun 22 milyon 578 bin 378'ini çocuklar oluşturdu. Çocuk nüfusun %51,3'ünü erkek çocuklar, %48,7'sini kız çocuklar oluşturdu. Birleşmiş Milletler tanımına göre 0-17 yaş grubunu içeren çocuk nüfus, 1970 yılında toplam nüfusun %48,5'ini oluştururken bu oran 1990 yılında %41,8 ve 2022 yılında %26,5 oldu.

Çocuk nüfusun toplam nüfus içindeki oranı, 1935-2080



Türkiye çocuk araştırması sonuçlarına göre anneleri/temel bakım verenleri tarafından günde en az bir defa diş fırçaladığı belirtilen 3-17 yaş grubundaki çocukların oranı %66,5 oldu. Günde en az bir defa diş fırçaladığı belirtilen 3-17 yaş grubundaki kız çocukların oranı %73,4 iken aynı yaş grubundaki erkek çocukların oranı %60,0 oldu.

Yaş grubuna göre günde en az bir defa diş fırçalayan çocukların oranı, 2022



Çizgi grafiğine göre çocuk nüfusunun toplam nüfusa oranının 2030 yılında %25,6, 2040 yılında %23,3, 2060 yılında %20,4 ve 2080 yılında %19,0 olacağı öngörülmüştür. Sütun grafiğinde ise çocuklarda yaş ilerledikçe diş fırçalama oranının arttığı sonucuna ulaşılabilir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

5.1. MERKEZÎ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİ

5.1.1. Merkezî Eğilim ve Yayılım Ölçülerini Hesaplayarak Yorumlama

Araştırma bir bilgi üretme işidir. Bir araştırma sonucu elde edilecek verilere genellikle dört farklı yoldan ulaşılabilir. Bunlar; yayınlanmış kaynaklar, tasarlanmış bir deneme, anket sonucu ve gözlem sonuçlarının toplanmasıdır.

Herhangi bir konuyu araştırmak için gözlemlerden elde edilen, sayısal olan ya da olmayan sonuçlara bilimsel araştırmalarda **veri** denir. Belirli bir aralıktaki tam sayı değerlerini alan verilere **kesikli veriler** denir. Kesikli verilere örnek olarak bir sınıftaki öğrenci sayısı, bir ildeki insan sayısı verilebilir. Ölçümle belirtilen ve bir aralıktaki tüm değerleri alabilen verilere **sürekli veriler** denir. Sürekli verilere örnek olarak bir insanın boyunun uzunluğu, yaşı, kilosu verilebilir.

Bir verinin toplanması, düzenlenmesi, değerlendirilmesi ve değerlendirmelerden sonuçlar çıkarılması gerekir.

Verilerin değerlendirilmesi ve değerlendirmelerden sonuçlar çıkarılması için bazı ölçülere ihtiyaç vardır. Bunlar merkezî eğilim ve yayılım ölçüleridir. Bu ölçüler bir veri ile ilgili genellemelere, karşılaştırmalara ve yorumlara olanak sağlar.

Biz burada bu ölçülerden bir kısmını inceleyip bunu bir veri ile ilgili elde edilen sonuçların değerlendirilmesinde kullanmaya çalışacağız.

Daha önceki yıllarda aritmetik ortalama, ortanca, tepe değer, en büyük değer, en küçük değer ve açıklık kavramlarını görmüştük. Şimdi bu kavramları hatırlayıp örneklerde kullanalım.

Örnek

87, 75, 20, 30, 65, 65, 100, 90, 80, 70, 70, 60, 60, 75, 75, 75, 25

Yukarıdaki veriler bir sınıftaki 17 öğrencinin matematik dersine ait notlarını göstermektedir. Bu verilere ait, en küçük değer, en büyük değer, açıklık, ortanca (medyan), tepe değer (mod) ve aritmetik ortalamayı bulalım.

Çözüm

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

20, 25, 30, 60, 60, 65, 65, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 80, 87, 90, 100

Tepe değeri (mod): 75

En küçük değeri : 20

En büyük değeri : 100

Ortanca (medyan) : 70

Açıklık = En büyük değer – En küçük değer = 100 – 20 = 80

Aritmetik Ortalama

$$\overline{X} = \frac{20+25+30+60+60+65+65+70+70+75+75+75+75+80+87+90+100}{17}$$

$\overline{X} = \dfrac{1122}{17} = 66$ bulunur.

Bilgi

1) Bir veri grubundaki verilerin toplamının veri sayısına bölümüne **aritmetik ortalama** denir. $\overline{X}$ ile gösterilir.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \quad \text{için} \quad \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

2) Bir veri grubundaki veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında ortadaki değere **ortanca (medyan)** denir.

   Veri sayısı tek ise ortanca ortadaki değerdir. Veri sayısı çift ise ortanca, ortadaki iki değerin aritmetik ortalamasına eşittir. Dolayısıyla ortanca veri grubu içinde yer alan bir değer olmak zorunda değildir.

3) Bir veri grubunda en çok tekrar eden değere **tepe değeri (mod)** denir.

   Verilerin her biri yalnız bir kez elde edilmişse mod yoktur. Bazı durumlarda birden çok mod olabilir.

   Aritmetik ortalama, ortanca (medyan) ve tepe değeri (mod) merkezî eğilim ölçüleridir.

4) Bir veri grubundaki en büyük sayıya **en büyük değer,** en küçük sayıya **en küçük değer** ve en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka da **açıklık** denir.

   En büyük değer, en küçük değer ve açıklık merkezî yayılım ölçüleridir.

Örnek

Bir marketin bir hafta boyunca sattığı günlük yumurta sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Günler						
	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
Satılan Yumurta Sayısı	320	300	345	335	310	315	330

Buna göre günlük satılan yumurta sayılarına ait en küçük değer, en büyük değer, ortanca, tepe değeri ve açıklığı bulalım.

Çözüm

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

300, 310, 315, 320, 330, 335, 345

Veri grubunun en büyük değeri 345, en küçük değeri 300'dür.

Açıklık = 345 – 300 = 45 elde edilir.

Ortadaki değer 320 olduğundan veri grubunun ortancası (medyan) 320'dir.

Veri grubunda tekrar eden sayı olmadığından tepe değeri (mod) yoktur.

Örnek

41, 43, 43, 43, 44, 46, 47, 47, 47, 48

Yukarıdaki veri grubunun ortanca (medyan) ve tepe değerini (mod) bulalım.

Çözüm

41, 43, 43, 43, 44, 46, 47, 47, 47, 48

En çok tekrar eden değerler üçer kezle 43 ve 47 olduğundan veri grubunun 43 ve 47 olmak üzere iki tane tepe değeri vardır. Ayrıca veriler çift sayıda olduğundan ortadaki iki değerin (44 ve 46) aritmetik ortalaması bize verilere ait ortancayı verir.

Ortanca = $\frac{44+46}{2}=\frac{90}{2}=45$ olarak elde edilir.

Örnek

Bir ilçedeki hastaneye bir hafta boyunca günlük kan veren kişi sayısı 15, 18, 18, 21, 18, 20, 23 olarak tespit edilmiştir. Bu verilere ait merkezî eğilim ölçülerini bulup sonucu yorumlayalım.

Çözüm

Aritmetik ortalama

$\overline{X}=\frac{15+18+18+21+18+20+23}{7}=\frac{133}{7}=19$ günde ortalama 19 kişi kan vermeye gitmiştir.

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

15, 18, 18, 18, 20, 21, 23

Ortadaki sayı 18 olduğundan ortanca 18'dir.

En fazla tekrar eden sayı 18 olduğundan tepe değeri 18'dir.

Üç gün boyunca aynı sayıda kişi kan vermek için hastaneye gitmiştir.

Bilgi

Aritmetik ortalama veri grubunun genel durumu hakkında bilgi verir.

Tepe değeri ve ortanca uç değerlerden aritmetik ortalamaya göre daha az etkilenir.

Örnek

Doktor Asiye Hanım bulunduğu bölgedeki sel felaketi sonrası ortaya çıkan bir bulaşıcı hastalığın kuluçka dönemini 9 kişi üzerinde gün olarak 6, 7, 8, 4, 8, 6, 8, 7, 9 olarak tespit etmiştir.

Bu verilere ait aritmetik ortalama, tepe değer ve ortancayı bulalım.

Çözüm

Aritmetik ortalama

$$\overline{X} = \frac{6+7+8+4+8+6+8+7+9}{9} = \frac{63}{9} = 7$$

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

4, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9 ortadaki sayı 7 olduğundan ortanca 7 olur.

En çok tekrar eden sayı 8 olduğundan tepe değer 8 olur.

Bulaşıcı hastalığın ortalama kuluçka dönemi 7 gün, üç kişide sekizer günle tekrar etmiştir.

Merkezî eğilim ölçüleri arasında tepe değer anketlerde öne çıkan bir ölçüdür.

Bilimsel verilerin analizinde ortanca daha kolay hesaplanabilir. Ancak sonuç çıkarmada daha az kullanılan bir ölçüdür. Aritmetik ortalama pek çok durumda merkezî eğilim ölçüsü olarak daha yaygın bir şekilde kullanılır.

Bilgi

Standart sapma merkezî yayılım ölçülerinden en yaygın kullanılanıdır. Verilerin ortalama etrafındaki yayılmasını ölçen bir ölçüdür. Tüm veriler aynı ise standart sapma sıfırdır. Veriler aritmetik ortalama etrafında ne kadar çok yayılmışsa standart sapma o kadar büyük olur.

Standart sapma S ile gösterilir ve aşağıdaki gibi elde edilir.

1) Veri grubunun aritmetik ortalaması bulunur.
2) Her bir veri ile aritmetik ortalamanın farkı bulunur.
3) Bulunan farkların her birinin karesi alınır ve bu değerler toplanır.
4) Bulunan toplam, veri sayısının bir eksiğine bölünür ve bulunan değerin karekökü alınır.

Örnek

11, 27, 33, 20, 19

Yukarıdaki verilere ait standart sapmayı bulalım.

Çözüm

Aritmetik ortalama

$$\overline{X} = \frac{11+27+33+20+19}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

Standart sapma

$$S = \sqrt{\frac{(22-11)^2+(22-27)^2+(22-33)^2+(22-20)^2+(22-19)^2}{5-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{11^2+(-5)^2+(-11)^2+2^2+3^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{121+25+121+4+9}{4}}$$

$= \sqrt{70} \approx 8,36$ olarak elde edilir.

Örnek

Ameliyat olmaya karar veren Erdinç Bey, aynı tür ameliyatı gerçekleştiren iki cerrahın ameliyat sonrası hastaların iyileşme sürelerini aşağıdaki gibi tespit etmiştir.

	Hastaların İyileşme Süreleri (Gün)				
1. Cerrah	32	50	18	30	70
2. Cerrah	35	40	45	40	40

Buna göre hastaların iyileşme sürelerine bakarak hangi cerrahın Erdinç Bey'i ameliyat etmesinin daha uygun olacağını belirleyelim.

Çözüm

Hastaların iyileşme sürelerinin aritmetik ortalamasını bulalım.

1. cerrah

$$\overline{X} = \frac{32+50+18+30+70}{5} = \frac{200}{5} = 40$$

2. cerrah

$$\overline{X} = \frac{35+40+45+40+40}{5} = \frac{200}{5} = 40$$

Bu durumda Erdinç Bey aritmetik ortalamaya bakarak bir karar veremez. Verilere ait standart sapmalara bakalım.

1. cerrah

$$S = \sqrt{\frac{(40-32)^2+(40-50)^2+(40-18)^2+(40-30)^2+(40-70)^2}{5-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{8^2+(-10)^2+22^2+10^2+(-30)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{64+100+484+100+900}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1648}{4}} = \sqrt{412} \approx 20,3$$

2. cerrah

$$S = \sqrt{\frac{(40-35)^2+(40-40)^2+(40-45)^2+(40-40)^2+(40-40)^2}{5-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{5^2+0^2+(-5)^2+0^2+0^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{25+0+25+0+0}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{50}{4}} \approx 3,54 \text{ bulunur.}$$

2. cerrahın ameliyat ettiği hastaların iyileşme sürelerine ait standart sapma daha düşük, iyileşme süreleri birbirine daha yakın değerler aldığından Erdinç Bey'in 2. cerraha ameliyat olması daha uygun olacaktır.

PEKİŞTİRME SORULARI

1. 76, 83, 80, 100, 79, 98, 81

Yukarıdaki verilere ait aritmetik ortalama, ortanca, tepe değer, en küçük değer, en büyük değer ve açıklığı bulunuz.

2. 4, 8, 9, 11, 6, 10

Yukarıdaki veri grubundan hangi sayı çıkarılırsa kalan sayıların aritmetik ortalaması değişmez?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

3. Çift sayıdaki bir miktar verinin aritmetik ortalaması A dır. Bu verilerin yarısından 5 çıkarılır, diğer yarısına 5 eklenirse son durumda aritmetik ortalama aşağıdakilerden hangisine eşit olur?

A) A + 5 B) A + 3 C) A D) A – 3 E) A – 5

4. Bir okul yönetimi öğrencilerin gezi için müzeye mi yoksa yaşlılar yurduna mı gitmek istediğini öğrenmek için bir anket düzenlemek istemektedir.

Buna göre okul yöneticileri aşağıdaki ölçülerden hangisini kullanırsa daha uygun olur?

A) Aritmetik ortalama
B) Ortanca
C) Tepe değer
D) Standart sapma
E) Açıklık

5. 16, 18, 19, 19, 23 sayılarının standart sapması aşağıdakilerden hangisine en yakındır?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

Bir futbol takımı aynı yaştaki 3 golcü futbolcudan birini transfer etmek istemektedir. Bunun için futbolcuların son 5 sezonda attıkları gol sayılarını inceleyerek karar vereceklerdir. Bu futbolcuların son 5 sezonda attıkları gol sayıları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	1. Sezon	2. Sezon	3. Sezon	4. Sezon	5. Sezon
1. futbolcu	10	15	33	17	20
2. futbolcu	21	19	18	18	19
3. futbolcu	15	20	15	27	18

Her üç futbolcu son 5 sezonda aynı sayıda kırmızı ve sarı kart gördüklerine göre bu kulübün hangi futbolcuyu transfer etmesinin sportif açıdan daha uygun olacağını belirleyiniz.

7. I. Standart sapma negatif olamaz.

II. Bir veri grubunda tepe değer olmayabilir.

III. Aritmetik ortalama veri grubu içinde yer alan bir değerdir.

Yukarıdaki ifadelerden hangisi veya hangileri kesinlikle doğrudur?

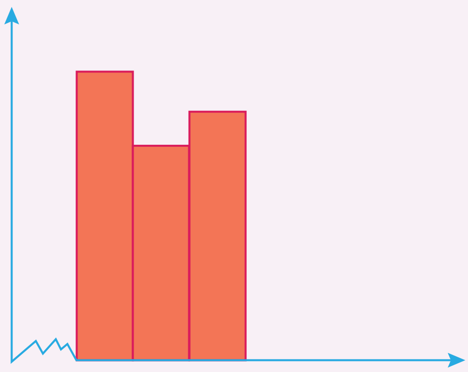
A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

5.2. VERİLERİN GRAFİKLE GÖSTERİLMESİ

5.2.1. Bir Veri Grubuna Ait Histogram

Bilgi

Gruplandırılmış bir veri dağılımının sütun grafiğiyle gösterimine **histogram** denir. Histogram genelde sürekli verilerin gösteriminde kullanılır. Histogramın sütun grafiğiyle arasındaki temel fark histogramda sütunlar arasında boşluk bırakılmamasıdır.



Histogram çizimi için aşağıdaki adımlar takip edilir.

1) Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır.
2) Açıklık bulunur.
3) Grup sayısı belirlenir. (Grup sayısı araştırma yapan kişiye göre değişir.)
4) Grup genişliği belirlenir.

   Grup genişliği, $\dfrac{\text{Açıklık}}{\text{Grup Sayısı}}$ değerinden büyük en küçük doğal sayı olarak alınır.
5) Veriler en küçük veriden başlayarak grup genişliğine göre gruplara ayrılır.
6) Oluşturulan gruplar ve gruplardaki veri sayıları tablo hâlinde düzenlenir.
7) Tabloya bakılarak histogram çizilir.

Örnek

9–A sınıfındaki 32 öğrencinin boy uzunlukları cm cinsinden verilmiştir. 163, 162, 170, 166, 178, 181, 188, 180, 169, 173, 183, 181, 163, 161, 159, 173, 166, 177, 175, 184, 180, 162, 164, 168, 170, 177, 179, 185, 178, 174, 175, 167

Bu verilere ait histogramı oluşturalım.

Çözüm

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

159, 161, 162, 162, 163, 163, 164, 166, 166, 167, 168, 169, 170, 170, 173, 173, 174, 175, 175, 177, 177, 178, 178, 179, 180, 180, 181, 181, 183, 184, 185, 188

Açıklık = 188 – 159 = 29

Grup sayısını 6 olarak belirleyelim.

$$\frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup sayısı}} = \frac{29}{6} = 4,8\overline{3} \text{ olur.}$$

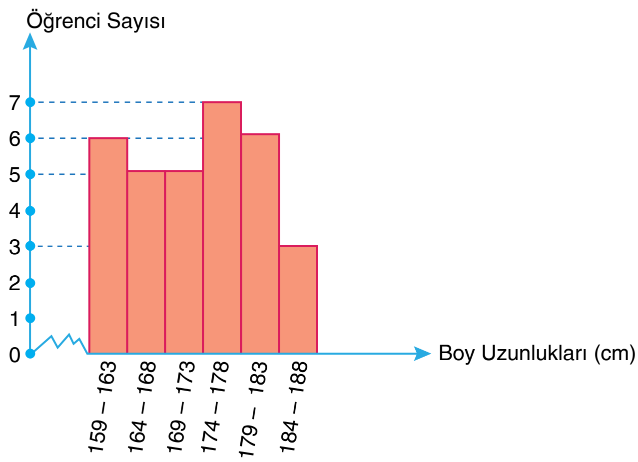
Bu sayıdan büyük en küçük doğal sayı 5 olduğundan grup genişliği 5 olur. Bu verileri aşağıdaki gibi tablo olarak gösterip histogramı oluşturalım.

Tablo: 9 – A Sınıfı Öğrencilerinin Boy Uzunlukları

Öğrencilerin Boyları Uzunlukları (cm)	Öğrenci Sayısı	Öğrenci Sayısı
159–163	卌 |	6
164–168	卌	5
169–173	卌	5
174–178	卌 ||	7
179–183	卌 |	6
184–188	|||	3

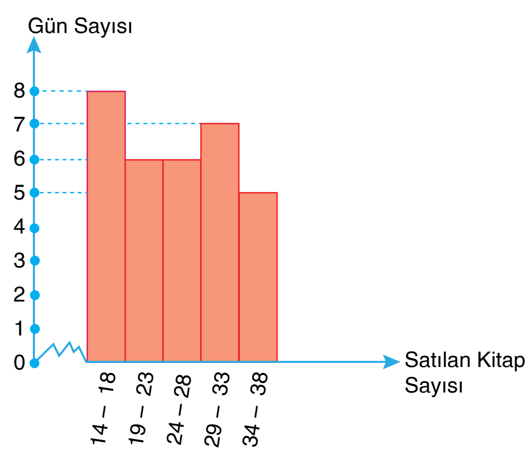
Şimdi de histogramı oluşturalım.

Grafik: 9 – A Sınıfı Öğrencilerinin Boy Uzunlukları



Örnek

Grafik: 32 Günde Satılan Kitap Sayısı



Yandaki histogram bir kitapçıda 32 günde satılan kitap sayısına aittir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a) Histogramda grup sayısı kaçtır?

b) Grup genişliği kaçtır?

c) 28 den çok kitap satılan gün sayısı kaçtır?

Çözüm

a) Sütün sayısı grup sayısına eşit olduğundan grup sayısı 5’tir.

b) Grup genişliği 18 – 14 + 1 = 5 olarak bulunur.

c) 29–33 arası satılan kitap sayısına ait gün sayısı 7, 34–38 arası satılan kitap sayısına ait gün sayısı 5 olduğu için 28’den çok kitap satılan gün sayısı 7 + 5 = 12 olarak bulunur.

PEKİŞTİRME SORULARI

1.

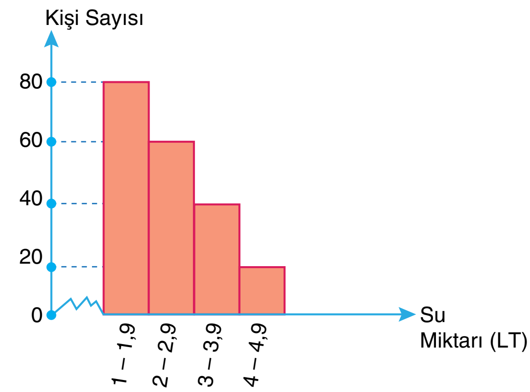
1990 – 2016 yılları arasında sırasıyla yıllara göre ülkemizdeki halk kütüphanesi sayısı aşağıdaki gibidir.

914, 954, 1004, 1094, 1147, 1171, 1206, 1233, 1259, 1292, 1340, 1350, 1275, 1350, 1367, 1144, 1178, 1162, 1156, 1149, 1136, 1118, 1112, 1118, 1121, 1130, 1337

Kaynak: TÜİK, Kültür İstatikleri

Bu verilere ait histogramı oluşturunuz.

2. **Grafik:** 9. Sınıf Öğrencilerinin Bir Günde Tükettikleri Su Miktarı



Yukarıda verilen histogram bir lisedeki 9. sınıf öğrencilerinin bir günde tükettikleri su miktarını göstermektedir.

Buna göre

a) Histogramın grup genişliği kaçtır?

b) Grup sayısı kaçtır?

c) Günlük 3 litreden az su tüketen öğrenci sayısı kaçtır?

ç) Günlük 2 litreden fazla su tüketen öğrenci sayısı kaçtır?

d) Okulda kaç tane 9. sınıf öğrencisi vardır?

5.2.2. Gerçek Hayat Durumunu Yansıtan Veri Gruplarını Uygun Grafik Türleriyle Temsil Ederek Yorumlama

Bilgi

1) **Çizgi grafiği**, sürekli verilerin yatay ve düşey eksendeki değerleri işaretlenerek bulunan noktaların düz çizgilerle birleştirilmesi sonucu elde edilen grafik türüdür. Genelde sürekli veriler için kullanılır.
Çizgi grafiği daha çok iki değişken arasındaki artma ve azalma eğilimini göstermek için kullanılır.

2) **Daire grafiği**, elde edilen verilerin daire dilimleri biçiminde gösterildiği grafik türüdür. Değişkenlerin bir bütün içerisindeki oranları yüzde veya merkez açı ölçüleri gösterilerek hazırlanır.
Daire grafiği genelde bir verinin bütün içindeki yerinin ağırlığı için kullanılır.

3) **Sütun grafiği**, toplanan verilerin sütun biçiminde gösterildiği grafiklerdir. İstenen değerler yatay veya düşey olarak sütun veya çubuklarla gösterilir. Genelde kesikli veriler için kullanılır.
Sütun grafiği daha çok veri gruplarını karşılaştırmak ve gruplar arasında oranlama yapmak için kullanılır.

Örnek

Aşağıdaki tabloda bir ilçede bir hafta boyunca günlük ölçülen en yüksek hava sıcaklığı gösterilmektedir.

Tablo: Günlük En Yüksek Sıcaklık Değerleri

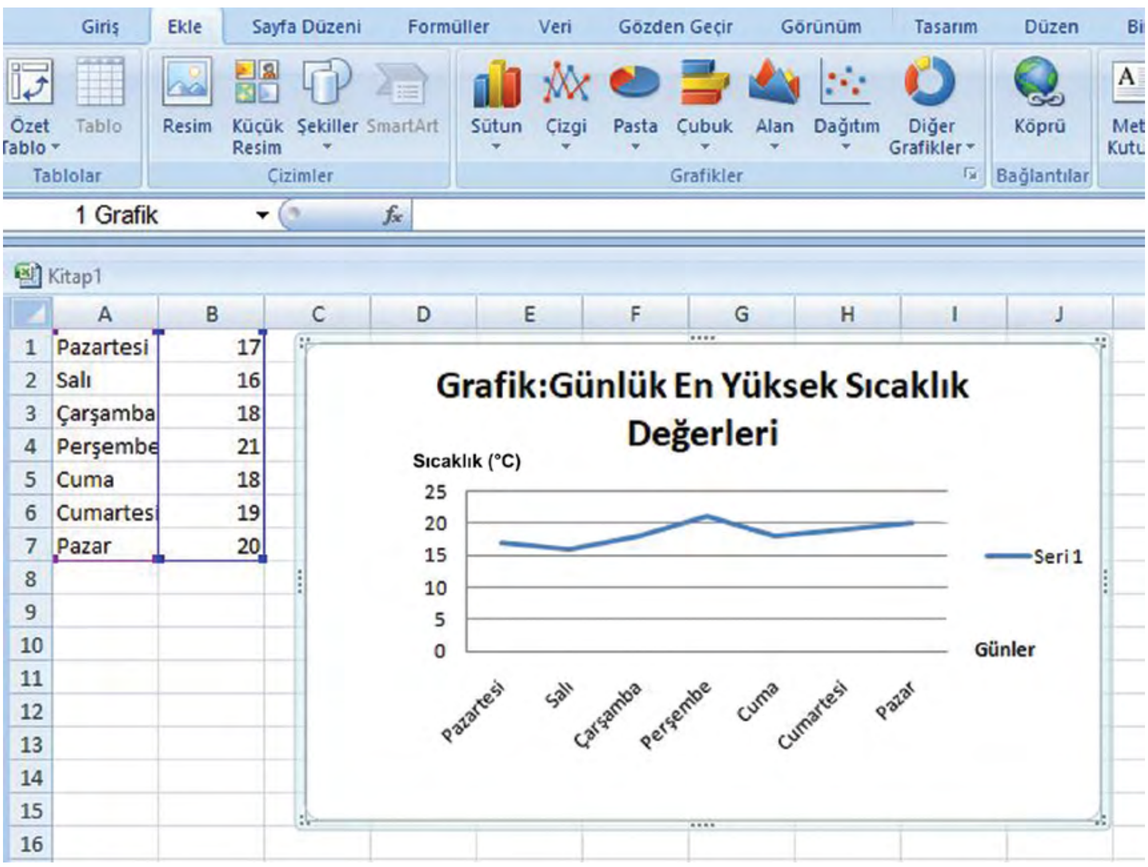
	Günler						
	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
Sıcaklık (°C)	17	16	18	21	18	19	20

Bu verileri yorumlayıp uygun grafik türünü belirleyerek grafiği elektronik tablolama programı yardımıyla oluşturalım.

Çözüm

Sıcaklık değerleri en yüksek değerler olup gün içindeki en düşük ve en yüksek sıcaklık değerlerin arasındaki tüm değerleri alabileceğinden verilere uygun grafik türü çizgi grafiğidir.

Grafiği oluşturmak için elektronik tablolama programını açalım ve verileri aşağıdaki gibi yerleştirelim. Programda birinci sütuna sıra ile günleri, ikinci sütuna da sıcaklık değerlerini yazalım. Daha sonra “Ekle” ve “Çizgi” seçeneklerini sıra ile seçtiğimizde grafik aşağıdaki gibi elde edilir.



Grafiği incelediğimizde ilçede bir hafta boyunca günlük sıcaklık değerlerinin birbirine yakın olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek

Aşağıdaki tabloda bir bölgeye mayıs–ekim aylarında gelen turist sayısı gösterilmiştir.

Tablo: Mayıs–Ekim Ayları Arasında Gelen Turist Sayıları

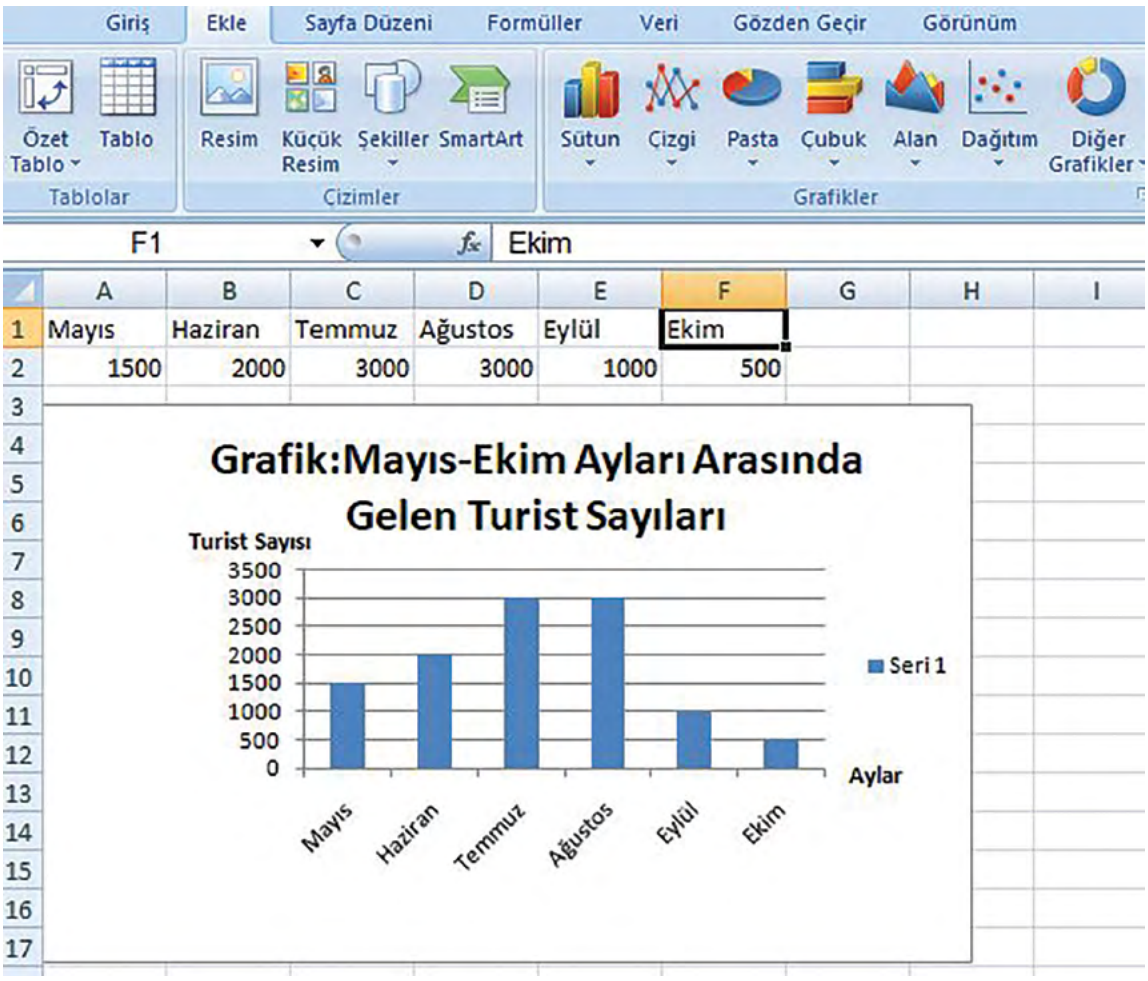
	Aylar					
	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim
Turist Sayısı	1500	2000	3000	3000	1000	500

Bu verileri yorumlayıp uygun grafik türünü belirleyerek grafiği elektronik tablolama programı yardımıyla oluşturalım.

Çözüm

Turist sayısı kesikli veri olduğundan verilere uygun grafik türü sütun grafiğidir.

Grafiği oluşturmak için elektronik tablolama programını açalım ve verileri aşağıdaki gibi yerleştirelim. Programda birinci satıra sıra ile ayları ikinci satıra da turist sayısını yazalım daha sonra "Ekle" ve "Sütun" seçeneklerini sıra ile seçtiğimizde grafik aşağıdaki gibi elde edilir.



Grafiği incelediğimizde en fazla turistin temmuz ve ağustos aylarında, en az turistin ise ekim ayında geldiğini söyleyebiliriz.

Örnek

Aşağıdaki tabloda bir lisedeki 720 öğrencinin sınıflara göre dağılımı gösterilmektedir.

Tablo: Öğrencilerin Sınıflara Göre Dağılımı

	Sınıflar			
	9. Sınıf	10. Sınıf	11. Sınıf	12. Sınıf
Öğrenci Sayıları	210	200	180	130

Bu verilere ait daire grafiğini oluşturalım.

Çözüm

Toplam öğrenci sayısı 720'dir. Daire grafiğini oluşturmak için her bir sınıftaki öğrenci sayısını temsil eden merkez açısının ölçüsünü belirleyelim.

Öğrenci sayısı 720 olduğundan tüm öğrenci sayısına karşılık gelen merkez açının ölçüsü 360°dir.

Buna göre

$\overset{1}{\cancel{360}}° \cdot \dfrac{210}{\underset{2}{\cancel{720}}} = \dfrac{210}{2} = 105 \longrightarrow$ 9. sınıf öğrenci sayısını temsil eden merkez açının ölçüsü 105°dir.

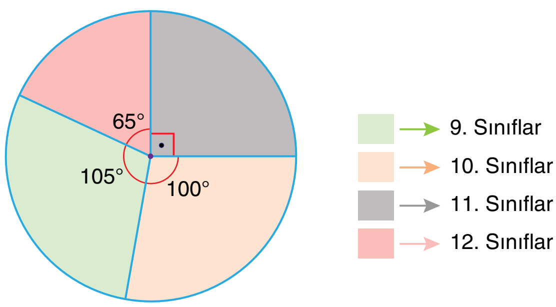
$\overset{1}{\cancel{360}}° \cdot \dfrac{200}{\underset{2}{\cancel{720}}} = \dfrac{200}{2} = 100 \longrightarrow$ 10. sınıf öğrenci sayısını temsil eden merkez açının ölçüsü 100°dir.

$\overset{1}{\cancel{360}}° \cdot \dfrac{180}{\underset{2}{\cancel{720}}} = \dfrac{180}{2} = 90 \longrightarrow$ 11. sınıf öğrenci sayısını temsil eden merkez açının ölçüsü 90°dir.

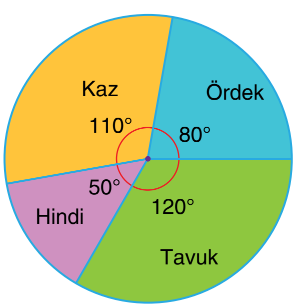
$\overset{1}{\cancel{360}}° \cdot \dfrac{130}{\underset{2}{\cancel{720}}} = \dfrac{130}{2} = 65 \longrightarrow$ 12. sınıf öğrenci sayısını temsil eden merkez açının ölçüsü 65°dir.

Yapılan işlemlerden sonra verilere ait daire grafiği aşağıdaki biçimde elde edilir.

Grafik: Öğrenci Sayılarının Sınıflara Göre Dağılımı



Örnek



Yanda verilen daire grafiğinde bir kümeste bulunan hayvanların dağılımı gösterilmiştir. Kümeste 45 tane hindi olduğuna göre kümeste her bir hayvandan kaçar tane olduğunu bulalım.

Çözüm

Hayvan sayısı gösterildiği merkez açı ölçüsüyle orantılıdır. Bu durumda kümeste,

$$\left.\begin{array}{ll} 50° & 45 \text{ hindi} \\ 110° & x \text{ kaz} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\overset{11}{\cancel{110}} \cdot 45}{\underset{5}{\cancel{50}}} = \frac{11 \cdot \overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 99 \text{ tane kaz}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 50° & 45 \text{ hindi} \\ 120° & y \text{ tavuk} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{\overset{12}{\cancel{120}} \cdot 45}{\underset{5}{\cancel{50}}} = \frac{12 \cdot \overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 108 \text{ tane tavuk}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 50° & 45 \text{ hindi} \\ 80° & z \text{ ördek} \end{array}\right\} \Rightarrow z = \frac{\overset{8}{\cancel{80}} \cdot 45}{\underset{5}{\cancel{50}}} = \frac{8 \cdot \overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 72 \text{ tane ördek vardır.}$$

Örnek

Dörtte üçü sularla çevrili olmasına rağmen yalnız %3'ü kullanma suyu olan dünyamızın, yakın gelecekte en büyük sorunu kuraklık olacaktır. Yurdumuzun üç yanı denizlerle çevrili, her tarafında nehirler, dereler, su kaynakları olsa da Türkiye kullanılabilir su miktarı bakımından maalesef fakir ülkeler arasında yer alıyor. Evlerde suyun %35'i banyoda, %30'u tuvalette, %20'si çamaşır ve bulaşık yıkamada, %10'u yemek pişirmede ve içme suyu olarak %5'i ise temizlik maksadıyla kullanılmaktadır.

Su sağlıktır ve ekonomik bir değerdir. Bu değeri aşağıdaki pratik yöntemleri uygulayarak koruyabiliriz.

A– Tıraş olurken, diş fırçalarken kapatılan musluklardan kişi başına yılda 12 ton su,

B– Duş süresini bir dakika azalttığımızda yılda kişi başına 18 ton su,

C– Bulaşıkları elde değil de makinede yıkadığımızda yılda ortalama 40 ton su,

D– Sebze ve meyveleri elde yıkamak yerine su dolu bir kapta yıkadığımızda 4 kişilik bir ailede bu yöntemle yılda ortalama 18 ton su kurtarılabilir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Aşağıda Yılmaz, Durak ve Bozkurt ailelerinin yukarıda belirtilen maddeleri uygulayarak yaptıkları su tasarrufu ile ilgili tablo verilmiştir.

Tablo: Yılmaz, Durak ve Bozkurt Ailelerinin Bir Yılda Yaptıkları Su Tasarrufu

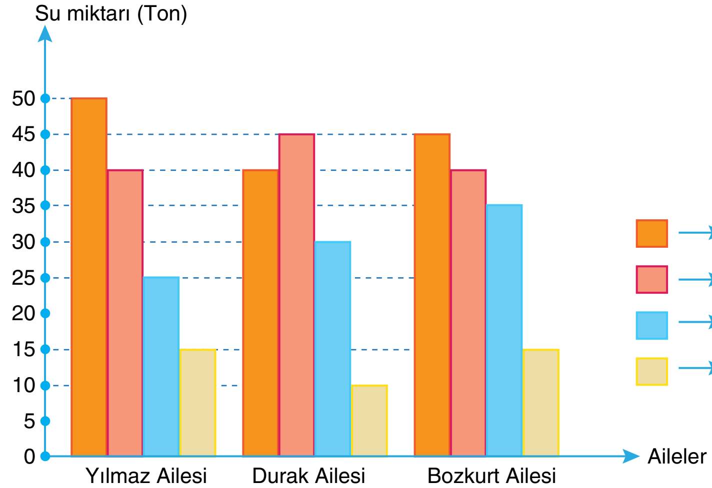
	Bir Yılda Tasarruf Edilen Su (ton)			
Aileler	A	B	C	D
Yılmaz Ailesi	50	40	25	15
Durak Ailesi	40	45	30	10
Bozkurt Ailesi	45	40	35	15

Buna göre tablodaki verileri yorumlayıp uygun grafik ile gösterelim.

Çözüm

Tablodaki veriler kesikli veri olduğundan sütun grafiği ile göstermek uygun olacaktır.

Grafik: Yılmaz, Durak ve Bozkurt Ailelerinin Bir Yılda Yaptıkları Su Tasarrufu



Grafiği incelediğimizde bir yılda Yılmaz ailesi A maddesinden, Durak ailesi B maddesinden, Bozkurt ailesinin de C maddesinden diğer ailelerden daha fazla su tasarrufu sağladığını görürüz.

Örnek

Yanda verilen grafik bir ülkenin yıllara göre arpa ve buğday üretimini göstermektedir.

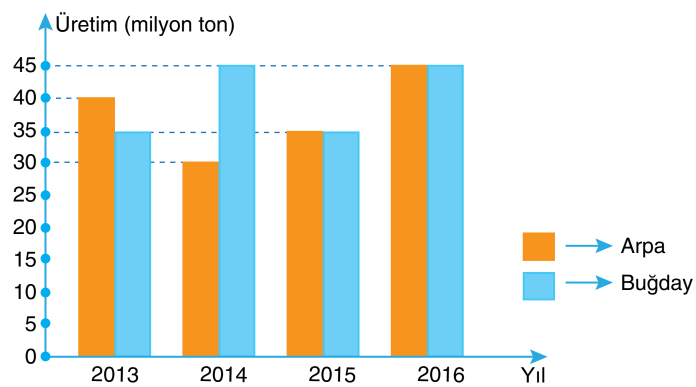
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a) 2013 – 2016 yılları arasında toplam kaç ton buğday üretilmiştir?

b) Hangi yıllarda üretilen buğday ve arpa üretimleri eşittir?

c) 2014 yılında üretilen buğday miktarı arpa miktarından kaç ton fazladır?

Grafik: Bir Ülkenin Yıllara Göre Arpa ve Buğday Üretimi



Çözüm

a) Yıllara göre üretilen buğday miktarlarını toplayalım.

2013 yılı ⟶ 35 milyon ton
2014 yılı ⟶ 45 milyon ton
2015 yılı ⟶ 35 milyon ton
2016 yılı ⟶ 45 milyon ton

Toplam 35 + 45 + 35 + 45 = 160 milyon ton buğday

b) 2015 ve 2016 yıllarında üretilen arpa ve buğday miktarları eşittir.

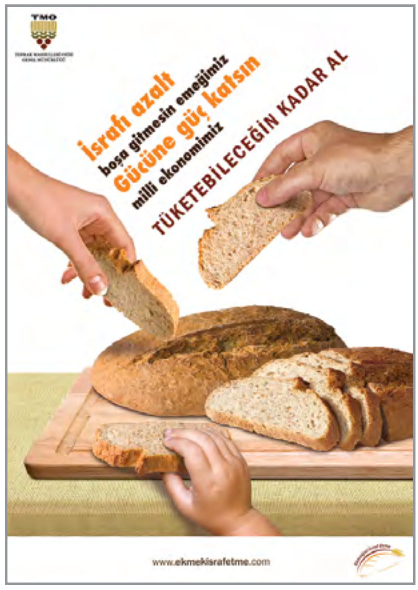
c) 2014 yılında 45 milyon ton buğday, 30 milyon ton arpa üretimi yapıldığından 45 – 30 = 15, 15 milyon ton daha fazla buğday üretilmiştir.

Örnek

Toprak Mahsulleri Ofisi (TMO) verilerine göre ülkemizde üretilen ekmeğin %5,9’u israf edilmektedir.

Yapılan araştırmalarda;

- Ekmek üretiminin günde 101 milyon, yılda 37 milyar adet,
- Ekmek tüketiminin günde 95 milyon, yılda 35 milyar adet,
- Ekmek israfının günde 6 milyon, yılda 2 milyar adet,
- Kişi başı günlük ekmek israfının da 20 gram olduğu ortaya çıkartılmıştır.



Tablo: Bayat Ekmeklerin Değerlendirme Biçimleri

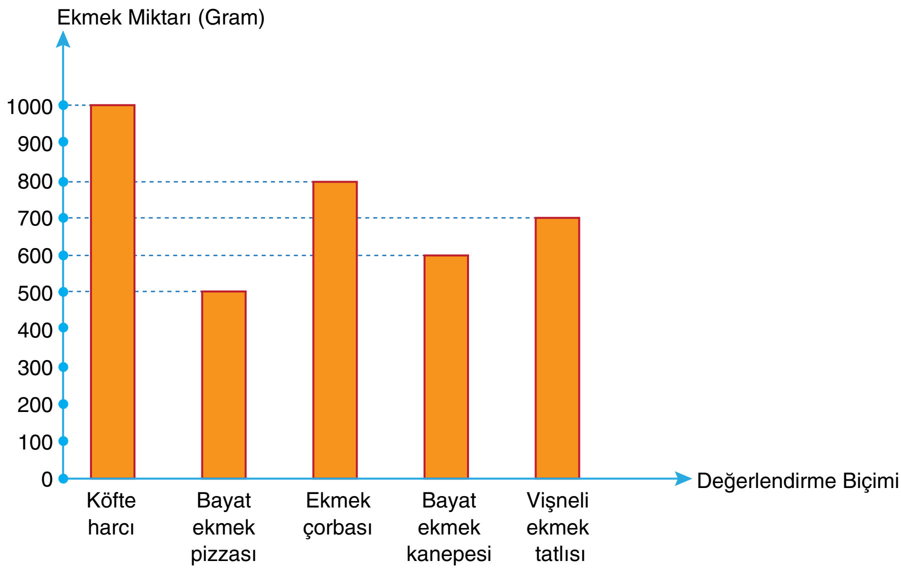
	Değerlendirme Biçimi				
	Köfte harcı	Bayat ekmek pizzası	Ekmek çorbası	Bayat ekmek kanepesi	Vişneli ekmek tatlısı
Ekmek miktarı (gram)	1000	500	800	600	700

Yukarıdaki tabloda Kaya ailesinin ekmek israfını önlemek amacıyla bayat ekmekleri bir ay boyunca değerlendirme biçimleri ve ekmek miktarları belirtilmiştir. Buna göre bu verileri uygun grafikle gösterelim.

Çözüm

Veriler kesikli olduğundan sütun grafiği ile gösterilebilir.

Grafik: Bayat Ekmek Değerlendirme Biçimleri



PEKİŞTİRME SORULARI

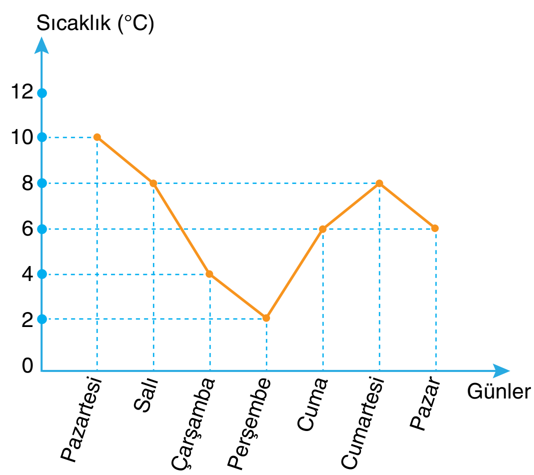
1. Aşağıdaki tabloda bir okuldaki 240 öğrencinin yaptıkları sporlara göre dağılımı verilmiştir.

Tablo: Okuldaki Öğrencilerin Yaptıkları Sporlara Göre Dağılımı

Spor Dalı	Öğrenci Sayısı
Yüzme	56
Basketbol	60
Tenis	18
Voleybol	58
Futbol	48

Buna göre verilere ait daire grafiğini oluşturunuz.

2. **Grafik:** Ölçülen En Yüksek Sıcaklık



Yukarıdaki grafik bir bölgede bir hafta boyunca ölçülen en yüksek sıcaklık değerlerini göstermektedir.

Grafiğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) En yüksek sıcaklık değeri hangi gün ölçülmüştür?

b) Hangi günler sıcaklık değerleri eşittir?

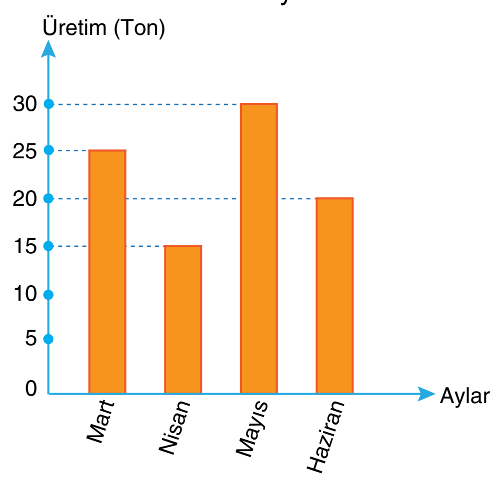
3. Aşağıdaki tabloda A, B, C ailelerinin 2015, 2016, 2017 yıllarında yaptıkları su tasarrufları gösterilmiştir.

Tablo: Ailelerin Yaptıkları Su Tasarrufları

	Yapılan Su Tasarrufu (Ton)		
Aileler	2015	2016	2017
A	80	85	90
B	75	80	70
C	70	95	80

Buna göre verileri yorumlayarak uygun grafik ile gösteriniz.

4. **Grafik:** Bir Fabrikanın Aylık Üretimi



Yukarıdaki grafik bir fabrikanın aylık üretimini göstermektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Fabrika mayıs ayında kaç ton üretim yapmıştır?

b) Fabrikanın mart ayında yaptığı üretim haziran ayında yaptığı üretimden kaç ton fazladır?

c) Fabrika 4 ayda toplam ne kadar üretim yapmıştır?

5. BÖLÜM ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başını "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

(......) Bir veri grubunda en çok tekrar eden değere tepe değeri denir.

(......) Bir veri grubunda yalnız bir tane tepe değeri olmak zorundadır.

(......) Belirli bir aralıktaki tam sayı değerlerini alan verilere kesikli veriler denir.

(......) Bir veri grubundaki verilerin toplamının veri sayısına bölümüne aritmetik ortalama denir.

2. I. Aritmetik ortalama, açıklık ve ortanca merkezî eğilim ölçüleridir.

II. Standart sapma ne kadar büyük olursa veriler ortalama etrafında o kadar çok yayılmıştır.

III. Bir veri grubunda aritmetik ortalama bir tanedir.

IV. Tüm veriler eşit ise bu verilere ait standart sapma sıfırdır.

V. Tepe değeri bir merkezî eğilim ölçüsüdür.

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Sevda'nın I. dönem bazı notlarının ortalaması aşağıdaki gibidir.

73, 46, 35, 57, 61, 70, 70, 85, 100

Sevda'nın not ortalamalarının açıklığı a, ortancası b ve tepe değeri c olduğuna göre a + b + c toplamı kaçtır?

A) 185 B) 190 C) 195 D) 200 E) 205

4. 40, 60, 50, 70, 80

Yukarıdaki veri grubundan 60'ı çıkarırsak aritmetik ortalama ve standart sapma için aşağıdakilerden hangisi doğru olur?

	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma
A)	Büyür	Büyür
B)	Değişmez	Büyür
C)	Değişmez	Küçülür
D)	Küçülür	Değişmez
E)	Değişmez	Değişmez

5. 5, 7, 6, k, 8, 9

Yukarıdaki verilerin tepe değeri 7 olduğuna göre k kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6. Bir grupta 20 kız ve 30 erkek öğrenci vardır. Kızların kütlelerinin ortalaması 50, erkeklerin kütlelerinin ortalaması 60 olduğuna göre gruptaki öğrencilerin kütlelerinin ortalaması kaçtır?

A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

7. 4, 3, 7, 5, 6

Yukarıdaki veri grubunun standart sapması kaçtır?

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{\frac{10}{3}}$ D) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ E) 3

8. Aşağıdaki veri gruplarından hangisinin standart sapması en düşüktür?

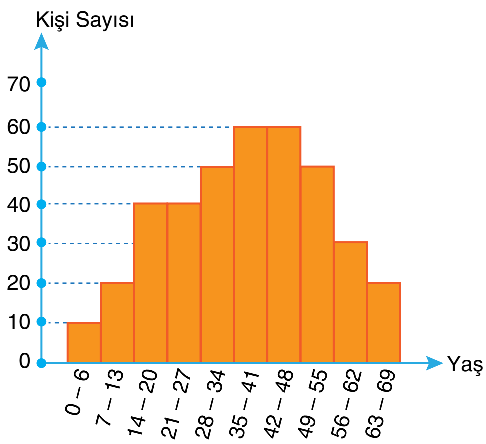
A) 5, 6, 7 B) 3, 5, 8 C) 4, 4, 7 D) 9, 10, 14 E) 80, 100, 120

9. Bir ailedeki bireylerin kütlelerinin en düşük değeri 25 kg en büyük değeri 94 kg olduğuna göre sadece bu bilgi kullanılarak aşağıdakilerden hangisi hesaplanabilir?

A) Standart sapma
B) Aritmetik ortalama
C) Ortanca
D) Tepe değer
E) Açıklık

10. Aşağıdaki grafik bir mahallede oturan insanların yaşlarını göstermektedir.

Grafik: Bir Mahallede Oturan İnsanların Yaşları



Buna göre

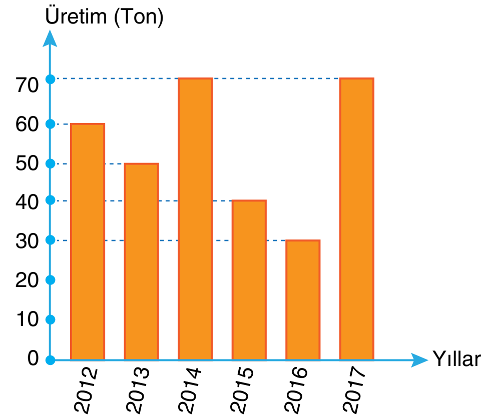
a) Veri grubunun genişliği kaçtır?
b) 35 – 62 yaş aralığında toplam kaç kişi vardır?
c) En küçük yaş grubunda kaç kişi vardır?

11. 5 tane verinin olduğu bir veri grubundaki verilerin her birine 7 eklersek bu veri grubuna ait ölçülerden hangisi değişmez?

A) Aritmetik ortalama
B) Standart sapma
C) Ortanca
D) Tepe değer
E) En büyük değer

12. Aşağıdaki grafik bir çiftçinin yıllık arpa üretimini göstermektedir.

Grafik: Bir Çiftçinin Yıllık Arpa Üretimi



Buna göre hangi yıllarda üretilen arpa (ton) miktarları eşittir?

A) 2014 – 2017
B) 2012 – 2017
C) 2013 – 2014
D) 2013 – 2016
E) 2015 – 2016

13. Aşağıda 10 öğrencinin evlerinin okullarına uzaklıkları verilmiştir.

Öğrenciler	Evlerin Okullara Olan Uzaklıkları (km)
Ezgi	6
Damla	4
Hacer	3
Hatice	5

Bu verileri bir daire grafiğinde gösterecek olursanız Hacer'e ait verinin gösterildiği daire diliminin merkez açısının ölçüsü kaç derece olur?

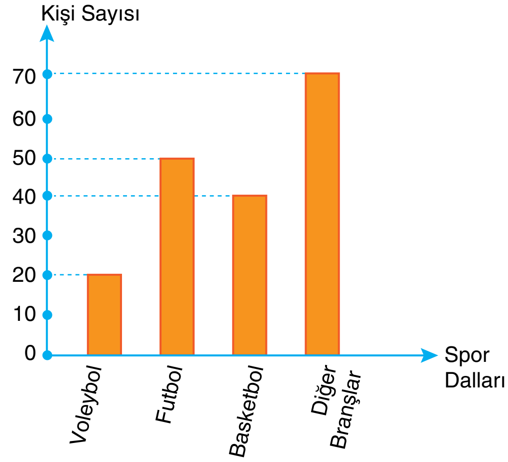
A) 30 B) 45 C) 60 D) 80 E) 100

14. 4, 7, 8, 5, 7, 4, 7 veri grubunun mod, medyan ve açıklığının aritmetik ortalaması kaçtır?

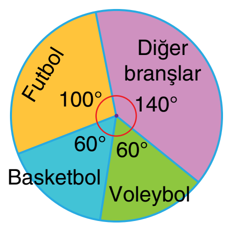
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

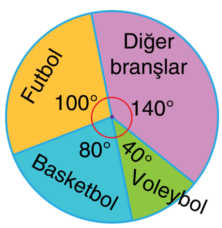
15. Aşağıda bir okuldaki 180 öğrencinin uğraştığı spor dalları verilmiştir.

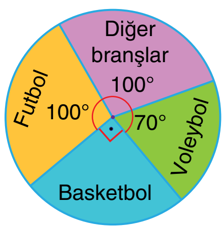
Grafik: Bir Okuldaki Öğrencilerin Uğraştığı Spor Dalları

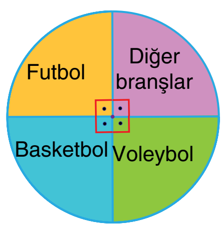


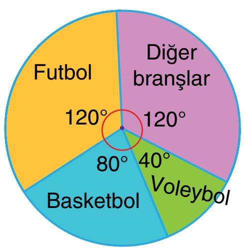
Buna göre bu verilerin daire grafiğinde gösterimi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

16. 15, 5, 21, 23, 30, x sayı dizisinin açıklığı 27 olduğuna göre x'in alacağı değerler toplamı kaçtır?

A) 23 B) 30 C) 35 D) 41 E) 47

17. Selçuk ve Nesrin'in matematik dersinden aldıkları notlar aşağıda verilmiştir.

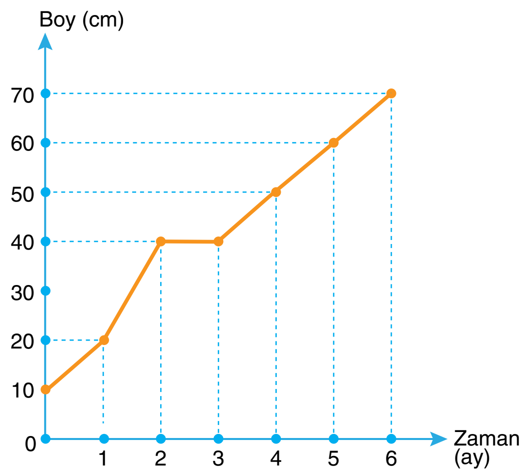
Selçuk	Nesrin
60, 70, 80, 90	60, 60, 80, 100

Bir matematik yarışmasına hangi öğrencinin gönderilmesi daha uygun olur?

18. Günde 4 saat test çözen Selin, günlük aktivitelerini daire grafiği ile gösterecek olursa test çözme süresini kaç derecelik dilimle göstermelidir?

A) 30 B) 45 C) 60 D) 80 E) 100

19. **Grafik:** Bir Bitkinin Altı Aylık Boy – Zaman Değişimi



Yukarıdaki grafik bir bitkinin altı aylık boy - zaman arasındaki değişimini göstermektedir.

Buna göre

a) Hangi aylar arasında bitkinin boyunda değişiklik olmamıştır?

b) En çok hangi aylar arasında bitkinin boyu uzamıştır?

c) Bitkinin boyu altı ay içinde aylık ortalama ne kadar uzamıştır?

20. Bütün verileri birbirine eşit olan grubun standart sapması kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

CEVAP ANAHTARI

1. BÖLÜM

1. E	**5.** A	**9.** D	**13.** D	**17.** A	**21.** E	**25.** D, D, Y, Y
2. C	**6.** D	**10.** B	**14.** C	**18.** E	**22.** C	**26.** A
3. B	**7.** E	**11.** D	**15.** B	**19.** C	**23.** B	
4. D	**8.** B	**12.** E	**16.** A	**20.** C	**24.** B	

2. BÖLÜM

1. D	**6.** B	**12.** E	**18.** A	**24.** A	**28.** A	**33.** D
2. B	**7.** C	**13.** E	**19.** D	**25.** B	**29.** D, Y, Y, Y, D, D, D,	**34.** C
3. D, D,	**8.** E	**14.** A	**20.** C	**26.** C	Y, D, Y, D, Y	**35.** B
Y, Y	**9.** A	**15.** B	**21.** D	**27.** a) {c, d, e, f}	**30.** B	**36.** D
4. C	**10.** C	**16.** C	**22.** B	b) {c, d, e, f, 1, 2, 3, 4, 9}	**31.** E	**37.** B
5. E	**11.** D	**17.** E	**23.** E	c) {1, 2, 3, 4, a, b, c, e, f}	**32.** A	**38.** C

3. BÖLÜM

1. B	**9.** D	**17.** A	**25.** A	**33.** B	**41.** B	**49.** A	**57.** C
2. A	**10.** E	**18.** C	**26.** C	**34.** D	**42.** C	**50.** C	**58.** E
3. D	**11.** D	**19.** E	**27.** E	**35.** C	**43.** D	**51.** B	**59.** A
4. A	**12.** A	**20.** D	**28.** A	**36.** E	**44.** A	**52.** E	**60.** B
5. E	**13.** B	**21.** B	**29.** B	**37.** B	**45.** D	**53.** C	**61.** C
6. E	**14.** C	**22.** B	**30.** C	**38.** E	**46.** B	**54.** D	
7. D	**15.** A	**23.** E	**31.** E	**39.** D	**47.** D	**55.** E	
8. C	**16.** C	**24.** B	**32.** A	**40.** A	**48.** A	**56.** D	

4. BÖLÜM

1. D	**9.** E	**17.** B	**25.** D	**33.** D	**41.** D	**49.** B	**57.** E
2. E	**10.** C	**18.** D	**26.** B	**34.** C	**42.** C	**50.** B	
3. E	**11.** B	**19.** D	**27.** C	**35.** A	**43.** A	**51.** A	
4. B	**12.** A	**20.** E	**28.** D	**36.** E	**44.** C	**52.** E	
5. E	**13.** C	**21.** D	**29.** A	**37.** A	**45.** A	**53.** B	
6. A	**14.** C	**22.** C	**30.** B	**38.** D	**46.** C	**54.** B	
7. C	**15.** D	**23.** E	**31.** C	**39.** B	**47.** E	**55.** D	
8. B	**16.** B	**24.** A	**32.** D	**40.** E	**48.** C	**56.** A	

5. BÖLÜM

1. D, Y, D, D	**7.** D	**11.** B	**17.** Selçuk
2. D	**8.** A	**12.** A	**18.** C
3. E	**9.** E	**13.** C	**19.** a) 2 ve 3. aylar
4. B	**10.** a) 7	**14.** A	b) 1 ve 2. aylar.
5. C	b) 200	**15.** B	c) 10
6. D	c) 10	**16.** C	**20.** E

SÖZLÜK

– A –

açı: Başlangıç noktası ortak olan iki ışının birleşim kümesi.

açıklık: Bir veri grubunda en büyük değer ile en küçük değer arasındaki fark.

açıortay: Bir açıyı ölçüleri eşit iki açıya ayıran ışın.

aksiyom: Doğruluğu ispatsız kabul edilen önerme.

alan: Bir yüzeyin bulunduğu düzlemde kapladığı yer.

analitik düzlem: Başlangıç noktasında dik kesişen iki sayı doğrusunun oluşturduğu yapının belirttiği düzlem.

aritmetik ortalama: Bir veri grubunda verilerin toplamının, veri sayısına bölünmesi ile elde edilen sayı.

asal sayı: 1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1'den büyük pozitif tam sayı.

ayrık kümeler: Ortak elemanları olmayan kümeler.

– B –

başlangıç noktası (orijin): Koordinat eksenlerinin kesiştikleri nokta.

bilinmeyen: Bir eşitliği sağlayan sayılara karşılık gelen sembol ya da harf.

birleşim kümesi: En az iki kümenin tüm elemanlarından oluşan küme.

boş küme: Hiç elemanı olmayan küme.

– Ç –

çıkarım: Belli önermelerin kabul edilen veya gerçek olan doğruluklarından, yanlışlıklarından, başka önermelerin kabul edilen veya gerçek olan doğruluklarını, yanlışlıklarını çıkarma.

çözüm kümesi: Bir denklemi veya eşitsizliği sağlayan değerler kümesi.

– D –

dar açı: Ölçüsü 90 dereceden küçük olan açı.

değişken: Bir problem ya da bir dizi işlem bağlamında farklı değerler alan değer.

denklem: İçinde en az bir bilinmeyenin bulunduğu eşitlik.

dış açı: Bir çokgende herhangi bir iç açının bütünleyeni.

dik açı: Ölçüsü 90 derece olan açı.

doğru parçası: İki noktayı birleştiren noktalar kümesi.

– E –

eleman: Kümeyi oluşturan nesnelerin her biri.

eş açı: Ölçüleri eşit olan açılar.

evrensel küme: Üzerinde çalışılan konuyla ilgili olan tüm elemanları içeren küme.

– F –

formel: Biçime dayanan, biçimle ilgili, şekle ait, şeklî, biçimsel.

– G –

gerçek sayılar: Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesinin hepsini kapsayan ve $\mathbb{R}$ ile gösterilen sayı kümesi.

– H –

hipotenüs: Bir dik üçgende dik açının karşısındaki kenar.

hipotez: Deneylerde henüz yeter derecede doğrulanmamış ancak doğrulanacağı umulan teorik düşünce, varsayım.

hüküm: Kavrama, karşılaştırma, değerlendirme vb. yollara başvurularak kişi, durum veya nesnelerin eleştirici bir biçimde değerlendirilmesi, yargı.

– İ –

iç açı: Herhangi iki doğruyu üçüncü bir doğru kestiğinde bu doğruların arasında ve kesenin farklı yanlarında olan açılar.

iç ters açı: Herhangi iki doğruyu üçüncü bir doğru kestiğinde bu doğruların arasında ve kesenin her iki tarafında komşu olmayan açılar.

– K –

karekök: Karesi verilen bir sayıya eşit olan bir sayı.

katsayı: Terimlerin sayısal çarpanı.

kesikli veri: Belirli bir aralıkta tam sayıları olan veri türü.

– M –

mutlak değer: Bir gerçek sayının sayı doğrusu üzerinde sıfıra olan uzaklığı.

– O –

oran: İki sayı arasındaki karşılaştırma.

orantı: İki oranın birbirine eşitliği.

ortanca (medyan): Bir veri grubu küçükten büyüğe sıralandığında veri grubunu eşit sayıda iki gruba ayıran değer.

– Ö –

önerme: Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadeler.

– P –

postulat: İspatsız kabul edilen önerme, aksiyom.

– S –

sayacılık: Ayakkabıların sayalarını hazırlayan kişilerin yaptığı iş.

serigrafi: Bir lastik silindir ile uygun bir malzemenin şablon maskeye bastırılarak görüntünün bir yüzey üzerine geçirilmesi işlemi.

sonlu küme: Eleman sayısı sonlu çoklukta olan küme.

sonsuz küme: Sonlu olmayan küme.

standart sapma: Bir veri grubundaki elemanların aritmetik ortalamaya yakın olup olmadığı hakkında bilgi veren merkezî yayılım ölçüsü.

sürekli veri: Belli bir aralıkta bütün değerleri alabilen veriler.

– T –

terim: Bir bilim dalı içinde özel anlamı olan kelime.

teorem: Doğruluğu ispat edilebilen önerme.

trikotaj: Örme işleri.

– Y –

yükseklik: Üçgenin bir köşesinden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına indirilen dik doğru parçası.

KAYNAKÇA

Adams, R. A. (1995). *A Course Calculus, Addision.* Newyork: Wesley Publishers Limited.

Balcı, M. (2003). *Genel Matematik (Cilt I).* Ankara: Balcı Yayınları.

Dönmez, A. (2005). *Temel Analiz.* Ankara: Arıkan Yayınları.

Hacısalihoğlu, H. H., (vd.) (2000). *Matematik Terimleri Sözlüğü.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Hacısalihoğlu, H. H. (2012). *Temel ve Genel Matematik.* Ankara: Hacısalihoğlu Yayıncılık.

İzmirli, E. (2012). *Matematik 8 Konu Anlatımlı.* Ankara: Palme Yayınevi.

Miller, J., O'neill, M., Hyde, N. (2009). *Basic College Mathematics (2nd ed.).* New York: MCGraw-Hill Companies.

Strukik, D.J. (2013). *Kısa Matematik Tarihi.* İstanbul. Doruk Yayınları, s. 158-159.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2018). Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Öğretim Programı Ankara: MEB.

TÜBİTAK (2011). *Şekillerle Matematik Sözlüğü.* Ankara.

Türk Dil Kurumu (2011). *Türkçe Sözlük.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Türk Dil Kurumu (2012). *Yazım Kılavuzu.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Ülger, A. (2003, Yaz). İkinci Dönem: Eski Yunan Matematiği. Matematik Dünyası, s. 51-52.

Kaynakça APA 6'ya göre düzenlenmiştir.

GENEL AĞ KAYNAKÇA

Sayfa 12: *https://ansiklopedi.tubitak.gov.tr/ansiklopedi/mantik 07.06.2023, saat: 09.30*

Sayfa 12: *https://www.matematiksel.org/hatirlanmasi-gereken-bir-dahi-george-boole/28.04.2019, saat: 16.00*

Sayfa 46: *https://www.gokyuzu.org/yazi/yz-keri/ 07.06.2023, saat: 10.00*

Sayfa 88: *https://www.dersimiz.com/bilgibankasi/el-harezmi-kimdir-hakkinda-bilgi-248 28.04.2019, saat: 17.00*

Sayfa 89: *https://kumbaradergisi.com/icerik/sayilarin-kisa-tarihi/ 07.06.2023, saat: 10.30*

Sayfa 172: *http://www.aoder.org.tr/tr/altin–oran/36.aspx 06.07.2018, saat: 16.00*

Sayfa 204: *https://www.matematiktutkusu.com/forum/sohbet/21432-mustafa-kemal-in-geometri-kitabi-hakkinda-bazi-bilgiler.html 07.06.2023, saat: 11.00*

Sayfa 205: *http://bilimintarihi.org/bilim-insanlari/sabit-bin-kurra-kimdir-eserleri-ve-bilime-katkilari/?doing_wp_cron=1686127654.6843481063842773437500 07.06.2023, saat: 12.30*

Sayfa 206: *https://ectal.meb.k12.tr/icerikler/islami-bilim-adamlari-nasireddin-tus_10970422.html 07.06.2023, saat: 11.30*

Sayfa 253: *https://www.matematiksel.org/kuyuya-dusen-thales/ 24.04.2019, saat: 16.00*

Sayfa 283: *https://turkoloji.cu.edu.tr/GENEL/fikri_akdeniz_pisagor_pisagorculuk_felsefesi.pdf 07.06.2023, saat: 12.00*

Sayfa 302: *https://www.biyografi.net.tr/ebu-l-vefa-kimdir/ 23.04.2019, saat: 17.30*

Sayfa 302: *https://www.cafrande.org/giyaseddin-cemsid-aritmetikte-ondalik-sistemi-ilk-kullanan-buyuk-bir-matematikci/ 28.04.2019, saat: 16.00*

Sayfa 326: *https://data.tuik.gov.tr/Bulten/Index?p=Istatistiklerle-Cocuk-2022-49674 04.06.2023, saat: 14.30*

GÖRSEL KAYNAKÇA

Sayfa 11: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 1116999860)
Sayfa 12: http://www.nkfu.com/gottfried-wilhelm-leibniz-kimdir/
Sayfa 12: https://www.independent.co.uk/news/science/five-things-you-didn-t-know-about-george-boole-a6717401.html
Sayfa 25: https://anilsenyurt.com.tr/2014/10/augustus-de-morgan-kimdir.html
Sayfa 27: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 107700005)
Sayfa 45: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 26871982)
Sayfa 46 (1. görsel): https://www.gokyuzu.org/yazi/yz-keri/
Sayfa 46 (2. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 290853545)
Sayfa 47 (1. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 1236171988)
Sayfa 47 (2. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 693141805)
Sayfa 47 (3. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 1153436506)
Sayfa 47 (4. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 1725273496)
Sayfa 72 (1. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 445905781)
Sayfa 72 (2. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 652472455)
Sayfa 73 (1. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 112220891)
Sayfa 73 (2. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 132412625)
Sayfa 77 (1. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 723128869)
Sayfa 77 (2. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 766430533)
Sayfa 77 (3. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 678807424)
Sayfa 79 (1. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 393702595)
Sayfa 79 (2. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 321172823)
Sayfa 79 (3. görsel): https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 1060325741)
Sayfa 87: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 703459057)
Sayfa 88: http://www.leblebitozu.com/harezmi/
Sayfa 112: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 103013249)
Sayfa 203: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 69032761)
Sayfa 204: https://mustafakemalim.com/ataturk-sivasta-13-kasim-1937/
Sayfa 205: https://www.milatgazetesi.com/haber/sabit-bin-kurra-kimdir-187823/
Sayfa 206: https://www.dusuncemektebi.com/d/187956/nasiruddin-tusi%E2%80%99nin-erdemler-siniflamasi
Sayfa 253: https://www.derszamani.net/arsimet-hayati-kisaca.html
Sayfa 283: https://evrimagaci.org/pisagor-teoremi-nedir-pisagor-kimdir-12873
Sayfa 290: https://www.3eniyi.com/unlu-matematikciler/
Sayfa 299: https://www.haberturk.com/yerel-haberler/haber/52771519-okulun-engelli-rampasi-ve-ikinci-giris-kapisi-belediyeden
Sayfa 302 (1. görsel): http://www.biyografya.com/biyografi/2679
Sayfa 302 (2. görsel): http://www.medeniyetufku.com/bilim-dunyasinda-iz-birakanlar-15-asrin-en-buyuk-astronomu-ulug-bey-ve-zici-salim-ayduz/
Sayfa 325: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 92291719)
Sayfa 329: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 47451607)
Sayfa 331: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 382869907)
Sayfa 332: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 109730489)
Sayfa 335: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 64926133)
Sayfa 339: https://www.shutterstock.com/tr/ (ID: 561732055)
Sayfa 341: https://kayasehiristanbul.net/ekmegini-israf-etme/

NOTLAR