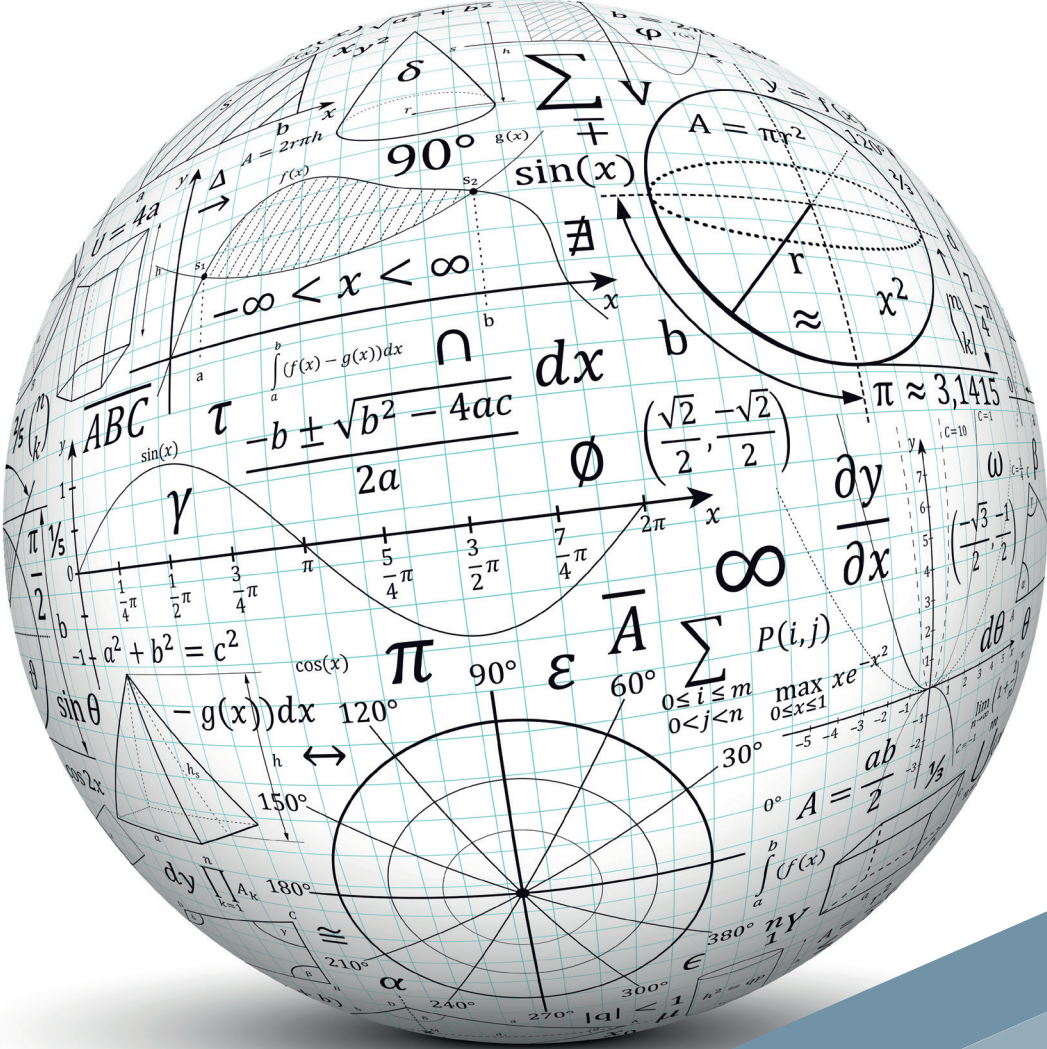




ÖZEL EĞİTİM VE REHBERLİK HİZMETLERİ GENEL MÜDÜRLÜĞÜ



BİLİM VE
SANAT MERKEZLERİ

LİSE MATEMATİK ALANI
YARDIMCI DERS MATERYALİ

ÖZEL EĞİTİM VE REHBERLİK HİZMETLERİ
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

BİLİM VE SANAT MERKEZLERİ
LİSE MATEMATİK ALANI
YARDIMCI DERS MATERYALI



ANKARA, 2022

GENEL YAYIN YÖNETMENİ

Prof. Dr. Kemal Varin NUMANOĞLU

YAYIN KOORDİNATÖRÜ

M. Ramazan BARIN

YAYIN ETİĞİ KOMİSYONU

Prof. Dr. Yücel GELİŞLİ

Doç. Dr. Ömer Can SATIR

Dr. Özkan APAYDIN

PROJE KOORDİNATÖRÜ

Dr. Derya YÜREĞİLLİ GÖKSU

EDİTÖRLER

Doç. Dr. Fatih SULAK

Öğretim Görevlisi İsmail SATMAZ

YAZARLAR

Dr. Gökhan KARAASLAN

Dr. Gülnur ÖZBEK

Ecem KARABULUT

Vedat KABASAKAL

Yusuf İPEK

PROGRAM GELİŞTİRME UZMANI

Öğretim Görevlisi İsmail SATMAZ

ÖLÇME DEĞERLENDİRME UZMANI

Dr. Öğr. Üyesi Fuat ELKONCA

DİL UZMANI

Nalan ÜSTÜN

GÖRSEL TASARIM

SUDE AJANS REKLAM ORG. TAN. LTD. ŞTİ.

ISBN

978-975-11-5825-3



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerâhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'sım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

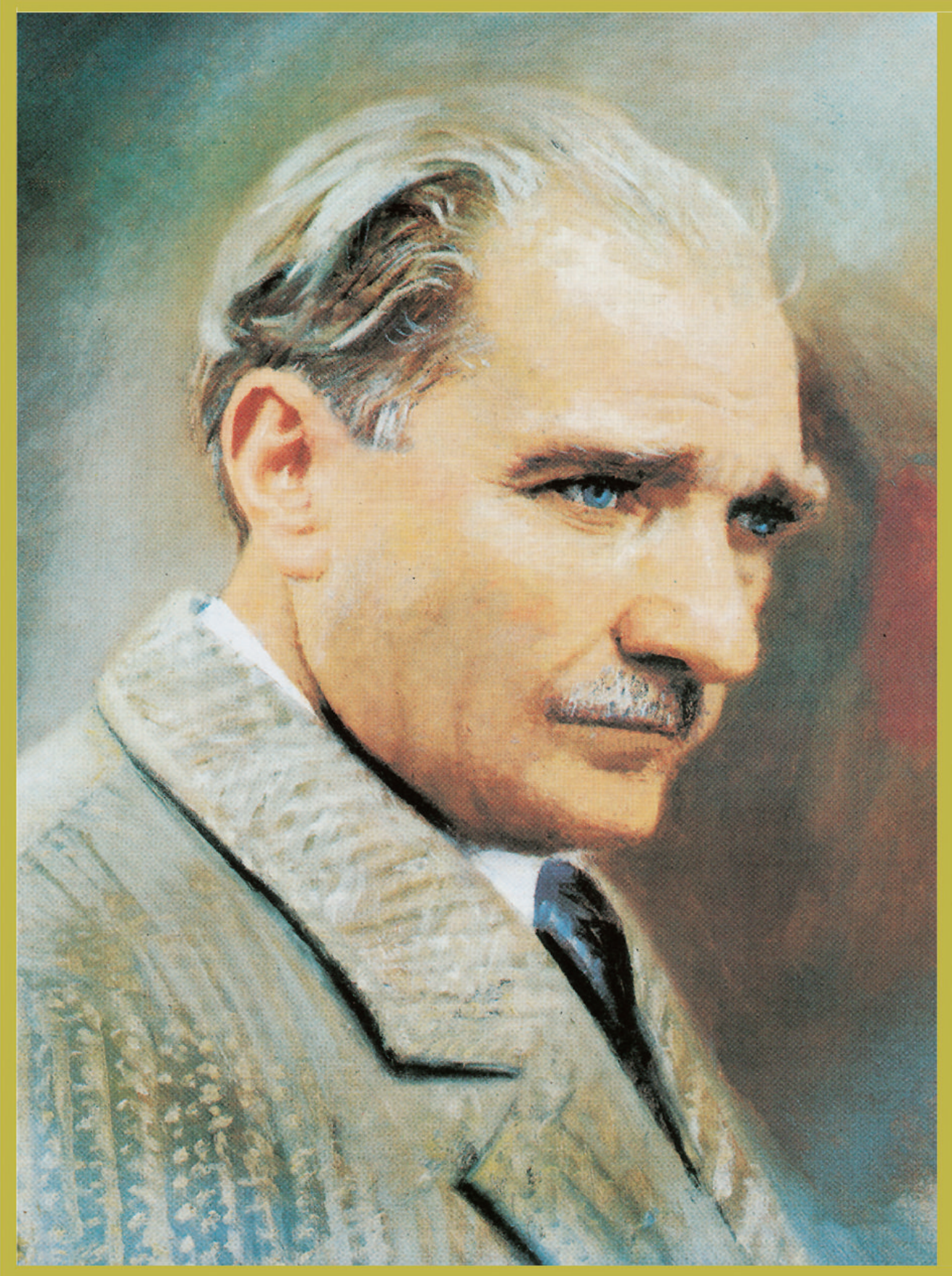
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsaît bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

**1.
Ünite****CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**

Matematiksel Mantık.....	14
Matematiksel İspat Yöntemleri	27
Kümeler.....	41
Bağıntı Fonksiyon.....	59
Fibonacci Sayıları ve Altın Oran	76
Özel Sayılar	91
Çokgensel Sayılar.....	104
Üslü Sayılar	117
Köklü Sayılar	133
Asal Sayılar.....	149
Aritmetiğin Temel Teoremi	159
Öklid Algoritması ve Ebob-Ekok	169
Bölünebilme Kuralları	185
Farklı Tabanlarda İşlemler.....	198
Bilgisayarların Dili	217
Modüler Aritmetik.....	223
Lineer Denklik Sistemleri	235
Şifreleme Teknikleri.....	246
Denklemler ve Eşitsizlikler.....	256

**2.
Ünite****ANALİZ**

Fonksiyonlar	270
Fonksiyonun Sıfırları	288
Sanal Dünya.....	304
Fonksiyonlardan Dizilere	314
Özel Diziler.....	324
Trigonometri.....	341



3. Ünite

SONLU MATEMATİK

Sayma ve Faktöriyel.....	356
Permütasyon.....	373
Tekrarlı ve Dönel Permütasyon.....	385
Kombinasyon.....	401
Tekrarlı Kombinasyon.....	419
Olasılık.....	439
Koşullu Olasılık.....	456

4. Ünite

GEOMETRİ

Üçgende Açılar.....	472
Üçgenlerde Eşlik, Benzerlik.....	490
Pisagor Üçlülere.....	505
Üçgende Yardımcı Elemanlar.....	514
Üçgensel Bölgelerin Alanları.....	529
Üçgende Farklı Alan Formülleri.....	549
Öklid Dışı Geometrilere.....	561

GENEL MÜDÜRDEN ÖN SÖZ

Teknolojik gelişmeler, toplumsal ve kültürel değişimler eğitim sistemlerini de büyük ölçüde etkilemektedir. Bu süreçte eğitim programlarının çağın gerekleri doğrultusunda öğrencilerin ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde geliştirilmesi bir zorunluluk olarak ortaya çıkmaktadır. Çoklu potansiyele sahip özel yetenekli öğrencilere yönelik farklılaştırılmış ve zenginleştirilmiş eğitim programlarının hazırlanması ayrı bir önem taşımaktadır.

Özel yetenekli öğrenciler genel anlamda akranlarına göre farklı gelişim özellikleri gösteren, özel akademik yeteneğe sahip, soyut fikirleri kolay anlayabilen, akıl yürütme ve muhakeme becerileri güçlü olan bireylerdir. Özel yetenekli öğrencilerin bireysel yeteneklerinin farkında olmaları ve kapasitelerini geliştirerek en üst düzeyde kullanmalarını sağlamak amacıyla 1995 yılında bilim ve sanat merkezleri (BİLSEM) açılmış olup Özel Eğitim ve Rehberlik Hizmetleri Genel Müdürlüğü bünyesinde hizmet vermeye başlamıştır. BİLSEM'lerde resim, müzik ve genel zihinsel yetenek alanlarında tanınan öğrencilere alan uzmanları tarafından hazırlanmış programlar uygulanmakta; öğrenciler uyum (oryantasyon) programı, destek eğitimi programı, bireysel yetenekleri fark ettirme programı, özel yetenekleri geliştirme programı ve proje üretimi/yönetimi programı olmak üzere beş aşamalı bir süreçten geçmektedirler.

Özel yetenekli öğrencilerimize yönelik uygulanan BİLSEM programlarının ve kullanılan yardımcı ders materyallerinin güncel gelişmeler dikkate alınarak revize edilmesi, programların farklı becerilerin gelişimini destekleyecek şekilde hazırlanması ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu doğrultuda alanında yetkin öğretmen ve akademisyenlerin bulunduğu komisyonlar oluşturulmuş ve 19 branşta eğitim programlarının geliştirilmesine yönelik çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

Genel Müdürlüğümüz bünyesinde faaliyet gösteren Özel Yeteneklilerin Geliştirilmesi Daire Başkanlığı tarafından yürütülen bu çalışmayla, ülke genelinde özel yetenekli çocuklarımızın gelişimlerinin desteklenmesi ve onlara sunulan eğitimin niteliğinin artırılması amaçlanmıştır. Buna ek olarak özgün ve işlevsel materyaller ile özel eğitim alanında hizmet veren öğretmenlere uygulamalarında rehberlik edecek bir yol haritası da sunulmuştur. Öğretmenlere rehber olması ve özel yetenekli öğrenciler ile çalışan tüm kurumlara ışık tutması amacıyla 19 branş bazında hazırlanan yardımcı ders materyalleri esnek bir yapıya sahiptir. Covid-19 pandemi sürecindeki tüm zorluklara rağmen titiz çalışmalar yürüten Genel Müdürlüğümüz personeline, akademisyenlerimize ve öğretmenlerimize verdikleri emekler için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Daha nice yeni çalışmalarda buluşmak dileğiyle...

Prof. Dr. Kemal Varın NUMANOĞLU
Özel Eğitim ve Rehberlik Hizmetleri
Genel Müdürü

Bilim ve Sanat Merkezleri (BİLSEM) özel yetenekli öğrencilerin kapasitelerini geliştirerek en üst düzeyde kullanmalarını sağlamak amacıyla özgün ürün, proje ve üretimlerin gerçekleşmesi için öğrencilerin yeteneklerine uygun proje tabanlı, disiplinler arası, zenginleştirilmiş, farklılaştırılmış eğitim programı uygulandığı ve etkinliklerin düzenlendiği eğitim kurumlarıdır. Bu merkezlere devam eden öğrencilerin, sahip oldukları üst düzey bilişsel özelliklere göre ihtiyaç duydukları eğitimi alabilmeleri için bu özelliklere sahip öğretim programlarına ve yardımcı ders materyallerine gereksinim duyulmaktadır. Bu çalışma, Milli Eğitim Bakanlığı Özel Eğitim ve Rehberlik Genel Müdürlüğü Özel Yeteneklerin Geliştirilmesi Daire Başkanlığınca yürütülmüş ve tüm etkinlikler kitap yazarlarının ortak çalışması sonucunda çıkarılmıştır. BİLSEM programlarından biri olan “Özel Yetenekleri Geliştirme Programı (ÖYGP)”, öğrencilerin seçtikleri alanda derinlemesine eğitim alacakları bir eğitim programıdır. Özel yetenekleri geliştirme programının uygulanması sürecinde, disiplinler arası ilişkiler dikkate alınarak öğrencilerin yönlendirildiği alanda derinlemesine, ileri düzeyde bilgi, beceri, davranış kazanmaları ve bu doğrultuda üretimde bulunmaları sağlanır.

Özel yetenekli öğrencilerin eğitimine katkı sunulması amacı ile hazırlanan ve yardımcı ders materyali niteliğinde olan Matematik dersi etkinlik kitabı ÖYGP programında, matematik alanına yönlendirilmiş öğrencilerin eğitiminde, matematik öğretmenlerine rehberlik etmesi için hazırlanmıştır. Etkinlik kitabının temel amacı, BİLSEM’lerde uygulanacak öğretim programının ve yardımcı ders materyallerinin geliştirilmesi ve bu doğrultuda örnek etkinliklerin hazırlanarak yazılı hâle getirilmesidir. Bu sayede kalıcı, erişilebilir ve paylaşımına açık olmalarını sağlamaktır. Bu etkinlik kitabı öğretmenlerin, öğretim programında bulunan kazanımlar dikkate alınarak hazırlanacak çerçeve planlar doğrultusunda, uygun etkinlikleri seçerek derslerde kullanması için hazırlanmıştır. Bu kitap tamamlanması gereken bir ders kitabı niteliğinde olmayıp öğretmenler için kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Her ne kadar bu etkinlikler öğrencilerin yaş ve sınıf seviyeleri dikkate alınarak gruplandırılrsa da, özel eğitimin amacı gereği, öğrenci ve grupların hazırbulunuşluk, bireysel yetenek, ihtiyaç ve özelliklerine göre etkinlikler farklılaştırılıp zenginleştirilebilir. Tüm yıl boyunca bu etkinliklerin tamamının uygulanma zorunluluğu olmayıp, etkinliklerin bir kısmı seçilerek yıllık plan oluşturulabilir.

Tüm program matematik komisyonu üyelerince modüler yapıda kurgulanmıştır. BİLSEM Matematik Dersi Öğretim Programı-ÖYGP’i göre hazırlanan bu kitap 4 modül altında toplam 39 etkinlikten oluşmaktadır. Cebir ve Sayılar Teorisi modülü için 19, Analiz modülü için 6, Sonlu Matematik modülü için 7 ve Geometri modülü için de 7 etkinlik hazırlanmıştır. Her etkinliğin başında bulunan etkinlik karekodu ile o etkinliğin dijital materyallerine ve ölçme değerlendirme formuna ulaşabilirsiniz. Bazı etkinliklerin sonunda bulunan etkinlik formları öğrencilere dağıtılmak amacıyla hazırlanmış ve etkinlik içerisinde etkinlik formuna yönlendirmeler yapılmıştır. Etkinlik içerisinde bulunan uygulama bağlantılarına yine karekod ile ulaşabilmektedir.

BİLSEM Matematik dersi için hazırlanmış olan bu yardımcı ders materyalinin öğretmenlerimize ve dolayısıyla öğrencilerimize faydalı olmasını temenni eder, Millî Eğitim Bakanlığı, Özel Eğitim ve Rehberlik Hizmetleri Genel Müdürlüğü, Özel Yeteneklilerin Geliştirilmesi Daire Başkanlığı yetkilileri başta olmak üzere, bu ürünün ortaya çıkmasında emeği geçen herkese teşekkür ederiz.

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ

1. Ünite



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: MATEMATİKSEL MANTIK
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Matematiksel İspat
KAZANIMLAR	: 1. Açık önermeye ve doğruluk kümesine matematik ve felsefeden örnekler verir. 2. Tanım, aksiyom, postulat, teorem, ispat ve sanı kavramlarını yorumlar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, öğrencilerin önerme ve doğruluk değeri kavramlarını tanıması, açık önerme ve doğruluk kümesine örnekler vermesi hedeflenmektedir. Önermelerin olumsuzunu bularak bileşik önermelerin "ve", "veya", "ya da", ve "ancak ve ancak" bağlaçları ile yazmaları ve "her" ile "bazı" niceleyicilerini tanımları amaçlanmıştır. Verilen ifadelerin sembolik mantık diline çevrileceği örnek çalışmalar yapması beklenmektedir. Tanım, aksiyom, postulat, teorem, ispat ve sanı kavramlarını tarihsel süreç içerisinde yorumlamaya yönelik drama çalışması hazırlanmıştır.

Başlarken...

Mantık, tüm matematikçilerin kullandığı ortak dildir. Bu nedenle, matematiği anlamak ve aktarmak için onu çok iyi bilmek gerekir. Matematiğin ve felsefenin ortak yapı taşı mantıktır. Mantık, en geniş tanımıyla doğru düşünme aracıdır. Ancak matematikçinin görevi, ortaya attığı bir savın neden doğru olduğunu bulmaktır. Felsefeci, tanımları ve aksiyomları bir sonuca varmadan sorgulayabilir. Bu konuyla ilgili Ali Nesin'in bir örneğini ele alalım: “Hiç Macarca bilmediğimizi varsayalım ve anlamını bilmek istediğimiz Macarca bir sözcük var. Ve sadece Macarcadan Macarcaya bir sözlüğümüz var. Bu sözcüğün anlamını bulmak için sözlüğe baktığımızda yine Macarca bir tanımla karşılaşırız. Ama tek bir kelime bile bilmediğimizden tanımı anlamıyoruz. Bu sefer tanımdaki kelimeleri sözlükte arıyoruz ve onların da Macarca anlamlarını bilmediğimizden bu böyle sürekli devam ediyor. Sözlük sonlu sayıda kelimeden oluştuğundan bir süre sonra tekrar aynı kelimelere rastlarız. Yani bir sözcüğün anlamını bilmek için o sözcüğün anlamını bilmemiz gerekir. Bu nedenle de en azından birkaç Macarca kelimeyi bilmeden bir sözcüğün anlamını bilemeyiz. İşte Macarcayı bu sözlüğe bakarak öğrenebilmemiz için bilmemiz gereken sözcüklere Macarcanın aksiyomları diyebiliriz.” İşte matematikçiler bir temeli kabul

ettikten sonra bunların mantıksal neticeleriyle ilgilenir. Ünlü matematikçi ve filozof Bertrand Russell'a göre saf matematik, "Eğer p ise q " şeklinde önermelerden meydana gelir. Sembolik mantık; önermeler mantığı ve niceleyiciler mantığı olarak ikiye ayrılır.

Önermeler Mantığı

Örnek cümleler üzerinden cümle yapılarındaki farklılıkların keşfedilmeye çalışıldığı ve daha sonra önerme olan cümlelerin vurgulanarak önermenin tanımının yapılması istenir.

Etkinlik Formu Soru 1

Aşağıdaki ifadelerin sadece doğru ya da yanlış olma durumlarını inceleyiniz. Doğruluğundan ya da yanlışlığından bahsedemeyeceğimiz ifadeler var mı?

- Su 100 derecede kaynar. (Doğru)
- Her karga siyahtır. (Yanlış)
- $x + 2 = 2x$ (Bilinmeyen x değerine bağlı)
- Bugün hava güneşlidir. (Doğru/Yanlış)
- Yarın erken kalk. (Emir cümlesi)
- $2 + 2 = 5$ (Yanlış)
- Tüm asal sayılar tektir. (Yanlış)
- Eğer hava güneşli ise denize gideceğim. (Doğru/Yanlış)
- Bir bardak su getirir misin? (Soru cümlesi)
- Her çift sayı 2 ile bölünür. (Doğru)
- $x^2 = 16$ olan bir x tam sayısı vardır. (Doğru)

TANIM

Önerme kesinlikle doğru ya da kesinlikle yanlış olan bir cümle veya matematiksel ifadedir. Belirli bir önermeyi temsil etmek için çoğunlukla p , q , r ve s harflerinden birini kullanırız.

Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasına, o önermenin **doğruluk değeri** denir. Bir önerme doğru ise doğruluk değeri D veya 1 ile, yanlış ise Y veya 0 ile gösterilir.

Önermeler değişken içerebilir ve önermenin değişkene bağlı olduğunu ifade etmek için çoğunlukla $p(x)$ gibi ifadeler kullanılır. Örneğin, $p(x)$: Eğer x çift ise 2 'nin katıdır. Örnek cümlelerden j cümlesi ile $p(x)$ önermesi karşılaştırılarak aynı anlama geldiği vurgulanır.



Örnek cümlelerden önerme olanların doğruluk değerlerini bulmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örnek cümlelerden k cümlesinin bazı sayılar için doğru olduğu vurgulanarak doğruluk kümesi oluşturmaya yönelik çalışma yapılır.

$k(x)$: “ $x^2 = 16$ olan bir x tam sayısı vardır.” $k(-4) \equiv 1$, $k(4) \equiv 1$ olup $D = \{-4, 4\}$ ’tür.

TANIM

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilen değerlerle doğru ya da yanlış olduğu belirlenen önermeye **açık önerme** denir ve bu önerme $p(x)$ ile gösterilir.

Bir açık önermeyi doğrulayan elemanların kümesine o açık önermenin doğruluk kümesi denir.

Bir a sayısı $p(x)$ açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı ise $p(a) \equiv 1$ ’dir.

Bir b sayısı $p(x)$ açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı değil ise $p(b) \equiv 0$ ’dır.

“Su 100 derecede kaynamaz.” ifadesi a önermesinin olumsuzudur.

Önergelerin olumsuzlaştırılmasına yönelik çalışmalar yapılır. (Etkinlik Formu Soru 2)

TANIM

Bir önermenin hükmünün değiştirilip yerine olumsuzunun kullanılması ile elde edilen önermeye ilk önermenin **değili (olumsuzu)** denir. p önermesinin değili p' veya $\sim p$ ile gösterilir.

Verilen örneklerden h önermesi incelenerek iki ya da daha fazla önermenin ve, veya, ya da, ise ancak ve ancak bağlaçları ile birleştirilerek bileşik önermeler oluşabileceği fark ettirilir. Her bileşik önerme bir önermedir. Bileşik önermelerin okunuşları ve gösterimleri açıklanır.

TANIM

- p ile q önermelerinin “**ve**” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, “ p ve q bileşik önermesi” denir ve bu önerme $p \wedge q$ biçiminde gösterilir.
- p ile q önermelerinin “**veya**” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, “ p veya q bileşik önermesi” denir ve bu önerme $p \vee q$ biçiminde gösterilir.
- p ile q önermelerinin “**ya da**” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, “ p ya da q bileşik önermesi” denir ve bu önerme $p \vee q$ biçiminde gösterilir.
- p ile q önermelerinin “**ise**” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye **koşullu önerme** denir ve bu koşullu önerme $p \Rightarrow q$ biçiminde gösterilir.
- $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesine **iki yönlü koşullu önerme** denir. İki yönlü koşullu önerme $p \Leftrightarrow q$ şeklinde yazılır ve “ p ancak ve ancak q ” olarak okunur.

Etkinlik Formu Soru 3

Bir sınıfta öğretmen yoklama almaktadır.

p : “Ali geldi.”

q : “Ayşe geldi.”

Yapılan yoklamaya göre p' , $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ ifadelerin ne anlama geldiğini açıklayınız ve doğruluk tablosu yapınız.

Çözüm:

p' : “Ali gelmedi.” (Ali okula geldiyse $p \equiv 1$ ve $p' \equiv 0$ olur.)

$p \wedge q$: “Ali ve Ayşe geldi.” (Hem Ali hem Ayşe okula geldiyse $p \wedge q \equiv 1$ ikisinden en az biri gelmediyse $p \wedge q \equiv 0$ olur.)

$p \vee q$: “Ali veya Ayşe geldi.” (Ali veya Ayşe’den en az biri okula geldiyse $p \vee q \equiv 1$ ikisi de gelmediyse $p \vee q \equiv 0$ olur.)

$p \vee q$: “Ali ya da Ayşe geldi.” (Ya Ali ya Ayşe okula geldiyse $p \vee q \equiv 1$ ikisi de geldiyse ya da ikisi de gelmediyse $p \vee q \equiv 0$ olur.)

$p \Rightarrow q$: “Ali geldiyse Ayşe geldi.” (Ayşe’nin gelmesi Ali’ye bağlıdır. Ali geldiğinde Ayşe gelmezse $p \Rightarrow q \equiv 0$ olur diğer durumlarda $p \Rightarrow q \equiv 1$ olur.)

$p \Leftrightarrow q$: “Ali geldi ancak ve ancak Ayşe geldi.” (İkisinin gelmesi de birbirine bağlıdır. Yani ya ikisi de geldi ya da ikisi de gelmediyse $p \Leftrightarrow q \equiv 1$, ikisinden biri geldiyse $p \Leftrightarrow q \equiv 0$ olur.)

p	q	p'	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Etkinlik Formu Soru 4

A, B ve C futbol takımlarıyla düzenlenen turnuvada şampiyon olan takıma kupa verilecektir. Ancak hangisinin şampiyon olduğu bilinmemektedir. Aşağıdaki bilgileri kullanarak kupanın kimin aldığını bulunuz.

1. Kupayı A almamıştır ve C almamıştır.
2. Kupayı A almamıştır veya B almıştır.
3. Kupayı B almamıştır ya da C almamıştır.

**Çözüm:**

p, q, r önermeleri aşağıdaki gibi tanımlansın;

p: “Kupayı A almıştır.”

q: “Kupayı B almıştır.”

r: “Kupayı C almıştır.”

1. Kupayı A almamıştır ve C almamıştır. ($p' \wedge r'$)

2. Kupayı A almamıştır veya B almıştır. ($p' \vee q$)

3. Kupayı B almamıştır ya da C almamıştır. ($q' \vee r'$)

p	q	r	p'	q'	r'	$p' \wedge r$	$p' \vee q$	$q' \vee r'$
1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0

Tabloya göre üç bileşik önermenin de doğru olduğu tek bir durum vardır ve bu durumda da sadece q önermesi 1 değerindedir. Yani kupayı B takımı almıştır.

Niceleyiciler Mantığı

“ $\forall$ ” ve “ $\exists$ ” sembollerine niceleyiciler denir.

$\forall$ sembolü “her” ve “tüm” kelimelerine karşılık gelir.

$\exists$ sembolü “vardır”, “bazı” ve “en az bir” kelimelerine karşılık gelir.

Niceleyicilerin nasıl kullanıldığını keşfetmek için aşağıdaki örnek verilir.

Örnek:

$Q(x)$: “x bir rasyonel sayıdır.” ve $R(x)$: “x bir reel sayıdır.”

- Her rasyonel sayı bir reel sayıdır. ($\forall x: Q(x) \Rightarrow R(x)$)
- Hiçbir rasyonel sayı bir reel sayı değildir. ($\forall x: Q(x) \Rightarrow R'(x)$)
- Bazı rasyonel sayılar reel sayıdır. ($\exists x: Q(x) \wedge R(x)$)
- Bazı rasyonel sayılar reel sayı değildir. ($\exists x: Q(x) \wedge R'(x)$)

Örnek:

“İnsanlar gerçekleri yalnızca, gerçekler zaten inandıkları şeyler ile bağdaşırsa doğru kabul eder.” (Andy Rooney) cümlesini sembolik mantık dilinde ifade ediniz.

p: “Gerçekler insanların inandıkları şeyler ile bağdaşmaktadır.”

q: “İnsanlar gerçekleri doğru kabul eder.”

Önerme: $p \Rightarrow q$

Cümlelerin sembolik mantık dilinde ifade edildiği çalışmalar yapılıdır (Etkinlik Formu Soru 5).

Mantık, tüm matematikçilerin kullandığı ortak dildir. Bu nedenle, $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, ', \forall$ ve $\exists$ gibi sembollerin anlamlarının daima farkında olunmalıdır. Matematiksel bir cümlenin anlamı bu semboller ile çözümlenerek kavranabilir. İspat cümlelerinde sıklıkla kullanılan bu mantıksal çıkarımların farkında olmak önemlidir.

Tanım, Aksiyom, Postulat, Teorem, İspat ve Sanı

Bu kavramların matematik tarihi ve felsefesinin gelişim sürecine göre anlaşılabilmesi için öğrenciler tarihte yaşamış ünlü matematikçilerin rollerine girerek drama yoluyla bu kavramları keşfederler. Öğrenci sayısına göre roller paylaştırılır; Meraklı Öğrenci, Öklid, Hilbert, Goldbach, Cantor. Öğrencilerden bu rollere göre grup çalışması içerisinde tanım, aksiyom, postulat, teorem, ispat ve sanı gibi kavramların matematik tarihi ve felsefesinin gelişim süreci içerisinde araştırılarak bir senaryo yazmaları ve sınıf içerisinde canlandırmaları istenir. Aşağıda örnek bir senaryo metni bulunmaktadır. (Etkinliğin karekodunu okutarak bu örnek senaryonun animasyonuna ulaşabilirsiniz.)



Öklid

Ben insanlığın en önemli baş yapıtların biri olan ve “Öklid’in Elementleri” olarak bilinen kitabı yazdım. Bu kitaptaki geometri anlayışım ve ona yaklaşımım, bulunduğum çağ itibarıyla bir devrim sayılmaktadır. Aksiyomatik yaklaşımı ortaya çıkarttım ve geometride evrensel geçerliliği olan 5 aksiyom verdim.

Bunlar;

- i. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine de eşittirler.
- ii. Eğer eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, elde edilenler de eşit olur.
- iii. Eğer eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkartılırsa, eşitlik bozulmaz.
- iv. Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.
- v. Bütün, parçadan büyüktür.



Meraklı öğrenci

Peki aksiyom ne demek?



Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen önermelere aksiyom denir. Aksiyomlar, doğruluğundan şüphelenmeksizin ispatsız olarak kabul edilen temel önermelerdir. Ancak aksiyomu anlamak için öncelikle önermeyi anlamak gerekir. Önermeyi oluşturan matematiksel ifadelerin anlaşılabilmesi için tanımlar kullanılır.

O hâlde tanım ne anlama geliyor?



Önermeler için tanımlar kullanılır demiştik. Bu yapılırken de başka kavramlar kullanılmak zorundadır. Bu kavramlar da daha başka kavramlara dayanacağından sonunda bazı kavramlar tanımsız olarak kabul edilir. Anlamı bilinen sözcükler, tanımsız terimler ve daha önceden tanımlanmış terimler yardımıyla terimlerin özelliklerini belirtmeye bu terimleri tanımlama denir. Örneğin ben Elementler kitabında noktayı, büyüklüğü olmayan olarak tanımladım.

Benim geliştirmiş olduğum düzlem geometrisinde ise "nokta" tanımsız terimdir. Ancak "doğru parçasını" noktayı kullanarak "Bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ve bu iki nokta arasında kalan aynı doğru üzerindeki tüm noktalara doğru parçası denir." olarak tanımladım.



Hilbert



Ben nokta, doğru, düzlem gibi kavramların ne olduğunu belirten tanımlar verdikten sonra da Öklid geometrisinin postulatları olarak bilinen şu beş postulatı verdim.

- Herhangi iki noktadan bir doğru geçer.
- Bir doğru parçası doğrusal bir çizgi hâlinde sürekli uzatılabilir.
- Belli bir merkez ve uzaklıkla bir çember çizilebilir.
- Tüm dik açılar birbirine eşittir.
- Verilen iki doğru başka bir doğru tarafından kesildiğinde, aynı tarafa bakan açılar toplamı iki dik açıdan küçük oluyorsa, verilen doğrular bu tarafa sonsuza dek uzatıldıklarında mutlaka kesişirler.

Peki, postulat ne demek?





Postulatlar da aksiyomlar gibi ispatsız kabul olunan ama doğruluklarına o zamanki anlayışa göre, aksiyomlar kadar kesin gözle bakılmayan temel önermelerdir. Günümüzde bu çeşit temel önermeler arasında ayırım yapılmamaktadır. Daha sonra, mantıki çıkarım yoluyla, bu postulatlardan çıkarabildiğim sonuçları teorem, önerme olarak mantıki bir sırada sundum. Bu yaklaşım bugünkü matematiğin ve bilimin de temel yaklaşımıdır.

O hâlde teorem ne anlama geliyor?



Doğruluğu ispatlanabilen önermelere teorem denir. Pisagor Teoremi, Fermat'ın Son Teoremi, Asal Sayı Teoremleri gibi matematikte çokça teorem bulunmaktadır. Bir teoremin doğru önerme olduğunu göstermeye ise teoremin ispatlanması denir.

Peki, her teorem ispatlanabilmiş midir?



Goldbach

Hayır, ispatlanamayan teoremler de bulunmaktadır. Matematikte doğruluğuna dair oldukça güçlü veriler olan ancak henüz ispatlanmamış önermelere de sanı denir. Collatz sanısı, Goldbach sanısı bunlara örnektir.

Peki, neden teoremleri ispatlamaya çalışıyoruz? Ben bununla ilgili bir araştırma yaptım ve bu araştırmamın sonucunu sizinle paylaşmak istiyorum. Matematikte en önemli soru bir matematiksel ispatın ne olduğu, geçerliliği ve meşruluğudur. Ancak benim gibi geçmişte de matematikçiler benzer sorular sormuşlar. Matematikte deney ya da gözlem olmadığı için bir matematikçi doğruluğu göstermek istediği şeyi somut olarak ortaya koymak ve nasıl inşa edilebileceğini göstermek zorunluluğu taşımakta mıdır? Bu tartışma, modern matematiğin doğmasını sağlamıştır. Genel bir ifade ile matematik, sayılar ve şekillerle ilgili tanımsız kavramlara ve bunlar arasındaki ilişkiyi belirten aksiyomlara bağlı olarak türetilen tanım ve teoremler zincirinden oluşan bir bilim dalıdır.





Ancak bugünkü modern matematiğin doğuşuna ve gelişmesine etken olan Öklid, geometrinin yapısındaki mantıksal boşlukları doldurmuştur. Elementler kitabındaki beşinci postulat-taki paralellik yüzyıllarca tartışılmıştır.



Cantor

Paralellik tanımlanırken sonsuz ifadesi kullanılıyorsa sonsuz nedir? Bana göre ise "sonsuz" tek başına manalı bir söz değildir; manalı olan "sonsuz küme" kavramıdır; sonsuz kümeler ise var olan nesnelerdir. Benim tarafından yapılan bu çalışmalar ve müdahalelerden sonra matematiğin biçimsel bir dil ile tanımlanması gereği ortaya çıkmıştır.



Ben, bu kavramsal tartışmalara ve kusursuz görünen akıl yürütmelere rağmen yaşanan sorunlara çözüm olarak sembolik mantığı kullanmak gerekliliğini ortaya koydum. Ben Öklid geometrisinin aksiyomatik yapısıyla kendi içinde tutarlı olduğunu gösterdim, ayrıca "Matematiğin Temelleri" adlı kitabımda aritmetik için aksiyomatik bir yapı geliştirdim. Ancak Gödel'in Eksiklik Teoremi bu görüşümü değiştirmiştir.



Matematik tarihinde yaşanan bu tartışmaların günümüz matematiğinin oluşmasına büyük katkıları olmuştur. Yapılan çalışmalarda yeni birçok teorem ortaya çıkmakta, daha önce ispatlanamamış teoremler ispatlanmaktadır. İspatlarken, önermeleri anlamak ve bilgi parçalarını birleştirip yeni bilgiler üretmek için mantık kullanırız. Her önermenin yapısına göre farklı matematiksel ispat yöntemleri vardır.

Yapılan dramanın ardından neden matematiksel ispat yöntemlerine başvurulduğu ile ilgili tartışmalar yapılır. Öğrencilere aşağıdaki sorular yönlendirilir.

- Hayatınızın hangi alanlarında ispata ihtiyaç duyuyorsunuz?
- Matematiksel kavramların ya da problemlerin çözümünde neden ve nasıl sorularına ikna edici cevaplar almanın gerekli olduğunu düşünüyor musunuz?
- Neden ve nasıl sorularına cevap ararken planlı, programlı ve mantıklı gerekçelerle problemi anlamlandırmanın matematiksel düşünme becerilerini geliştireceğini düşünüyor musunuz?
- Siz matematiksel ispatı nasıl tanımlarsınız?

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- De Morgan kuralını doğruluk tablosu yardımı ile ispatlayınız.
- Collatz Sanısı ve Goldbach Sanısı'nı araştırınız.
- Raymond Smullyan'ın "Dünyanın en zor mantık bilmecesi"ni araştırınız.

KAYNAKLAR

- Aksu, M. (1985). *Ortaöğretim Kurumlarında Matematik Öğretimi Ve Sorunları*. TED Yayınları.
- Çevik, A. (2019). *Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık*. Nesin Matematik Köyü.
- Çıldır, M. (2007). Geometrilerin ve geometri öğretiminin gelişimi, çeşitleri ve karşılaştırılması. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Euclid, Sertöz, A. S., Çengelci, B., Çanakçı, Z., Kılıçkaya, Ö., & Akca, D. (2019). *Öklid'in Elemanları*. TÜBİTAK.
- İşleyen, T. (2013). Ortaöğretim öğrencilerinin sonsuzluk algıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 21 (3), 1235-1252.
- MEB (2020). Ortaöğretim Fen Lisesi *Matematik 9.Sınıf Ders Kitabı*. <https://www.eba.gov.tr/arama?q=9.%20s%C4%B1n%C4%B1f%20fen%20lisesi%20matematik> Erişim Tarihi: 18.05.2021
- Nesin, A. (2020). *Matematik ve Gerçek*. Nesin Matematik Köyü.
- Ülger, A. (ty). *Matematiğin Kısa Tarihi*. Koç Üniversitesi. <http://home.ku.edu.tr/~aulger/histofmathematics.html> Erişim Tarihi: 18.05.2021

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Akran Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

**Etkinlik Formu Cevapları**

1. Etkinliğin içerisinde verilmiştir.

2. a. 3 asal sayı değildir.

b. En küçük doğal sayı 0 değildir.

c. $2^4 \leq 4^2$ tir.

3. Etkinliğin içerisinde verilmiştir.

4. Etkinliğin içerisinde verilmiştir.

5. a. p : “Mutlu aileler birbirine benzer.”

q : “Her mutsuz ailenin kendine özgü bir mutsuzluğu vardır.”

Cevap: $p \wedge q$

b. p : “Bir insan, olan şeyleri aramalıdır.”

q : “Bir insan, olması gerektiğini düşündüğü şeyleri aramalıdır.”

Cevap: $p \wedge q'$

c. p : “Bir olay maceraya dönüşür.”

q : “Biri macerayı anlatır.”

Cevap: $p \Leftrightarrow q$

Etkinlik Formu

1. Aşağıdaki ifadelerin sadece doğru ya da yanlış olma durumlarını inceleyiniz. Doğruluğundan ya da yanlışlığından bahsedemeyeceğimiz ifadeler var mı?

- a. Su 100 derecede kaynar.
- b. Her karga siyahtır.
- c. $x + 2 = 2x$
- d. Bugün hava güneşlidir.
- e. Yarın erken kalk.
- f. $2 + 2 = 5$
- g. Tüm asal sayılar tektir.
- h. Eğer hava güneşli ise denize gideceğim.
- i. Bir bardak su getirir misin?
- j. Her çift sayı 2 ile bölünür.
- k. $x^2 = 16$ olan bir x tam sayısı vardır.

2. Aşağıdaki ifadelerin olumsuzlarını oluşturup doğruluk değerlerini belirleyiniz.

- a. 3 asal sayıdır.
- b. En küçük doğal sayı 0'dır.
- c. $2^4 > 4^2$ tür.

3. Bir sınıfta öğretmen yoklama almaktadır.

p : "Ali geldi."

q : "Ayşe geldi."

Yapılan yoklamaya göre p' , $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ ifadelerin ne anlama geldiğini açıklayınız ve doğruluk tablosu yapınız.

p	q	p	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						



4. A, B ve C futbol takımlarıyla düzenlenen turnuvada şampiyon olan takıma kupa verilecektir. Ancak hangisinin şampiyon olduğu bilinmemektedir. Aşağıdaki bilgileri kullanarak kupanın kimin aldığını bulunuz.

1. Kupayı A almamıştır ve C almamıştır.
2. Kupayı A almamıştır veya B almıştır.
3. Kupayı B almamıştır ya da C almamıştır.

p	q	p							
1	1	1							
1	1	0							
1	0	1							
1	0	0							
0	1	1							
0	1	0							
0	0	1							
0	0	0							

5. Aşağıdaki cümlelerin her birini sembolik mantık dilinde ifade ediniz.

- a. Mutlu aileler birbirine benzer ancak her mutsuz ailenin kendine özgü bir mutsuzluğu vardır.
(Leo Tolstoy, Anna Karenina)
- b. Bir insan olan şeyleri aramalı, olması gerektiğini düşündüğü şeyleri değil.
(Albert Einstein)
- c. Bir olayın maceraya dönüşmesi için birinin onu anlatması gerekli ve yeterlidir.
(Jean-Paul Sartre)



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

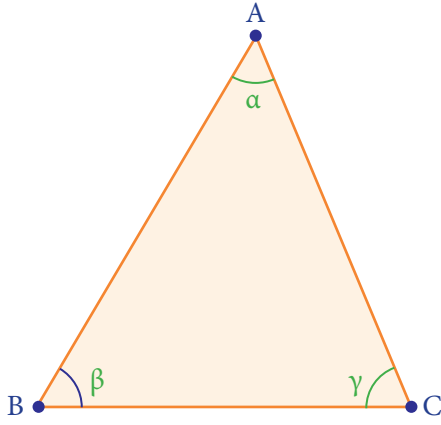
ETKİNLİK ADI	: MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Matematiksel İspat
KAZANIMLAR	: 1. Teoremleri uygun yöntemleri seçerek ispatlar. 2. İspatları farklı kriterler açısından değerlendirir.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Matematiksel ispat yöntemlerinden tümevarım, doğrudan ispat, dolaylı ispat ve olmayana ergi yöntemlerinin açıklanması amaçlanmaktadır. Ayrıca geometrik ispat ve sözsüz ispat yaklaşımlarının matematiksel ispat içerisindeki yerinin fark edilmesi hedeflenmektedir. Aynı teoremin farklı ispatları yapılarak, verilen teoremin hangi ispat yöntemi kullanılarak yapılması gerektiğine yönelik tartışmalar yapılması hedeflenmektedir.

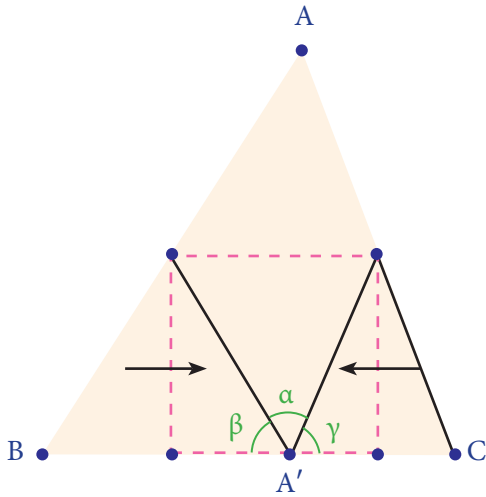
Başlarken...

Origami Japon kültürünün bir parçası olan ve kelime anlamı kâğıt katlama olarak bilinen, kâğıdın kesilmeden ve yapıştırıcı kullanılmadan katlanması ile estetik olarak güzel yapıların oluşturulduğu bir sanat türüdür. Origami ile birçok eser yapılabileceği gibi tıp dünyasından uzay teknolojisine kadar birçok alana ilham olmuştur. Matematiksel kavramları görselleştirmek ya da oluşturmak için de kâğıt katlama yöntemi kullanılabilir. Matematiksel kavramların, ilke ve prensiplerin şekiller, diyagramlar, grafikler gibi yapılar ile gösterimi ispat yapmayı kolaylaştıran temsiller olmuştur. Teorem ispatları bağlamında görsel sunumlar ispatın anlaşılmasını kolaylaştırır ve ispatın yapılandırılmasına katkıda bulunurlar. Origami ile ispat yapılmasının bir ispat yöntemi olarak kabul edilmesi hâlen tartışılmaktadır ancak bu alanda çalışmalar yapılmakta ve origami aksiyomları belirlenmektedir. Şimdi siz de elinize üçgen şeklinde bir kâğıt alarak ve sadece katlayarak üçgenin iç açılar toplamının 180° olduğunu gösterin.



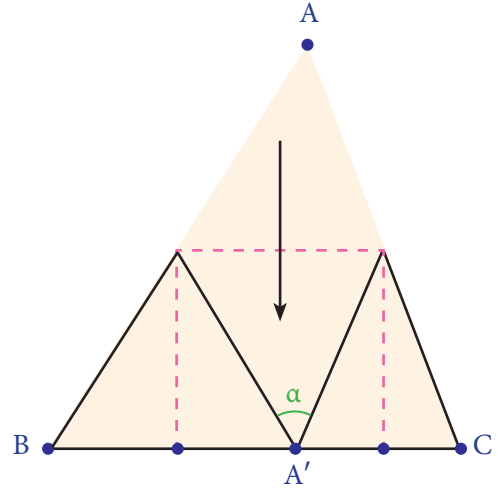
α, β, γ bir üçgenin iç açılarıdır.

Şekil 1.



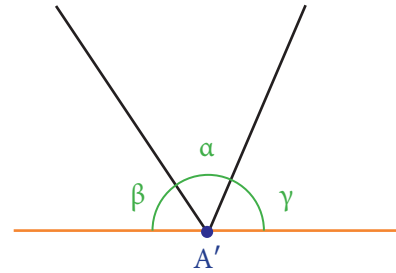
Daha sonra B ve C köşeleri de A' noktasına gelecek şekilde katlanır.

Şekil 3.



Üçgenin kenarlarının orta noktaları belirlenir ve A köşesi bu noktalara göre katlanır.

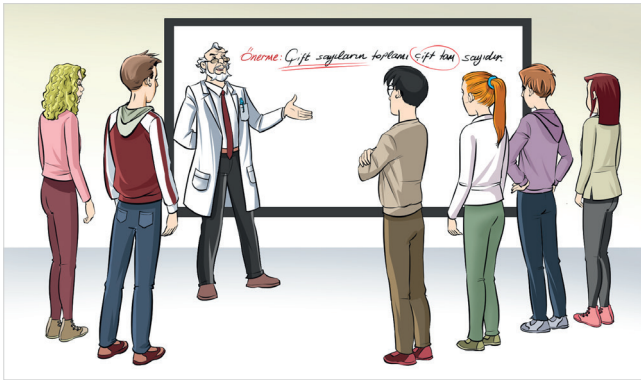
Şekil 2.



Üçgen bu şekilde katlandığında açılar birleşerek bir doğru açığı oluşturmaktadır.

Şekil 4.

İspata Giriş



Öğrencilere “İki çift sayının toplamı çift sayı mıdır?” sorusu yöneltilir. Öğrencilerin cevapları ile beyin fırtınası yapıldıktan sonra ispatının yapılması istenir. Öğrencilerin birkaç tane çift sayının toplamının çift olduğuna yönelik örnekler vermesi beklenir. Bu ifadenin ispatına yönelik tartışmalara yer verilir.

- İspat yapılacak kümenin eleman sayısı önemli midir? Mesela “Çift rakamların toplamı çifttir.”

önermesini ispatlamak “Çift tam sayıların toplamı çift tam sayıdır.” önermesini ispatlamaktan kolay mıdır?

- Verilen sözel ifadeyi matematik diline çevirmeli miyiz? Burada “a ve b çift sayılar ise a + b bir çift sayıdır.” yazmak yeterli midir?
- Daha önce bildiğimiz kanıtlanmış teoremleri, tanımları, kuralları kullanmalı mıyız?

Bir teorem, hipotez ve hükümden oluşur. $p \Rightarrow q$ teoreminde p’ye **hipotez (varsayım)**; q’ya **hüküm (yargı)** denir. Teoremden hem p’nin (hipotezin) hem de q’nun (hükümün) doğru olması gerekir.

Doğrudan İspat Yapma Teknikleri

1. Doğrudan İspat Yöntemi

Önerme:

Eğer p ise q

Bu yöntemde verilen ifade istenilen sonucu ulaşmak için direkt kullanılır. Verilen p önermesi doğru olarak kabul edilir, daha önceden doğruluğu kanıtlanmış teoremleri veya ispatları kullanarak q önermesine ulaşılır.

İspat:

Kabul edelim ki p olsun.

...

Bu nedenle q doğrudur.

Önerme:

Eğer x tek ise x^2 tektir.

İspat:

Kabul edelim ki x tek olsun.

Tek sayı tanımına göre $x = 2a + 1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.

Buradan $x^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ bulunur.

Böylece $b = 2a^2 + 2a$ seçilerek $x^2 = 2b + 1$ yazılabilir.

O hâlde $x^2 = 2b + 1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu nedenle, yine tek tam sayı tanımından, x^2 tektir.

Önerme:

Kabul edelim ki a, b, c $\in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a|b$ ve $b|c$ ise $a|c$ olur.

**İspat:**

Kabul edelim ki $a|b$ ve $b|c$ olsun.

$a|b$ ise $b = ad$ olacak şekilde bir $d \in \mathbb{Z}$ vardır.

Benzer şekilde $b|c$ ise $c = be$ olacak şekilde bir $e \in \mathbb{Z}$ vardır.

Buna göre $c = be = (ad)e = a(de)$ olur ve $x = de$ seçilerek $c = ax$ yazılabilir.

Bu nedenle $a|c$ olur.

2. Durum İncelemeli İspat

Önerme birden fazla durum içeriyorsa, ispatı kolaylaştırmak için bu durumları parçalara ayırarak ayrı ayrı ispatlarız.

Önerme:

$1 + (2n - 1)(-1)^n$ ifadesi bütün n tam sayıları için 4'ün bir katıdır.

İspat:

$(-1)^n$ ifadesi, n tek sayı iken negatif, çift sayı iken ise pozitif bir sayıdır. Önermeyi aşağıdaki şekilde iki duruma ayırabiliriz.

1. Durum: n bir çift sayı olsun.

$k \in \mathbb{Z}$ için $n = 2k$ olarak alınır.

Bu durumda $1 + (4k - 1)(-1)^{2k} = 1 + (4k - 1) = 4k$ olur.

2. Durum: n bir tek sayı olsun.

$k \in \mathbb{Z}$ için $n = 2k+1$ olarak alınır.

Bu durumda $1 + (-1)^{2k+1}(4k + 2 - 1) = 1 + (-1)(4k + 1) = -4k$ olur.

İki durum tüm kümeyi kapsadığından ispat tamamlanmış olur.

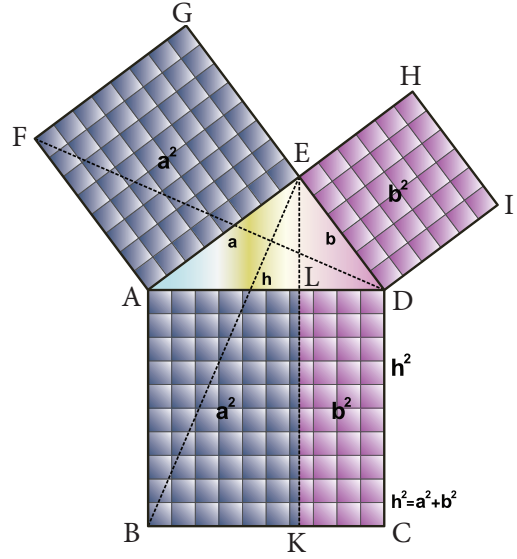
Doğrudan ispat yöntemi ile ispat çalışmaları yapılır (Etkinlik Formu Soru 1).

3. Geometrik İspat**Önerme:**

Pisagor Teoremi “Bir dik üçgenin dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün karesine eşittir.”

İspat:

ABE üçgeninin alanı ABKL dikdörtgeninin alanının yarısıdır. ABE üçgeni ile ADF üçgeni eş üçgenlerdir ve alanları eşittir. ADF üçgeninin alanı GFAE karesinin alanının yarısıdır. Dolayısıyla ABKL dikdörtgeninin alanı GFAE karesinin alanına eşittir. Aynı eşlik LKCD dikdörtgeni ve HEDI karesi için de bulunur. ABCD karesinin alanı GFAE ve HEDI karelerinin alanları toplamına eşittir. O hâlde $h^2 = a^2 + b^2$ olur.

**4. Tümevarım ile İspat Yöntemi**

Sayılamayacak kadar çok domino taşıyla bir oyun oynadığımızı varsayalım. Domino taşlarını dik olarak arka arkaya dizdiğimizizi düşünelim. Amacımız tüm taşları devirmek olsun. Tüm domino taşlarının devrilmesi için ne gerekir? Her domino taşı, kendisi devrildiğinde düşerken değdiği domino taşını da düşürecek şekilde dizilmesi önemli midir? Domino taşının biri devrildiğinde ardındaki de devrilecek şekilde yerleştirirsek ve ilk taşı da devirirsek, isteğimiz gerçekleşir.



- İlk domino taşı devrilebilmelidir.
- Bir domino taşı devrildiğinde komşu taş da devriliyorsa, aynı şekilde dizilmiş olan ve sıranın devamı olan bütün domino taşlarının devrileceği sonucuna varılabilir.

Bu duruma **domino etkisi** denir.

Önermede doğruluğu bildirilen özelliğin sağlandığı kümenin pozitif tam sayıların bir alt kümesi olması durumundan önermenin doğrudan ispatı özel bir hâl alır.

Önerme:

$s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ önermelerinin hepsi doğrudur.

İspat:

(1) İlk önce s_1 önermesinin doğru olduğu ispatlanır.

(2) Her $k \geq 1$ için $s_k \Rightarrow s_{k+1}$ önermesi ispatlanır.

Tümevarım yöntemine göre her s_n önermesi doğrudur.

Önerme:

Eğer $n \in \mathbb{N}^+$ ise $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ olur.

**İspat:**

Tümevarım yöntemini kullanalım.

1. Bu önerme, $n = 1$ için $1^2 = 1$ hâlini alır. Bunun doğru olduğu açıktır.

2. Şimdi, her $k \geq 1$ için $s_k \Rightarrow s_{k+1}$ yani

$s_k : 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$ olduğunu kabul edelim.

$s_{k+1} : 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2(k+1)-1) &= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2(k+1)-1) \\
 &= (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1)) + (2(k+1) - 1) \\
 &= k^2 + (2(k+1) - 1) \\
 &= k^2 + 2k + 1 \\
 &= (k+1)^2
 \end{aligned}$$

O hâlde $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$ olur.

Yani $s_k \Rightarrow s_{k+1}$ doğrudur.

Tümevarım yöntemine göre $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ eşitliği her $n \in \mathbb{N}^+$ için doğrudur.

Tümevarım yöntemi ile ispat çalışmaları yapılır (Etkinlik Formu Soru 2).

Önerme:

Bütün atlar aynı renktedir.

İspat:

Tümevarımla ispat yöntemini kullanalım.

$n = 1$; için ifadenin doğruluğu açıktır (bir at aynı renktedir.).

$n = k$; için yani k tane at aynı renkte olsun.

$n = k + 1$; için bütün atların aynı renkte olduğunu göstermeliyiz.

k tane atın aynı renk olduğunu kabul ettik, ilk atımız da k tane atla aynı renkte olduğuna göre $k+1$ at aynı renktedir. Tabii böyle bir durum söz konusu değildir. Nerede hata yaptığımızı söyleyebilir misiniz?

Tümevarım ilkesinde önermeler arasında ardışık şekilde bir bağıntı olduğunda bütüne ulaşılabilir.



Dolaylı İspat Yapma Teknikleri

Bazı durumlarda “Eğer p doğru ise q doğrudur.” bileşik önermesini doğrudan ispatlamak zor olabilir. Bu durumda dolaylı ispat yapma teknikleri kullanılır.

1. Karşıt Ters İspat Yöntemi

Önerme Eğer p ise q :

$p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğunu ispatlamak yerine buna denk olan $q' \Rightarrow p'$ önermesinin doğru olduğunu göstermeye karşıt ters ispat yöntemi denir. $p \Rightarrow q$ önermesini doğrudan ispatlamanın zor olduğu durumlarda, bu önermeye denk olan $q' \Rightarrow p'$ önermesinin doğru olduğunu göstermek daha kolay ise karşıt ters ispat yöntemi kullanılabilir.

İspat:

Kabul edelim ki q' olsun.

...

Bu nedenle p' olur.

Önerme:

Eğer $x \in \mathbb{Z}$ için $x^2 - 6x + 5$ çift ise x tek.

İspat:

Kabul edelim ki x tek olmasın.

Bu durumda x çifttir yani $x = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.

Buna göre $x^2 - 6x + 5 = (2a)^2 - 6(2a) + 5 = 4a^2 - 12a + 4 + 1 = 2(2a^2 - 6a + 2) + 1$ olur.

Eğer $b = 2a^2 - 6a + 2$ seçilirse $x^2 - 6x + 5 = 2b + 1$ yazılabilir.

O hâlde $x^2 - 6x + 5$ tektir.

Sonuç olarak $x^2 - 6x + 5$ çift değildir.

Karşıt Ters İspat yöntemi ile ispat çalışmaları yapılır (Etkinlik Formu Soru 3).

2. Olmayana Ergi ile İspat (Çelişki ile İspat)

Önerme:

Eğer p ise q .

$p \Rightarrow q$ önermesi $p' \vee q$ önermesine denktir. Bu yöntemde $p' \vee q$ önermesinin yanlış olduğunu yani $(p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$ doğru olduğunu kabul ederek başlarız. Bu kabulde başlayıp devam ederken matematiksel bir yanlışlık ortaya çıkarsa aslında teoremin doğruluğunu ispatlamış oluruz.

**İspat:**

Kabul edelim ki $p \wedge q'$ olsun.

...

Bu nedenle $p \wedge q'$ yanlış olur.

Önerme:

Boş küme her kümenin alt kümesidir.

İspat:

Çelişki ile ispatlayalım. Boş küme herhangi bir A kümesinin alt kümesi olmasın. A kümesinde bulunmayan boş kümenin en az bir elemanı vardır. Bu da boş kümenin tanımına aykırıdır.

Önerme:

Bir $a \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer a^2 çift ise a çifttir.

İspat:

Kabul edelim ki a^2 çift olsun ve a çift olmasın.

Bu durumda a^2 çifttir ve a tektir.

Dikkat edilirse a tek olduğu için $a = 2c + 1$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır.

Buradan $a^2 = (2c + 1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = 2(2c^2 + 2c) + 1$ yazılabileceği için a^2 tektir.

Sonuç olarak a^2 çifttir ve a^2 tektir. Bu bir çelişkidir.

Aynı önerme farklı ispat yöntemleri ile de ispatlanabilir. Olmayana ergi güçlü bir ispat yöntemidir. Ancak bu yöntemi, doğrudan veya karşıt ters ispat yöntemi kullanılamaz gibi gözüktüğünde kullanmak en iyisidir. Bu nedenle daha basit olan yaklaşımla devam etmek en doğrusudur. Yukarıdaki ispatta herhangi bir yanlış yoktur ancak aşağıdaki ispat daha kullanışlıdır.

Önerme:

Bir $a \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer a^2 çift ise a çifttir.

İspat:

İspatı karşıt ters ispat yöntemiyle yapalım.

Kabul edelim ki a çift olmasın. Bu durumda a tek olur.

Tek sayı tanımına göre $a = 2c + 1$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır.

Buradan $a^2 = (2c + 1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = 2(2c^2 + 2c) + 1$ bulunur.

Böylece $b = 2c^2 + 2c$ seçilerek $a^2 = 2b + 1$ yazılabilir.

O hâlde $a^2 = 2b + 1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu nedenle, yine tek sayı tanımından, a^2 tektir.

Önerme:

$\sqrt{2}$ irrasyoneldir.

İspat:

Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ rasyoneldir. Yani $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu kesir en sade hâlde olsun. Buna göre a ve b aynı anda çift olamaz.

O hâlde her iki tarafın karesi alındığında $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ya da $2b^2 = a^2$ elde edilir.

O hâlde a^2 çifttir. a^2 çift ise a da çifttir.

a ve b aynı anda çift olamayacağına göre b tektir.

Şimdi, a çift olduğu için $a = 2c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır.

Eşitlikte yerine yazıldığında $(2c)^2 = 2b^2$ yani $4c^2 = 2b^2$ bulunur.

Buradan $b^2 = 2c^2$ bulunur. Bu sonuca göre hem b^2 hem de b çifttir.

Ama daha önce b 'nin tek olduğu sonucuna varılmıştır.

Böylece, b çifttir ve b tektir çelişkisine ulaşılır.

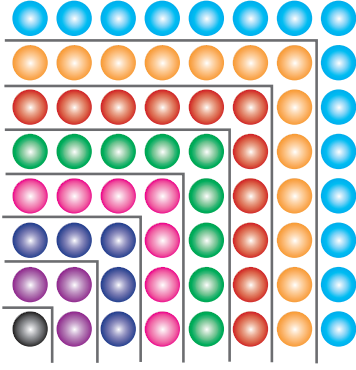
İspat çalışmaları yapılır (Etkinlik Formu Soru 4).

Sözsüz İspat

Sözsüz ispat yaklaşımı günümüzde popüler olmuş bir yaklaşımdır. Sözsüz ispatlar, sözel dil ile hiçbir yorum yapılmadan noktalar, kareler, küreler, toplar, küpler vb. ile kolaylıkla çizilebilen araçlar kullanılarak oluşturulabilen tamamen diyagramlara dayalı ispatlardır. Sözsüz ispatların geleneksel ispatlar gibi kabul görüp görmemesi hâlen tartışılmaktadır. Ancak sözsüz ispatların belirli bir ifadenin neden doğru olabileceğinin görülmesine ve ispat yapma sürecinde yaşanan sorunların azaltılmasına destek olacağı düşünülmektedir.

**Önerme:**

Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ olur.

Sözsüz İspatı:

Sol alt köşede bulunan 1 noktaya şekildeki gibi 3 nokta eklendiğinde 2×2 bir kare oluştuğu görülmektedir. Yani $1 + 3 = 2^2$ dir. Daha sonra şekle 5 kare eklendiğinde 3×3 bir kare oluştuğu görülmektedir. Yani $1+3+5=3^2$ dir. Bu yaklaşım önermenin daha anlaşılır olmasını ve yapılacak ispat için yol gösterici olmasını sağlar. Önermenin ispatı tümevarım yöntemiyle yapılabilir.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- Öklid'in postulatlarının geometrik ispatlarını araştırınız.
- Sözsüz ispat yöntemlerini (proofs without words) araştırınız.
- Pisagor Teoremi'nin farklı ispatlarını araştırınız.
- Dört Renk Problemi'nin ispatını araştırınız.

KAYNAKLAR

- Çevik A. (2019). *Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık*. Nesin Matematik Köyü.
- Hammack, R. (2013). *Book of Proof*. Virginia Commonwealth University.
- MEB, (2020). *Orta Öğretim Fen Lisesi Matematik 9. Sınıf Ders Kitabı*. <https://www.eba.gov.tr/arama?q=9.%20s%C4%B1n%C4%B1f%20fen%20lisesi%20matematik>
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* (No. 1). MAA.
- Polat, K., & Demircioğlu, H. (2016). Matematik Eğitiminde Sözsüz İspatlar: Kuramsal Bir Çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140.
- Uygur Kabael T. (2020). İspat Yapma Yöntemleri. In I. Uğurla (Ed.) *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış*, (ss. 227-242). Ankara. Anı Yayıncılık.
- Şadan, N. & Uğurel I. (2020). Görsel (Sözsüz) İspatlar. In I. Uğurla (Ed.) *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış*, (ss. 243-274). Ankara. Anı Yayıncılık.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceli Puanlama Anahtarı Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. a. Doğrudan İspat:

$x = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. $x \cdot y = 2a \cdot y = 2b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır.

b. Doğrudan İspat:

$a \mid b$ ise $b = ad$ olacak şekilde bir $d \in \mathbb{Z}$ vardır. $a \mid c$ ise $c = ae$ olacak şekilde bir $e \in \mathbb{Z}$ vardır.

Buna göre $b + c = ad + ae = a(d + e)$ olur ve $x = d+e$ seçilerek $b + c = ax$ yazılabilir.

2. Tümevarım ile İspat:

1. Bu önerme, $n = 1$ için $2=1 \cdot 2$ hâlini alır. Bunun doğru olduğu açıktır.

2. Şimdi, her $k \geq 1$ için $s_k \Rightarrow s_{k+1}$ yani

$s_k : 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2k = k \cdot (k+1)$ kabul edelim.

$s_{k+1} : 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1) \cdot (k+2)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2k + 2(k+1) = k \cdot (k+1) + 2(k+1) = k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2 = (k+1) \cdot (k+2)$$

3. a. Karşıt Ters İspat:

Kabul edelim ki n tek olmasın. Bu durumda n çifttir yani $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $n^2 = (2a)^2 = 4a^2$ olur. Eğer $b = 2a^2$ olarak seçilirse $n^2 = 2b$ yazılabilir. O hâlde çifttir yani tek değildir.

b. Karşıt Ters İspat:

Kabul edelim ki $x \geq 0$ olmasın. Bu durumda $x < 0$ olur. $x^5 + 7x^3 + 5x < 0$ olur ve $x^4 + x^2 + 8 > 0$ olur. $x^5 + 7x^3 + 5x < x^4 + x^2 + 8$ yazılabilir. O hâlde $x^5 + 7x^3 + 5x \geq x^4 + x^2 + 8$ değildir.

4. a. Çelişki ile İspat:

Kabul edelim ki $\sqrt{6}$ rasyoneldir. Yani $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu kesir en sade hâlde olsun. Buna göre $\text{ebob}(a, b) = 1$ olur. $6 = \frac{a^2}{b^2}$ ya da $6b^2 = a^2$ elde edilir. O hâlde a^2 6'nın katıdır. a^2 6'nın katı ise a da 6'nın katıdır (Karşıt ters ile ispatlanabilir.). Şimdi, a 6'nın katı olduğu için $a = 6c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır. Eşitlikte yerine yazıldığında $(6c)^2 = 6b^2$ yani $36c^2 = 6b^2$ bulunur. Buradan $b^2 = 6c^2$ bulunur. Bu sonuca göre hem b^2 hem de b 6'nın katıdır. Ama daha önce $\text{ebob}(a, b) = 1$ demiştik.

**Etkinlik Formu Cevapları****b. Çelişki ile İspat:**

Kabul edelim ki $A \cap (B - A) \neq \emptyset$ olsun. $\exists x \in A \cap (B - A)$ ise $x \in A$ ve $x \in (B - A)$ olur. Ancak $B - A = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \notin A\}$ olarak tanımlanır. Yani $x \in A$ ve $x \notin A$ ise bu bir çelişkidir.

c. Olmayana Ergi Yöntemi: Önermemizin yanlış olduğunu varsayalım. Önermemizi “Sonlu sayıda asal sayı vardır.” olarak değiştirelim, bu durumda en büyük asal sayı olmak zorundadır. Bu asal sayı p_n olsun. Şimdi şöyle bir x sayısı tanımlayalım, x sayısı bütün asalların çarpımından bir fazladır.

$$x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n + 1$$

x sayısı hiçbir asal sayıya tam bölünmemekte, hep 1 kalanını vermektedir. Bu durumda x de bir asal sayıdır. Yani x asalı p_n asalından (en büyük asaldan) daha büyüktür. Bu bir çelişkidir. Demek ki sonsuz sayıda asal vardır.

5. Önerme:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Tümevarım ile İspat:

1. Bu önerme $n = 1$ için $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ hâlini alır. Bunun doğru olduğu açıktır.

2. Şimdi, her $k \geq 1$ için $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ yani

$$S_k: 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2} \text{ kabul edelim.}$$

$$S_{k+1}: 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

6. Önerme:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = \frac{1}{4} (2n)^2 = n^2$$

Tümevarım ile İspat:

Etkinlik içerisinde verilmiştir.

7. “3. Şimdi bir m sayısı için $n=2m$ olsun.” hatalı bir adımdır. Bu dögüsel bir çıkarımdır yani kanıtlanmak istenen cümleye denktir. n 'yi $2m$ olarak yazabileceğinizin bir dayanağı yoktur.

Etkinlik Formu

1. Aşağıdaki önermeleri uygun ispat yöntemini belirleyerek ispatlayınız.

- a. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer x çift ise $x \cdot y$ çifttir.
- b. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $a \mid (b + c)$ olur.

2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $2+4+ \dots + 2n = n \cdot (n + 1)$ olduğunu ispatlayınız.

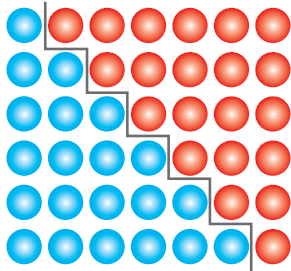
3. Aşağıdaki önermeleri uygun ispat yöntemini belirleyerek ispatlayınız.

- a. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n^2 tek ise n tektir.
- b. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^5 + 7x^3 + 5x \geq x^4 + x^2 + 8$ ise $x \geq 0$ olur.

4. Aşağıdaki önermeleri uygun ispat yöntemini belirleyerek ispatlayınız.

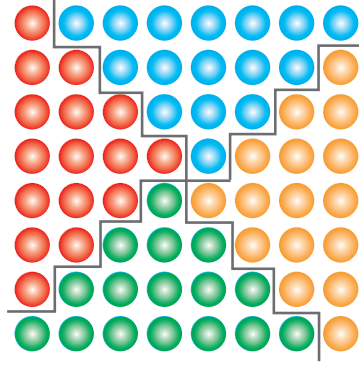
- a. $\sqrt{6}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.
- b. Eğer A ve B iki küme ise $A \cap (B - A) = \emptyset$ olur.
- c. Sonsuz sayıda asal sayı vardır.

5. Sözsüz ispatı aşağıdaki gibi verilen ifadeyi yazınız ve ispatlayınız.





6. Sözsüz ispatı aşağıdaki gibi verilen ifadeyi yazınız ve ispatlayınız.



7. Aşağıdaki ispatın doğruluğunu tartışınız.

Önerme:

Eğer n^2 çift ise n çifttir.

İspat:

1. n^2 çift bir sayı olsun.
2. O hâlde $n^2 = 2k$ olacak şekilde bir k vardır.
3. Şimdi bir m sayısı için $n = 2m$ olsun.
4. O hâlde n çifttir.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: KÜMELER
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Kümeler, Bağıntı, Fonksiyon
KAZANIMLAR	: 1. Sonlu ve sonsuz kümelerle ilgili temel özellikleri açıklar. 2. Küme işlemleri üzerindeki temel özellikleri ispatlar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, öğrencilerin ayırık küme, sonlu küme ve sonsuz küme kavramlarını tanımaları hedeflenmektedir. Ayrıca kümelerde birleşim, kesişim, fark ve tümleme işlemlerinin özelliklerinin ispatlanması amaçlanmaktadır. Kümelerde yapılan işlemler ve sembolik mantıkta kullanılan sembol, gösterim ve bunlarla ifade edilen işlemler ilişkilendirilecektir.

Başlarken...

Alman matematikçisi Georg Cantor (1845–1918), modern matematiğin temeli olan kümeler teorisinin kurucusu olarak kabul edilir. Ayrıca Zermelo ve Fraenkel de kümeler konusunun gelişmesinde önemli katkılar sunmuşlardır. Bu konu matematikteki en temel ve önemli konulardan biridir. Çoğu zaman, elimizdeki bilgileri veya etrafımızdaki varlıkları sayma, sıralama ve düzenleme ihtiyacı hissederiz. Bunları yaparken gruplandırma ve sınıflandırmalar yaparız. Yani sistematik bir dizilim ararız. Örneğin;

- Resimde hangi tür hayvanlar vardır?
- Resimdeki hayvan türlerinden her birinin sayısını bulunuz.
- Resimdeki en sevimli hayvan hangisidir?
- Sizin için en sevimli olan hayvan ile başka birisi için en sevimli olan hayvan her zaman aynı olabilir mi?



Küme matematikte tanımsız terimlerden biridir. Ancak, Georg Cantor (1845 –1918), küme kavramını matematiksel bir kavram olarak ilk kullanan kişidir ve kümeyi; “İyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğu” olarak tanımlamıştır. Burada geçen “iyi tanımlanmış” kavramı, ilgili nesneleri algı, sezgi ve düşüncelerimizle belirleyebilmemizdir. Yani belirtilen topluluğu oluşturan nesneler kişilere göre değişmemelidir. Herkes tarafından aynı cevap verilmelidir. Örneğin, “sınıfınızdaki yeşil gözlü öğrenciler” nesneler topluluğu bir küme belirtirken, “yılın bazı ayları”nın oluşturduğu nesneler topluluğu bir küme belirtmez. O hâlde yukarıdaki resimde hayvanlarla ilgili ilk iki sorunun cevabı birer küme oluşturur. Çünkü, hayvan türleri ve sayıları herkes tarafından bellidir ancak son iki sorunun cevabı bir küme oluşturmaz, çünkü resimdeki en sevimli hayvan kişiye göre değişiklik gösterebilir.

TANIM

Kümeler genellikle alfabemizde bulunan A, B, C gibi büyük harflerle adlandırılırlar. Bunun yanında bir sembol veya özel bir isim gibi farklı şekillerde de adlandırılabilirler.

Bir kümeyi oluşturan nesnelere o kümenin **elemanları** denir. Eğer a, A kümesine ait bir eleman ise $a \in A$ biçiminde yazılır ve “a elemanıdır A” şeklinde okunur. Eğer b, A kümesine ait bir eleman değilse $b \notin A$ biçiminde yazılır ve “b elemanı değildir A” şeklinde okunur. Bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ ile gösterilir.

Kümelerin Gösterilişi

1. Liste Yöntemi: Kümenin elemanlarının açan küme parantezi “{”, ve kapatan küme parantezi “}” arasında araya virgül konularak gösterilmesidir. Örneğin, $A=\{2,3,5,7\}$

2. Venn Şeması Yöntemi: Kümenin elemanlarının kapalı bir eğri içerisinde, her bir elemanın yanına birer nokta “•” konularak gösterilir. Bu gösterim, ismini John Venn’den (1834–1923) almaktadır.

3. Ortak Özellik Yöntemi: Kümenin elemanlarının anlaşılır biçimde ortak özelliklerini belirtecek şekilde gösterilmesidir.

Örnek:

2018 yılında en çok ziyaret edilen 10 müze aşağıdaki tabloda verilmiştir.

1	İstanbul Topkapı Sarayı Müzesi	3.004.620
2	İstanbul Ayasofya Müzesi	2.922.037
3	Konya Mevlana Müzesi	2.817.386
4	Nevşehir Hacıbektaş Müzesi	443.160
5	İstanbul Topkapı Sarayı - Harem Dairesi	421.780
6	İstanbul Arkeoloji Müzeleri	378.675
7	Antalya Aziz (St.) Nikolaos Müzesi	364.996
8	Ankara Cumhuriyet Müzesi	353.727
9	Gaziantep Zeugma Mozaik Müzesi	268.374
10	Ankara Anadolu Medeniyetleri Müzesi	253.795

Tablodaki verileri kullanarak aşağıda belirtilen kümeleri liste yöntemi ile gösteriniz.

- Ziyaretçi sayısı 2 milyondan fazla olan müzeler kümesi
- Ziyaretçi sayısı 300.000 ile 400.000 arasında olan müzeler kümesi
- Müzelerin bulunduğu şehirler kümesi
- Tablodaki verilere göre Ankara'daki müzeler kümesi

Çözüm:

- {İstanbul Topkapı Sarayı Müzesi, İstanbul Ayasofya Müzesi, Konya Mevlana Müzesi}
- {İstanbul Arkeoloji Müzeleri, Antalya Aziz (St.) Nikolaos Müzesi, Ankara Cumhuriyet Müzesi}
- {İstanbul, Konya, Nevşehir, Antalya, Ankara, Gaziantep}
- {Ankara Cumhuriyet Müzesi, Ankara Anadolu Medeniyetleri Müzesi}

Küme kavramı ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1)

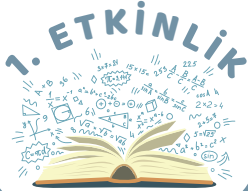
**Örnek:**

Görselde, Adana ilinin ilçelerinden oluşan harita verilmiştir. İlçelerden oluşan topluluğu A kümesi olarak isimlendirelim.

- A kümesinin elemanlarını yazınız.
- A kümesinin eleman sayısını bulunuz.
- Pozantı, A kümesinin bir elemanı mıdır?
- Kadirli, A kümesinin bir elemanı mıdır?

**Çözüm:**

- $A = \{\text{Çukurova, Seyhan, Sarıçam, Yüreğir, Karataş, Yumurtalık, Ceyhan, İmamoğlu, Karaisali, Pozantı, Aladağ, Kozan, Feke, Saimbeyli, Tufanbeyli}\}$
- $s(A)=15$
- $\text{Pozantı} \in A$
- Kadirli, Osmaniye ilinin bir ilçesidir. O hâlde, $\text{Kadirli} \notin A$



Asitler ve bazlar günlük hayatımızda sürekli olarak karşımıza çıkan maddelerdir. Örneğin günlük hayatımızı etkileyen çevre sorunlarından bir tanesi asit yağmurlarıdır. Tükettiğimiz besinlerin sindirilmesinde mide öz suyunda bulunan asitler önemli bir görev üstlenmektedirler. Çamaşırları ve bulaşıkları yıkarken kullandığımız deterjanlar ise bazik özelliktedir. Suda çözündüğünde hidrojen iyonu (H^+) veren bileşiklere asit, hidroksil iyonu (OH^-) veren bileşiklere baz denir. Bir çözeltinin ne kadar asidik ya da bazik olduğunu içeriğindeki serbest H^+ iyon derişimi belirler. Çözeltinin H^+ iyon derişimi pH değeri ile ifade edilir. pH değeri 7 olan bir çözelti nötrdür. H^+ ve OH^- iyonlarının yoğunluğu birbirine eşittir. pH değeri 7'den küçük olan çözelti asidik ve pH değeri 7'den büyük olan çözelti baziktir.



Aşağıdaki tabloda bazı sebze ve meyvelerin pH değerleri verilmiştir.

Sebze/Meyve	Limon	Domates	Muz	Brokoli	Soğan	İncir	Marul	Üzüm
pH Değeri	2	4	5	10	6	5	7	9

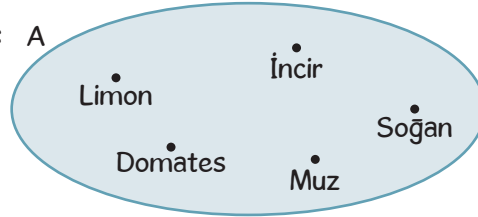
Bu tabloda, çözeltisi asidik olan bileşiklerin kümesi A, çözeltisi bazik olan bileşiklerin kümesi B ve çözeltisi nötr olan bileşiklerin kümesi C olsun.

- A kümesini liste yöntemi ile, Venn şeması yöntemi ile ve ortak özellik yöntemi ile gösteriniz.
- B kümesini liste yöntemi ile, Venn şeması yöntemi ile ve ortak özellik yöntemi ile gösteriniz.
- C kümesini liste yöntemi ile, Venn şeması yöntemi ile ve ortak özellik yöntemi ile gösteriniz.
- Her kümenin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm:

- a. Liste Yöntemi İle: $A = \{\text{Limon, Domates, Muz, Soğan, İncir}\}$

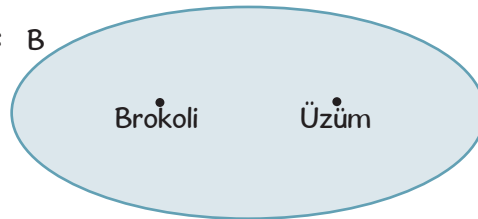
Venn Şeması İle: A



Ortak Özellik Yöntemi İle: $A = \{x: x, \text{tabloda bulunan ve pH değeri 7'den küçük olan sebze ya da meyve}\}$

- b. Liste Yöntemi İle: $B = \{\text{Üzüm, Brokoli}\}$

Venn Şeması İle: B



Ortak Özellik Yöntemi İle: $B = \{x: x, \text{tabloda bulunan ve pH değeri 7'den büyük olan sebze ya da meyve}\}$

- c. Liste Yöntemi İle: $C = \{\text{Marul}\}$

Venn Şeması İle:



Ortak Özellik Yöntemi İle: $C = \{x: x, \text{tabloda bulunan ve pH değeri 7 olan sebze ya da meyve}\}$

- d. $s(A)=5$, $s(B)=2$, $s(C)=1$,



Boş Küme ve Evrensel Küme

Öğrencilere aşağıdaki gibi sorular sorularak boş küme ve evrensel küme kavramları sorgulattılır.

- Resimdeki sepetin içinde bulunan eşyaların kümesi nedir?



- Belli özellikleri sağlayan ve oluşturabileceğimiz en fazla elemana sahip küme ne olabilir?



Yukarıdaki sorular incelendiğinde, ilk soruda sepetin içerisinde herhangi bir eleman bulunmamaktadır yani “boş kümeyi” işaret etmektedir. Boş sepet örneğinde olduğu gibi, boş kümenin hiç elemanı yoktur. Herhangi bir kümeden elemanlarını çıkartırsak boş kümeyi elde ederiz.

İkinci soruda ise, belli özellikleri sağlayan ve oluşturabileceğimiz en fazla elemana sahip küme bize evrensel kümeyi işaret etmektedir.

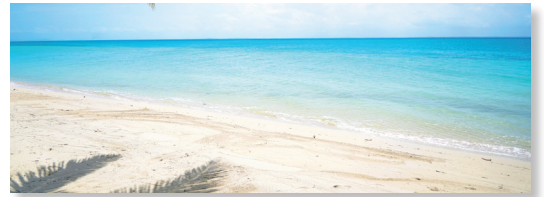
TANIM

Hiç elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme $\emptyset$ ya da $\{ \}$ sembolleriyle gösterilir.

Üzerinde işlem yapılan en geniş kümeye **evrensel küme** denir. Evrensel küme genellikle E harfi ile gösterilir.

Sonlu Küme ve Sonsuz Küme

- İlkokul 4. sınıf öğrencisi olan Ahmet ile annesi deniz kenarında büyük bir kumsalda yürüyüş yapıyorlar. Ahmet annesine sevgisini belirtmek için “Anne seni dünyanın tüm kumsallarındaki kum tanecikleri kadar çok seviyorum.” diyor.
- Ortaokul 5. sınıf öğrencisi olan Ferhat ile babası ormanda yürüyüş yapıyor. Ferhat babasına teşekkür etmek için “Baba seni dünyadaki tüm ağaçların yaprakları kadar çok seviyorum.” diyor.



Öğrencilere, “Sizce, Ahmet ve Ferhat’ın kıyas olarak kullandıkları kümelerden en çok elemana sahip olanı hangisidir?” şeklinde bir soru sorularak sonlu ve sonsuz küme kavramları sorgulattılır.

TANIM

Bir A kümesinin eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilebiliyorsa A kümesine “**sonlu küme**” denir ve bu sayı $s(A)$ ile gösterilir.

Sonlu olmayan kümeler “**sonsuz küme**” denir. Sonsuz bir kümenin eleman sayısı belirlenemez. Yani bir doğal sayı ile ifade edilemez.

Sonlu ve sonsuz küme ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 2)

Alt Küme

Resimde Asude’nin çalışma odası görünmektedir. Resimdeki nesneleri inceleyiniz.

- Çalışma odasındaki tüm nesnelerin kümesi A olsun. Kitaplıktaki nesnelerin kümesi de B olsun.
- A ve B kümelerinin elemanlarını liste yöntemiyle yazınız.
- A kümesinin elemanları B kümesinde de bulunuyor mu?
- A kümesinde olup B kümesinde olmayan eleman var mı?



Öğrencilere, yukarıdaki sorular sorularak alt küme kavramı sorgulattılır.

TANIM

A ve B herhangi iki küme olsun. A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı oluyorsa, A kümesi B kümesinin **alt kümesidir** denir ve $A \subseteq B$ veya $A \subset B$ şeklinde gösterilir. Başka bir ifadeyle, B kümesi A kümesini **kapsar** da diyebiliriz ve gösterim olarak $B \supset A$ veya $B \supseteq A$ kullanırız.

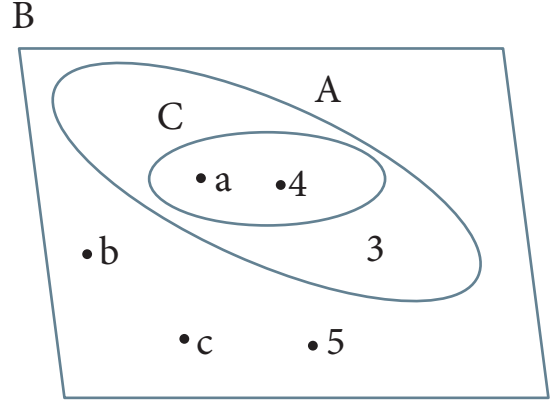
Eğer A kümesinin en az bir elemanı, B kümesinin elemanı değilse, A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir denir ve $A \not\subseteq B$ şeklinde gösterilir.

**Örnek:**

$A = \{a, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, 3, 4, 5\}$ ve $C = \{a, 4\}$ kümelerini birbirinin alt kümesi olma bakımından karşılaştıralım.

Çözüm:

C kümesinin bütün elemanları hem A kümesinin hem de B kümesinin elemanı olduğu için C kümesi hem A kümesinin hem de B kümesinin alt kümesidir. Ayrıca A kümesinin tüm elemanları B kümesinin de elemanı olduğundan A kümesi, B kümesinin alt kümesidir. Yani $C \subset A$, $C \subset B$ veya $A \subset B$ 'dir. Bu durumu Venn şemasıyla yandaki gibi gösterebiliriz.

**Etkinlik Formu Soru 3**

Küme	Eleman Sayısı	Alt Kümeleri	Alt Küme Sayısı
$A = \emptyset$	0	$\emptyset$	1
$B = \{1\}$	1	$\emptyset, \{1\}$	2
$B = \{1, 2\}$	2	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$	4
$B = \{1, 2, 3\}$	3	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$	8

Kümenin eleman sayısı ile alt küme sayısı arasındaki ilişki gözlemlendiğinde ortaya çıkan sonuç şu şekildedir.

$n=0$ için: $s(A)=0$ ve Alt Küme Sayısı: 1

$n=1$ için: $s(A)=1$ ve Alt Küme Sayısı: 2

$n=2$ için: $s(A)=2$ ve Alt Küme Sayısı: 4

$n=3$ için: $s(A)=3$ ve Alt Küme Sayısı: 8

TANIM

n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı: 2^n tanedir.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinin kaçında

- a. 3 elemanı bulunmaz?
- b. 3 elemanı bulunur?
- c. 1 elemanı bulunur, 3 elemanı bulunmaz?
- d. 1 ve 3 elemanları birlikte bulunur?
- e. 1 ve 3 elemanları birlikte bulunmaz?
- f. 1 veya 3 elemanları bulunur?
- g. 1 ve 3 elemanları birlikte bulunur, 4 elemanı bulunmaz?

Çözüm:

- a. Kümeden 3 elemanı çıkartılırsa geriye kalan $\{1, 2, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinden hiçbirinde 3 elemanı bulunmaz. Bu durumda $2^4 = 16$ alt kümede 3 elemanı yoktur.
- b. **1. Yol:** A kümesinin tüm alt kümelerinden 3 elemanı bulunmayan alt kümeleri çıkartılırsa geriye 3 elemanın bulunduğu alt kümeleri kalır. $2^5 - 2^4 = 32 - 16 = 16$ alt kümede 3 elemanı bulunur.
2. Yol: $\{1, 2, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinin her birine 3 elemanını eklersek, 3 elemanı olan alt kümeleri oluşturmuş oluruz. $2^4 = 16$ alt kümede 3 elemanı yoktur. Bunların her birine 3 elemanı eklediğimizde 3 elemanı olan alt kümeler oluşmuş olur. Yani 16 alt kümede 3 elemanı bulunur.
- c. A kümesinden 1 ve 3 elemanlarını çıkartırsak $\{2, 4, 5\}$ kümesi elde edilir. Bu kümenin alt kümelerinde 1 ve 3 elemanları bulunmaz. $2^3 = 8$ alt kümede 1 ve 3 elemanları bulunmaz. Bu 8 alt kümeye 1 elemanını eklersek 1 elemanı bulunan 3 elemanı bulunmayan alt kümeleri oluşturmuş oluruz. Yani, 8 alt kümede 1 elemanı bulunurken 3 elemanı bulunmaz.
- d. A kümesinden 1 ve 3 elemanlarını çıkartırsak $\{2, 4, 5\}$ kümesi elde edilir. Bu küme ile oluşturulacak alt kümelerde 1 ve 3 elemanları bulunmaz. $2^3 = 8$ alt kümede 1 ve 3 elemanları bulunmaz. Bu 8 alt kümeye 1 ve 3 elemanlarını eklersek 1 ve 3 elemanlarını birlikte bulunduran alt kümeler oluşturulmuş olur.
- e. 1 ve 3 elemanları birlikte bulunmaz demek 1 ve 3 elemanlarının birlikte bulunduğu durumlar haricindeki tüm durumları kapsar. d'de 1 ve 3 elemanlarının birlikte bulunduğu alt kümelerin sayısı 8 olarak bulunmuştu. Tüm alt kümelerin sayısı $2^5 = 32$ 'dir. 1 ve 3 elemanlarının birlikte bulunmadığı alt kümeler ise $32 - 8 = 24$ 'tür.
- f. 1 veya 3 elemanları bulunan alt kümeler, 1 ve 3 elemanlarının olmadığı alt kümeler haricindeki kümelerdir. 1 ve 3 elemanlarının olmadığı alt kümelerin sayısını 8 olarak bulmuştuk. Tüm alt kümelerin sayısından 8'i çıkartarak 1 veya 3 elemanları bulunan alt kümelerin sayısını bulabiliriz. $32 - 8 = 24$ 'tür.
- g. A kümesinden 1, 3 ve 4 elemanları çıkartılarak $\{2, 5\}$ kümesi oluşturulur. Bu küme ile oluşturan kümelerde 1, 3 ve 4 elemanları bulunmaz. $2^2 = 4$ tane alt kümede 1, 3 ve 4 elemanları bulunmaz. Bu kümelere 1 ve 3 elemanlarını eklersek, 4 alt kümede 1 ve 3 elemanları bulunurken 4 elemanları bulunmaz.

Alt küme ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 4-7)



Kümelerde İşlemler



Öğrencilere aşağıdaki gibi bir soru sorularak kümelerde birleşim ve kesişim işlemlerini fark etmeleri sağlatılmaya çalışılır.

Yakup Bey Çukurova bölgesinde yaşayan ve İç Anadolu bölgesine portakal ve mandalina gönderen bir çiftçidir. Yakup Bey Ankara, Konya, Eskişehir, Sivas ve Kayseri illerine portakal göndermekte; Ankara, Karaman, Konya, Nevşehir, Yozgat ve Sivas illerine de mandalina göndermektedir. Yakup Bey'in,

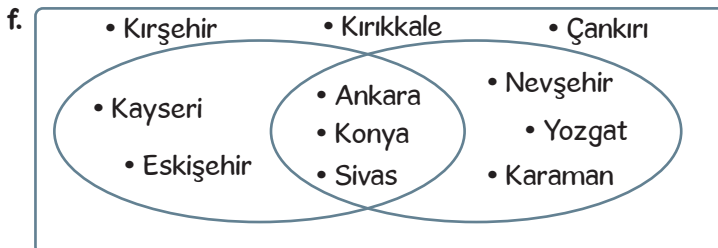
- Portakal gönderdiği illerden oluşan kümeyi belirleyin.
- Mandalina gönderdiği illerden oluşan kümeyi belirleyin.
- Portakal ve mandalina (hem portakal hem de mandalina) gönderdiği illerden oluşan kümeyi belirleyin.
- Portakal veya mandalina (en az bir meyve) gönderdiği illerden oluşan kümeyi belirleyin.
- Hiç meyve göndermediği illerden oluşan kümeyi belirleyin.
- Portakal/mandalina gönderilen/gönderilmeyen illerden oluşan Venn şemasını çiziniz.

İÇ ANADOLU BÖLGESİ



Çözüm:

- Portakal gönderilen iller kümesi: { Ankara, Konya, Eskişehir, Sivas, Kayseri }
- Mandalina gönderilen iller kümesi: { Ankara, Karaman, Konya, Nevşehir, Yozgat, Sivas }
- Portakal ve mandalina gönderilen iller kümesi: { Ankara, Konya, Sivas }
- Portakal veya mandalina gönderilen iller kümesi: { Ankara, Konya, Eskişehir, Sivas, Kayseri, Karaman, Nevşehir, Yozgat }
- Hiç meyve gönderilmeyen iller kümesi: { Kırşehir, Kırıkkale, Çankırı }



TANIM

Birleşim: A ve B kümelerinin elemanlarının tamamının oluşturduğu kümeye A ile B kümesinin birleşim kümesi denir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir. Bir başka ifadeyle,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Kesişim: A ve B herhangi iki küme olmak üzere bu iki kümenin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir. Bir başka ifadeyle,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Ayrık Küme: Eğer $A \cap B$ kümesi boş küme ise yani A ve B kümelerinin ortak elemanı yok ise bu kümeler ayrık kümeler olarak adlandırılır. Bir başka ifadeyle,

$$A \cap B = \emptyset \text{ ise A ve B ayrık kümelerdir.}$$

Örnek:

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ ve kümeleri veriliyor.

Buna göre,

$A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini liste yöntemiyle yazınız ve Venn şemasıyla gösteriniz.

Çözüm:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$A \cap B = \{d, e\}$$

Kümelerde Kesişim ve Birleşim İşleminin Özellikleri

A ve B iki küme olmak üzere, kümelerde kesişim ve birleşim işlemi ile ilgili,

$$1. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$2. A \cup \emptyset = A$$

$$3. A \cap A = A$$

$$4. A \cup A = A$$

$$5. A \cap B = B \cap A$$

$$6. A \cup B = B \cup A$$

$$7. A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$8. A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$9. (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$10. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$11. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$12. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$13. A \cup B = \emptyset \text{ ise } (A = \emptyset \text{ ve } B = \emptyset)$$

$$14. s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

özellikleri mevcuttur.

**İspat:**

Örnek olarak 12. özelliği İspat edelim. İspatın 3. satırında, sembolik mantıkta kullanılan “veya”nın “ve” üzerine dağılma özelliği kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ve } x \in (A \cup C)\} \\ &= \{x \mid x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Kümelerde kesişim ve birleşim işlemleri ile ilgili örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 8)

Kümelerde Fark İşlemi

Öğrencilere aşağıdaki gibi bir soru sorularak kümelerde fark işlemi hakkında çıkarımlarda bulunmaları istenir.



Bilim ve Sanat Merkezinde öğrenci olan Ali, Bekir, Ceren, Derya, Elif ve Fikret ÖYG-1 programında matematik dersini; Ahmet, Bekir, Ceren, Deniz, Elif ve Funda ise yine ÖYG-1 programında fizik dersini almaktadır.



- Matematik dersi alan ve fizik dersi almayan öğrencilerden oluşan kümeyi yazınız.
- Fizik dersi alan ve matematik dersi almayan öğrencilerden oluşan kümeyi yazınız.

Çözüm:

- Matematik dersi alan ve fizik dersi almayan öğrencilerden oluşan küme: {Ali, Derya, Fikret}
- Fizik dersi alan ve matematik dersi almayan öğrencilerden oluşan küme: {Ahmet, Deniz, Funda}

TANIM

Fark İşlemi: A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlardan oluşan kümeye, “A fark B kümesi” denir ve $A - B$ veya $A \setminus B$ şeklinde gösterilir. Bir başka ifadeyle,

$$A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x : x \in B \text{ ve } x \notin A\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek:

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ ve kümeleri veriliyor.

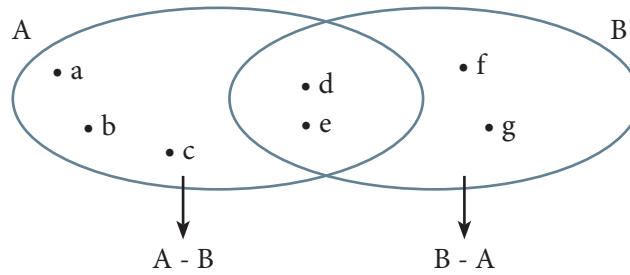
Buna göre,

$A - B$ ve $B - A$ kümelerini liste yöntemiyle yazınız ve Venn şemasıyla gösteriniz.

Çözüm:

$$A - B = \{a, b, c\}$$

$$B - A = \{f, g\}$$



Kümelerde fark işlemleri ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 9)

Bir Kümenin Tümleyeni

Bir varlığın ya da nesnenin eksik parçalarını tamamlayarak onu bir bütün hâline getiren nesneler için tümleyen kavramını kullanabiliriz. Örneğin şekildeki yapboz düzleminin eksik parçalarına tümleyen diyebiliriz.



**TANIM**

Tümleyen: Bir A kümesinin içinde bulunduğu evrensel kümeyi düşünelim. Bu evrensel kümenin elemanı olup A kümesinin elemanı olmayan elemanlardan oluşan kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A' ile gösterilir. A' kümesini ortak özellik yöntemiyle

$A' = E - A = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\}$ şeklinde gösterebiliriz.

Örnek:

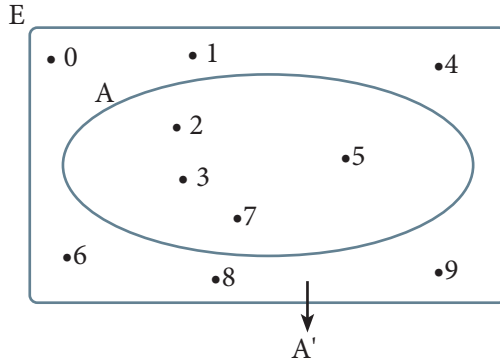
$E = \{x \mid x \text{ bir rakam}\}$ evrensel küme olmak üzere, $A = \{x \mid x \text{ bir asal sayı}\}$ kümesinin tümleyeni yazınız ve Venn şeması ile gösteriniz.

Çözüm:

Öncelikle verilen kümeleri liste yöntemi ile yazalım.

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ve $A = \{2, 3, 5, 7\}$ dir.

O hâlde, $A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ olacaktır.

**Kümelerde Fark ve Tümleyen İşleminin Özellikleri**

1. $A - A = \emptyset$
2. $A - \emptyset = A$
3. $A - E = \emptyset$
4. $A \neq B$ ise $A - B \neq B - A$
5. $(A')' = A$
6. $E' = \emptyset$
7. $A \cup A' = E$
8. $\emptyset' = E$
9. $E - A = A'$
10. $A \cap A' = \emptyset$
11. $A - B = A \cap B'$
12. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De-Morgan Kuralı)
13. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (De-Morgan Kuralı)
14. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

İspat:

Örnek olarak 14. özelliği ispat edelim. İspatın her satırında, kullanılan bilgilere yer verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 A - (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)' & [A - B &= A \cap B'] \\
 &= A \cap (B' \cap C') & [\text{De Morgan}] \\
 &= A \cap A \cap (B' \cap C') & [A \cap A &= A] \\
 &= A \cap (A \cap B') \cap C' & [A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C] \\
 &= (A \cap B') \cap (A \cap C') & [A \cap B &= B \cap A] \\
 &= (A - B) \cap (A - C) & [A - B &= A \cap B']
 \end{aligned}$$

Kümelerde tümleyen işlemi ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 10)

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- Doğal sayılar kümesi N ile, tam sayılar kümesi Z ile, rasyonel sayılar kümesini ise Q ile gösterilir. Neden bu gösterimlerin kullanıldığını araştırınız.
- Kümelerde kesişim ve birleşim işleminin özelliklerini ispatlayınız.
- Kümelerde fark ve tümleyen işleminin özelliklerini ispatlayınız.
- Sayılamaz çokluktaki kümeler ile ilgili kardinalite kavramını araştırınız.

KAYNAKLAR

Uğurel, I., & Moralı, S. (2010). Ortaöğretim Öğrencilerinin Kümeler Konusundaki Öğrenmelerinin Değerlendirilmesi-I. *Akademik Bakış Dergisi*, 22, 1-25.

Sarıgül, T. (2019). Asit ve Baz Nedir? *Bilim Genç Dergisi*.

<https://kvmgm.ktb.gov.tr/TR-43336/muze-istatistikleri.html>

Komisyon (2013) *Ortaöğretim Matematik 9. Sınıf 1.Kitap*, Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlik Formu Cevapları

1. a. Küme değil

b. Küme

c. Küme değil

2. a. Sonsuz Küme

b. Sonlu Küme

c. Sonlu Küme

d. Sonsuz Küme

3. Etkinlik içerisinde çözüldü.

4. a. 64

b. 16

c. 128

5. 6

6. 16

7. a. 16

b. 16

c. 16

d. 10

e. 10

8. 16

9. 62

10. 9

11. 10

12. D

13. D

Etkinlik Formu

1. Aşağıdaki toplulukların bir küme belirtip belirtmediğini inceleyiniz.

- a. Türkiye'deki en güzel şehirler
- b. Türkiye'de rakımı 1000 metreyi aşan iller
- c. Okulumuzdaki en başarılı öğrenciler

2. Aşağıda verilen kümelerden sonlu ve sonsuz olanlarını bulalım.

- a. 5 ile tam bölünebilen tam sayılar kümesi
- b. 19 ile 1903 arasındaki doğal sayılar kümesi
- c. $\{n \mid n, 5 \text{ ile } 6 \text{ arasında bir doğal sayıdır}\}$
- d. $\{x: x \text{ bir rasyonel sayı ve } -7 < x < 10\}$

3. Aşağıdaki tabloda ilgili alanları doldurunuz.

Küme	Eleman Sayısı	Alt Kümeleri	Alt Küme Sayısı
$A = \emptyset$			
$B = \{1\}$			
$B = \{1, 2\}$			
$B = \{1, 2, 3\}$			

Kümenin eleman sayısı ile alt küme sayısı arasındaki ilişkiyi gözlemleyiniz

4. Aşağıda verilen kümelerin alt küme sayılarını bulunuz.

- a. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- b. $B = \{x \mid x < 4 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$
- c. $C = \{x \mid -2 \leq x < 5 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$

5. Bir A kümesinin alt kümelerinin sayısı ile kendisi hariç alt kümelerinin sayısının toplamı 127'dir. Bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

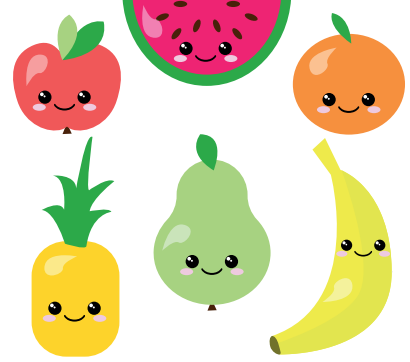
6. $A = \{3, 4, 5\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olduğuna göre $A \subset K \subset B$ şartını sağlayan K kümelerinin sayısını bulunuz.



7. Akşam evine misafir gelecek olan Özlem Hanım'ın dolabında elma, portakal, muz, armut, ananas ve karpuz vardır.

Özlem Hanım misafirlerine;

- Portakal ve elma içermeyen kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?
- Portakal ve elma içeren kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?
- Portakal içeren ama elma içermeyen kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?
- İçinde portakal da bulunan 3 çeşit meyve içeren kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?
- İçinde portakalın olmadığı 3 çeşit meyve içeren kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?



8. Bir A kümesinin eleman sayısı, B kümesinin eleman sayısının 4 katıdır. Bu iki kümenin birleşim ve kesişiminin eleman sayıları toplamı 20 olduğuna göre A kümesinin eleman sayısını bulalım.

9. $A = \{x : 10 \leq x \leq 756 \text{ ve } x = 4n\}$ ve $B = \{y : 13 < x < 800 \text{ ve } y = 6n\}$

olmak üzere $s(A \cap B)$ kaçtır?

10. A ve B iki kümedir. $s(A) = 2s(B)$ ve $s(A - B) = 10$ 'dur. $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı 8 olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısını bulunuz.

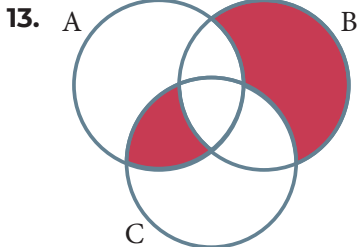
11. A ve B, evrensel kümenin iki alt kümesi olmak üzere,

$$s(A) + s(B) = 12 \text{ ve } s(A') + s(B') = 8$$

olduğuna göre evrensel kümenin eleman sayısı kaçtır?

12. $A = \{a, b, \{a, c\}\}$ kümesiyle ilgili aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\{a, c\} \in A$ B) $\{a\} \subset A$ C) $\{a, b\} \subset A$ D) $\{a, c\} \subset A$ E) $\{a, \{a, c\}\} \subset A$



Şekildeki taralı bölgeye karşılık gelen küme aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[(A \cup C) \setminus B] \cup (A \cap B \cap C)$ B) $[B \setminus (A \cup C)] \cap (A \cap B \cap C)$
 C) $[B \setminus (A \cap B)] \cup (A \cup C)$ D) $[B \setminus (A \cup C)] \cup [(A \cap C) \setminus B]$
 E) $[B \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cup C) \setminus B]$



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: BAĞINTI FONKSİYON
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Kümeler, Bağıntı, Fonksiyon
KAZANIMLAR	: 1. Sıralı ikiliyi tanımlar. : 2. En az iki kümenin kartezyen çarpımıyla ilgili işlemler yapar. : 3. Bağıntıyı açıklar. : 4. Bir bağıntının tersini açıklar. : 5. Bağıntıyı kullanarak fonksiyonu tanımlar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, öğrencilerin sıralı ikililerin eşitliklerini keşfetmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, kartezyen çarpımın özelliklerinin incelenerek grafiklerinin çizilmesi hedeflenmektedir. Sonsuz kümelerin kartezyen çarpımının gösterimine yer verilir. İkili kartezyen çarpımın elemanının düzlemde bir nokta ve üçlü kartezyen çarpımın elemanının üç boyutlu uzayda bir nokta gösterdiği vurgulanarak öğrencilerin kartezyen çarpım ile kartezyen koordinatlar arasındaki ilişkiyi fark etmesi amaçlanmıştır. Bağıntının farklı gösterimlerine yer verilerek öğrencilerin, bir bağıntı grafiği ile tersinin grafiğini ilişkilendirmesi beklenmektedir. Ayrıca doğal sayılar, tam sayılar veya sonlu kümeler üzerinde tanımlı fonksiyonların grafikleri incelenmiştir.

Başlarken...

Sinemaya gitmek için arkadaşları ile sözleşen Talha son anda filme yetişmiş, bu sırada arkadaşları ise çoktan yerini almıştır. Talha bileti düşürdüğü için arkadaşı Ahsen'i aramış ve yerini sormuştur. Ahsen sıranın C-4 olduğunu söylemiştir. Bir sinema salonunda koltukların numaralandırılışına dikkat ettiğimizde bir harf ile bir numaranın beraber kullanıldığını görürüz ve bu durum yerlerin tespitinde sade ve etkin bir kolaylık sağlar. Siz de şekildeki sinema salonunda oturan kişilerin koltuklarını A, B, C, D harfleri ve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 numaraları ile belirleyiniz.



**Sıralı İkili**

Öğrenciler, sıralı ikili kavramını keşfetmeye yönelik aşağıdakine benzer bir soruya yönlendirilir.

Tabloda Asya, Berna, Ceren, Demir ve Ece isimli öğrencilerin boy ve kilo ölçümleri verilmiştir. Her bir öğrenciye ait (boy, kilo) sütununu inceleyiniz.

İsim	Boy (cm)	Kilo (kg)	(Boy, Kilo)
Asya	147	45	(147,45)
Berna	148	47	(148,47)
Ceren	149	48	(149,48)
Demir	150	52	(150,52)
Ece	151	55	(151,55)

Başlarken bölümünde, Talha C-4 numaralı koltuğu ararken, rakamla sayının yerinin değişmesi önemli midir?

TANIM

Sıralı İkili: A ve B boş olmayan herhangi iki küme olsun. A kümesinden alınan bir a elemanı ile B kümesinden alınan bir b elemanının (a, b) şeklinde yazılması ile oluşan elemana “sıralı ikili” denir. Burada, a’ya sıralı ikilinin birinci bileşeni; b’ye de sıralı ikilinin ikinci bileşeni denir. Sıralı ikilide elemanların yazılış sırası önemlidir. Sıralı ikiliye kısaca “ikili” denir.

Sıralı İkiliğin Eşitliği: Herhangi iki sıralı ikili (a, b) ve (c, d) olsun. Bu ikililerin eşit olması için birinci bileşenlerin birbirine ve ikinci bileşenlerin de birbirine eşit olması gerekir.

Yani, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$ olmalıdır.

Örnek:

$(2x + 5, 3y - 1) = (25, 20)$ ise $x + y$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$2x + 5 = 25$ ve $3y - 1 = 20$ olmalıdır. Buradan, $x = 4$ ve $y = 7$ bulunur.

O hâlde, $x + y = 4 + 7 = 11$ olur.

Sıralı ikili kavramı ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1-3)

Kartezyen Çarpım

TANIM

A ve B kümeleri verilsin. Birinci bileşeni A 'dan ve ikinci bileşeni B 'den alınmak üzere oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine “**A kartezyen çarpım B**” kümesi denir ve

$A \times B$ şeklinde gösterilir. Bir başka ifadeyle, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B\}$ şeklinde de gösterebiliriz.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2\}$ kümeleri için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini liste yöntemiyle gösteriniz.

Çözüm:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$ ve

$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ olur.

Örnek:

$A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$ ve $C = \{c, d, e\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre,

- $A \times (B \cup C)$ kümesini bulunuz.
- $(A \times B) \cup (A \times C)$ kümesini bulunuz.
- Bulduğunuz cevapları karşılaştırınız.

Çözüm:

- Önce $B \cup C$ kümesini oluşturalım.

$$B \cup C = \{b, c, d, e\}$$

Şimdi $A \times (B \cup C)$ kümesini oluşturalım.

$$A \times (B \cup C) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

- $A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\}$

$$A \times C = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\} \text{ olur.}$$

Şimdi bu iki kümenin birleşim kümesini oluşturalım.

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

- Elde ettiğimiz sonuçları karşılaştırınca $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ sonucuna ulaşırız.

**Örnek:**

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ ve $C = \{5, 6, 7\}$ kümeleri veriliyor. Bu kümeler için

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Öncelikle $B \cap C$ kümesini bulalım. $B \cap C = \{5\}$ olur.

$$A \times (B \cap C) = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$

Şimdi, $A \times B$ ve $A \times C$ kümelerini oluşturalım.

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$A \times C = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7)\}$$

olur. Buradan,

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$

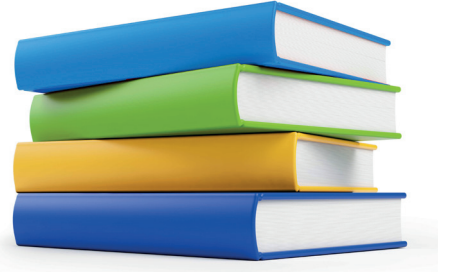
bulunur. O hâlde, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ dir.

Kartezyen Çarpımın Eleman Sayısı

Ertuğrul, arkadaşları olan Metin, Tekin ve Çetin'in her birine, kırmızı, yeşil, sarı ve mavi renkli olan "*BİLSEM Matematik Efsaneleri*" adlı serinin dört kitabından birini hediye etmek istiyor.

Fakat hangi kitabı kime alacağına karar veremiyor.

- Ertuğrul'un arkadaşlarına kitap alabilme alternatiflerini (arkadaşımın adı, alabileceğim kitap) şeklinde göstererek yazınız.
- Ertuğrul her bir arkadaşına bir kitap almak koşuluyla kaç farklı seçim yapabilir?
- Ertuğrul'un arkadaşları bir küme olarak düşünülürse bu kümenin eleman sayısı kaçtır?
- Ertuğrul'un seçim yapabileceği kitapların oluşturduğu kümenin eleman sayısı kaçtır?
- (Arkadaşımın adı, alabileceğim kitap) şeklindeki ikililerin oluşturduğu kümenin eleman sayısı kaçtır?
- Ertuğrul'un arkadaşlarından oluşan kümenin eleman sayısı ile kitapların oluşturduğu kümenin eleman sayısının çarpımı ile, oluşturduğunuz sıralı ikililer kümesinin eleman sayısı arasındaki ilişkiyle ilgili ne söyleyebilirsiniz? Öğrencilere yukarıdaki sorular sorularak kartezyen çarpımın eleman sayısının nasıl bulunacağı sorgulattılır.



A ve B iki küme olsun. $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise $s(A \times B) = m \cdot n$ 'dir.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre, $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$ Kartezyen çarpım kümelerini bulup eleman sayılarını belirleyiniz.

Çözüm:

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\} \text{ olup } s(A \times A) = 3 \cdot 3 = 9$$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\} \text{ olup } s(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\} \text{ olup } s(B \times A) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \text{ olup } s(B \times B) = 2 \cdot 2 = 4$$

bulunur.

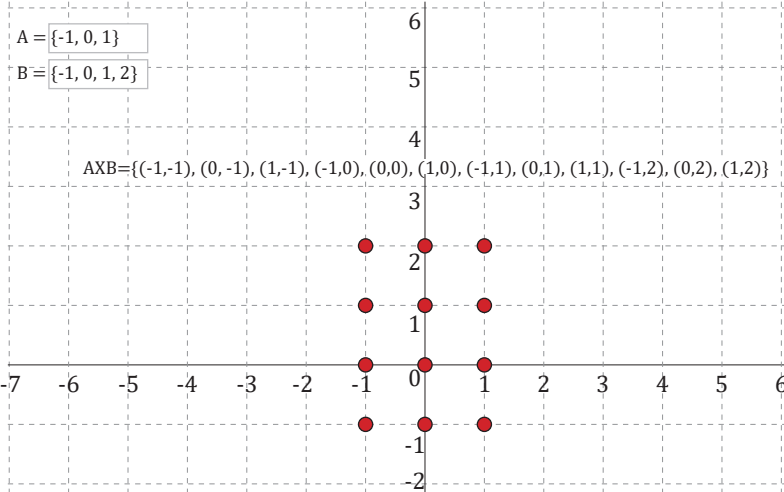
Kartezyen çarpımın eleman sayısı ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 4).

Kartezyen Çarpımın Grafiği

Ünlü Fransız matematikçi Rene Descartes cebirle geometri arasındaki ilişkiyi Kartezyen çarpım ile kurmuştur. Kartezyen çarpımı oluşturan birinci kümeyi yatay eksen (x - eksen) ve ikinci kümeyi düşey eksen (y - eksen) olarak bir sıralı ikiliyi düzlemde belirtmiştir.



$A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre, $A \times B$ kümesinin grafiğini dinamik matematik yazılımı kullanarak çiziniz.

Çözüm:

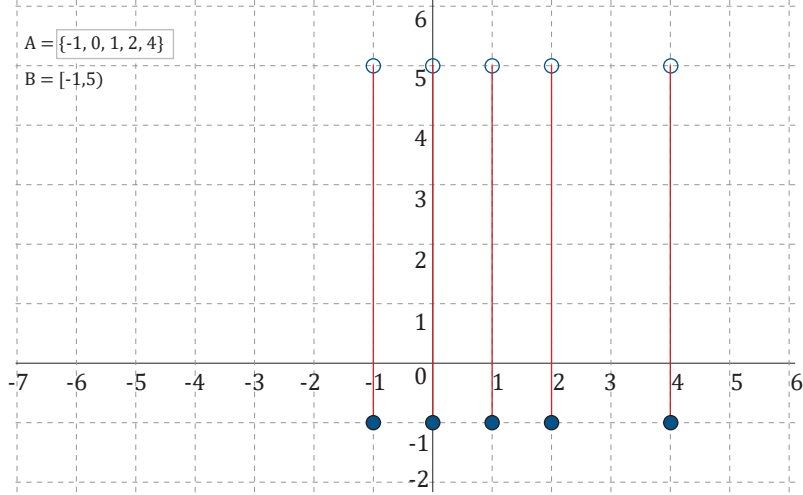
Bu etkinliğin uygulama aşamalarına etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



2. ETKİNLİK

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ve $B = [-1, 5)$ kümeleri veriliyor. Buna göre, $A \times B$ kümesinin grafiğini dinamik matematik yazılımı kullanarak çiziniz.

Çözüm:

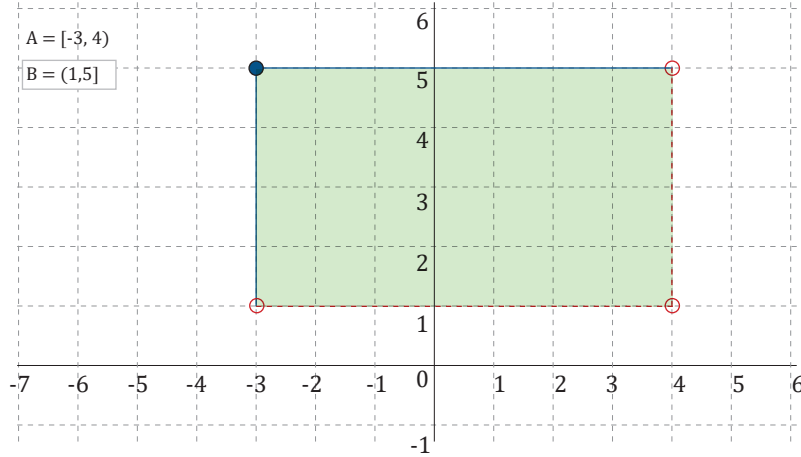


Bu etkinliğin uygulama aşamalarına etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

3. ETKİNLİK

$A = [-3, 4)$ ve $B = (1, 5]$ kümeleri veriliyor. Buna göre, $A \times B$ kümesinin grafiğini dinamik matematik yazılımı kullanarak çiziniz.

Çözüm:



Bu etkinliğin uygulama aşamalarına etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Kartezyen çarpım ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5).

Bağıntı

TANIM

A ile B boş kümeden farklı iki küme olsun. A x B'nin her alt kümesine A'dan B'ye bir **bağıntı** denir. A'dan B'ye bir bağıntı genellikle β ile gösterilir. A'dan A'ya bir bağıntıya ise A'da bir **bağıntı** denir.

Örnek:

$A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ 1, 2 \}$ kümeleri veriliyor. Aşağıda tanımlanan kümelerin A'dan B'ye bağıntı olup olmadığını inceleyiniz.

a. $\beta_1 = \{ (a,1), (c, 1), (d, 1), (d, 2) \}$

b. $\beta_2 = \{ (a,2), (c, 1), (d, 3) \}$

c. $\beta_3 = \{ \}$

d. $\beta_4 = \{ (a,2), (b, 1), (1, c), (c, 2) \}$

e. $\beta_5 = A \times B$

Çözüm:

$$A \times B = \{ (a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c, 1), (c, 2) \}$$

a. $\beta_1 \subset A \times B$ olduğundan β_1 , A'dan B'ye bir bağıntıdır.

b. $(d, 3) \notin A \times B$ olup $\beta_2 \not\subset A \times B$ 'dir. O hâlde, β_2 , A'dan B'ye bir bağıntı değildir.

c. $\{ \}$ her kümenin alt kümesi olduğundan $A \times B$ 'nin de bir alt kümesidir. O hâlde, $\{ \}$, A'dan B'ye bir bağıntıdır.

d. $(1, c) \notin A \times B$ olup $\beta_4 \not\subset A \times B$ 'dir. O hâlde, β_4 , A'dan B'ye bir bağıntı değildir.

e. Her küme kendisinin alt kümesi olduğundan, $\beta_5 \subset A \times B$ olup β_5 A'dan B'ye bir bağıntıdır.

Bir Bağıntının Tersi

TANIM

A'dan B'ye tanımlı $\beta = \{ (x, y) : x \in A \text{ ve } y \in B \}$ bağıntısı verilsin.

$\beta^{-1} = \{ (y, x) : y \in B \text{ ve } x \in A \}$ bağıntısına, β bağıntısının tersi denir.

$\beta \subset A \times B$ iken $\beta^{-1} \subset B \times A$ olduğuna dikkat edilmelidir.

**Örnek:**

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ ve $B = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ kümeleri veriliyor.

a. $\beta_1 = \{ (x, y) : x^2 + y^2 < 7 \text{ ve } (x, y) \in A \times B \}$

b. $\beta_2 = \{ (x, y) : y = x + 2 \text{ ve } (x, y) \in A \times A \}$

bağıntılarının tersini bulunuz.

Çözüm:

a. $\beta_1 = \{ (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1) \}$ olup $(\beta_1)^{-1} = \{ (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2) \}$ dir.

b. $\beta_2 = \{ (1,3), (2,4), (3,5) \}$ olup $(\beta_2)^{-1} = \{ (3,1), (4,2), (5,3) \}$ olur.

Bağıntı ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 6-8).

Fonksiyon

Bir zeytin yağı fabrikasında zeytin miktarı değiştikçe üretilen zeytin yağı miktarı da değişir. Bu iki değişken arasındaki ilişkiyi bir örnekle gözlemleyelim.

Fabrikada, 5 kg zeytinden 1 litre zeytinyağı üretildiğini varsayalım. Farklı miktarlardaki zeytin için üretilecek zeytin yağı miktarını bir tabloyla aşağıdaki gibi gösterebiliriz. Örneğin 25 kg zeytinden 5 litre zeytin yağı üretilecektir.



Zeytin Miktarı (kg)	5	10	15	20	25	30	35
Zeytin yağı Miktarı (litre)	1	2	3	4	5	6	7

Zeytin yağı fabrikasında, zeytin miktarı ile üretilen zeytin yağı miktarı arasındaki ilişkiyi şu şekilde ifade edebiliriz. Makinaya bir miktar zeytin eklenerek makine kullanıma hazır hâle getirilir. Sonrasında makine çalıştırılır ve bir miktar zeytin yağı elde edilir. Bu durumu bir şema ile şu şekilde gösterebiliriz:

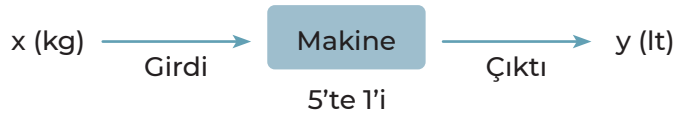


Zeytin miktarına “girdi”, zeytin yağı miktarına “çıktı” diyelim.

Burada dikkat edilecek iki önemli nokta vardır.

- ✓ Her girdi için bir çıktı hesaplanmaktadır.
- ✓ Her bir girdi için yalnızca bir çıktı bildirilmektedir.

Fonksiyonun iki çokluk arasında bu iki şartı sağlayan ilişkilendirmeler olduğunu belirtelim. Bu makine-
de zeytin miktarı değiştiğinde elde edilen zeytin yağı miktarı da değiştiğinden ikisi de değişken olarak isim-
lendirilebilir. Elde edilecek zeytin yağı hacminin değişmesi zeytin miktarının değişmesine bağlıdır. Bu
durumda zeytin miktarını x , zeytin yağı hacmini y ile isimlendirdiğimizde y , x 'e bağımlı bir değişken olur.



Bu örnekteki x ve y arasındaki ilişkiyi $y = \frac{x}{5}$ ifadesiyle belirtebileceğimize dikkat edelim.

TANIM

A ve B boş olmayan iki küme ve f 'de A 'dan B 'ye bir bağıntı olsun. Eğer,

- i. $\forall x \in A$ için $\exists y \in B$ varsa $(x, y) \in f$
- ii. $(x, y_1) \in f$ için $(x, y_2) \in f$ ise $y_1 = y_2$

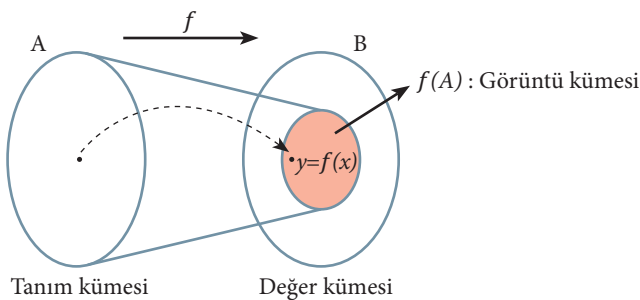
koşulları sağlanıyorsa, f bağıntısına A 'dan B 'ye bir **fonksiyon** denir.

A 'dan B 'ye bir f fonksiyonu $f : A \rightarrow B$ şeklinde gösterilir.

A 'ya fonksiyonun **tanım kümesi**, B 'ye de fonksiyonun **değer kümesi** denir.

Fonksiyonun dik koordinat sistemindeki görüntüsüne de **fonksiyonun grafiği** denir.

Eğer f fonksiyonu A kümesinden alınan bir x elemanını, B kümesindeki bir y elemanı ile ilişkilendiriyor ise, “ y , x 'in f altındaki görüntüsü” veya “ f 'in x 'teki değeri y 'dir” denir. Bu durum $y = f(x)$ şeklinde ifade edilir. Tanım kümesindeki elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye fonksiyonun **görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir. Görüntü kümesi ortak özellik yöntemiyle şu şekilde gösterilir: $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$



Yandaki şemada görüldüğü gibi bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için;

- ✓ Tanım kümesindeki her bir eleman değer kümesinden bir elemanla mutlaka eşlenmiş olmalıdır.
- ✓ Tanım kümesindeki herhangi bir eleman değer kümesinden yalnız bir elemanla eşlenmiş olmalıdır.

**Örnek:**

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ kümeleri veriliyor.

A 'dan B 'ye tanımlanan aşağıdaki bağıntılardan hangileri A 'dan B 'ye bir fonksiyondur?

$$\beta_1 = \{(1, a), (2, c), (3, a)\}$$

$$\beta_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (2, a)\}$$

$$\beta_3 = \{(1, a), (3, b)\}$$

$$\beta_4 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$$

Çözüm:

β_1 bağıntısı fonksiyondur.

$(2, a), (2, b) \in \beta_2$ olup tanım kümesindeki herhangi bir eleman, değer kümesinden yalnız bir elemanla eşlenmiş olmalıdır kuralına aykırı durumdan dolayı β_2 bağıntısı fonksiyon değildir.

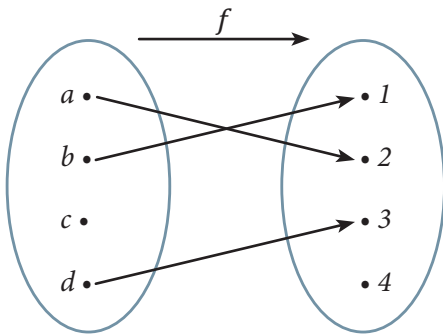
Tanım kümesindeki her bir eleman değer kümesinden bir elemanla mutlaka eşlenmiş olmalıdır. Ancak $2 \in A$ için, B kümesinde görüntü bulunmamaktadır. Bu nedenle, β_3 bağıntısı fonksiyon değildir.

β_4 bağıntısı fonksiyondur.

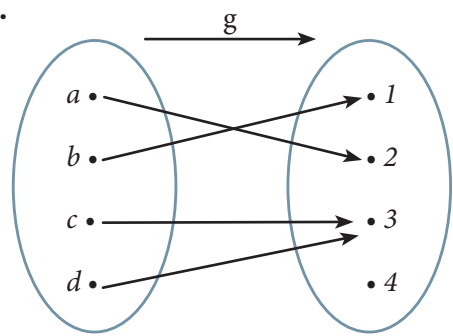
Örnek:

$A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. A 'dan B 'ye tanımlanmış aşağıdaki bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını belirtiniz.

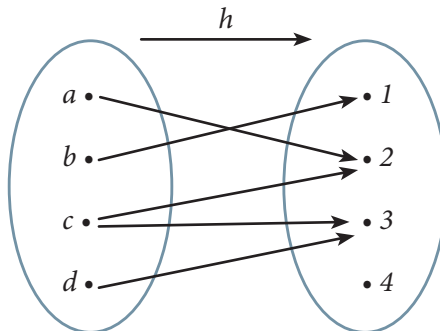
a.



b.



c.



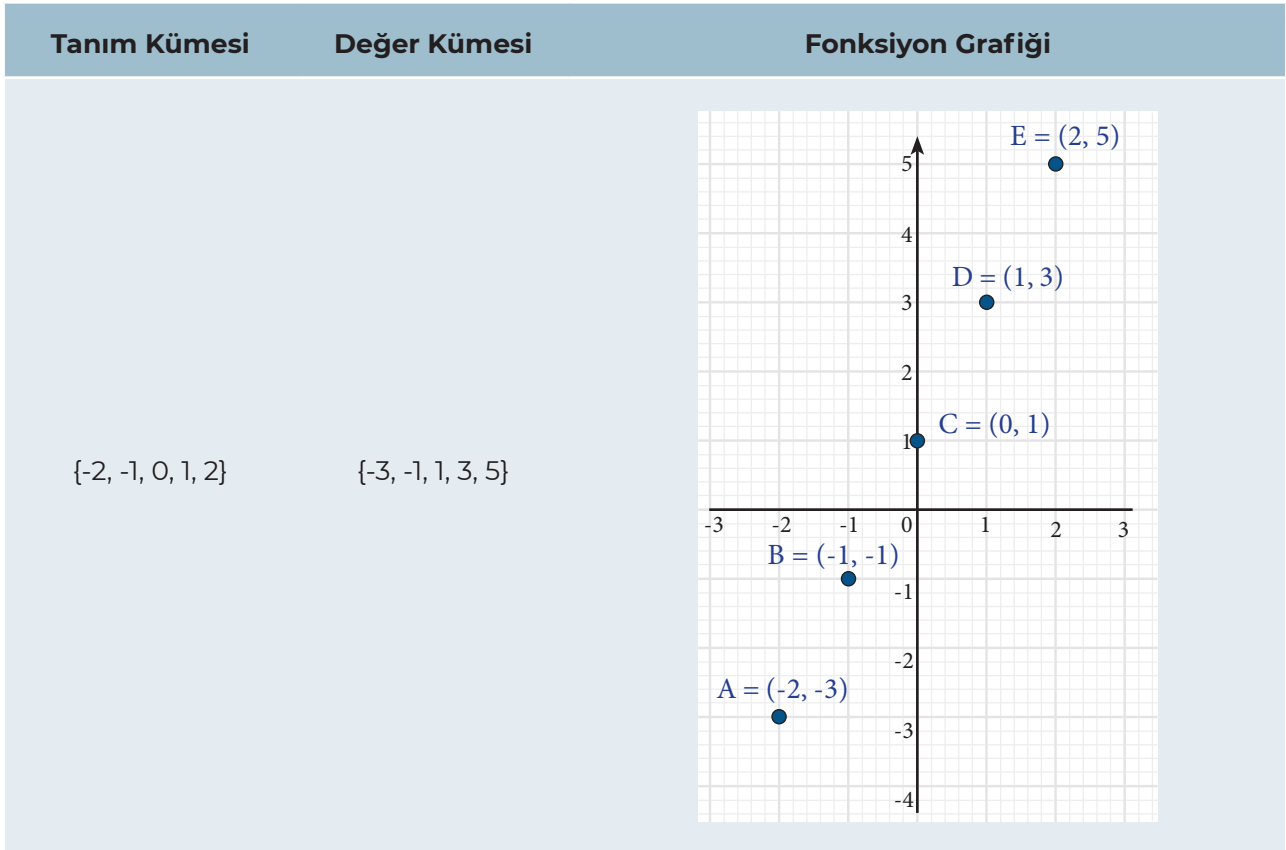
Çözüm:

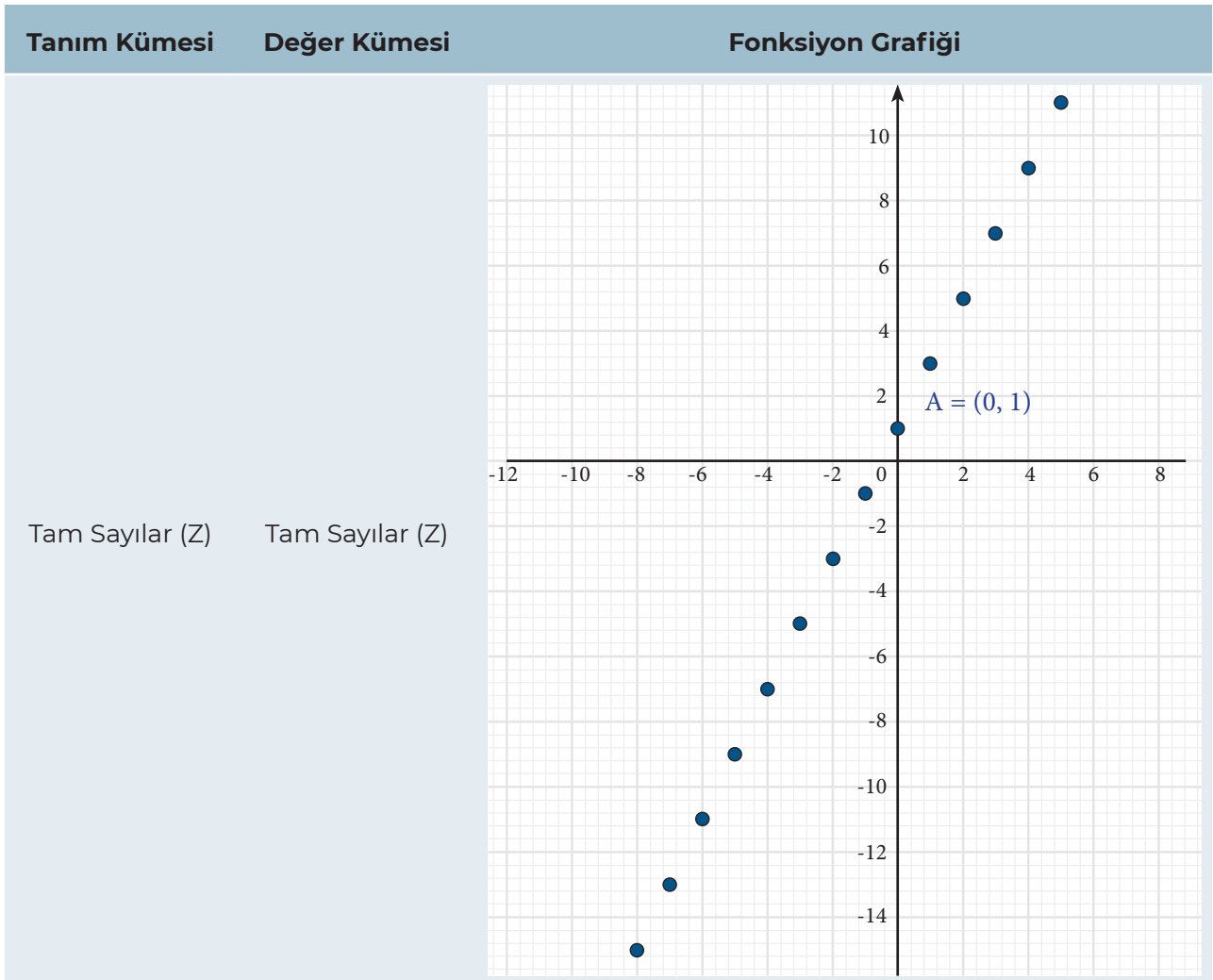
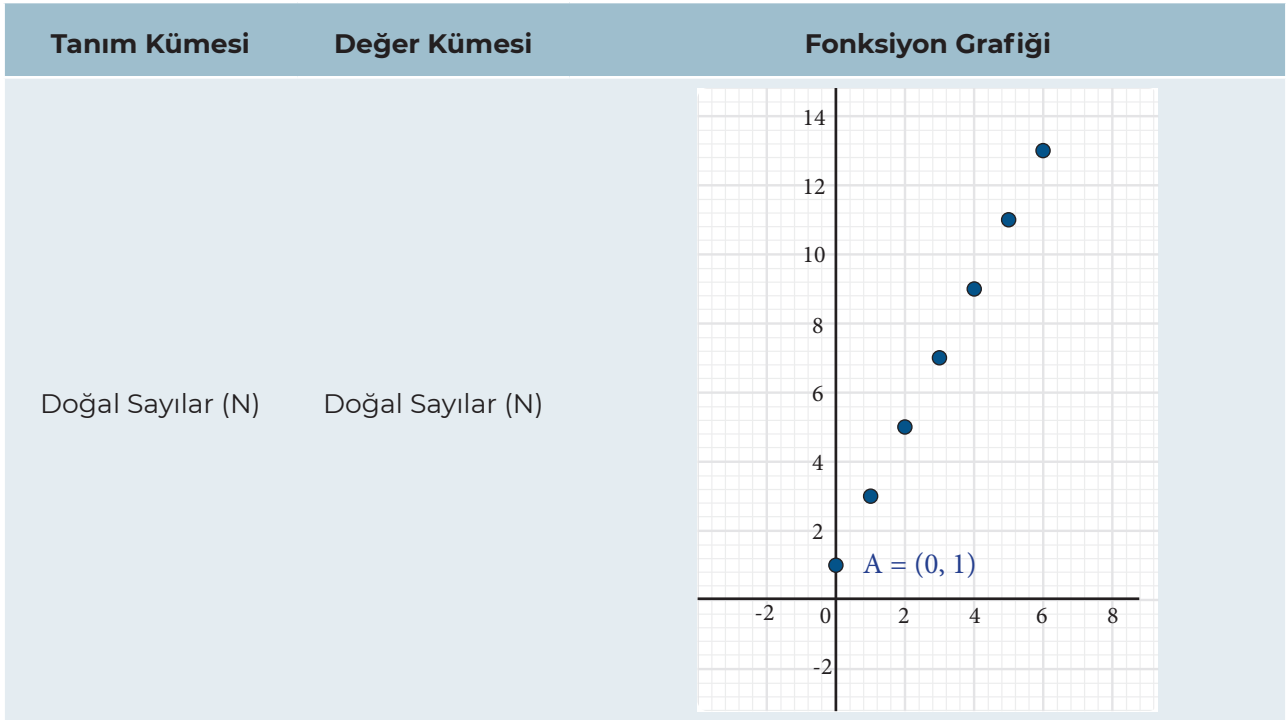
- a. Tanım kümesinde bulunan c elemanı değer kümesinden herhangi bir eleman ile eşlenmemiş olduğundan f bağıntısı fonksiyon değildir.
- b. Tanım kümesindeki her eleman değer kümesinden yalnız bir eleman ile eşlenmiş olduğundan g bağıntısı fonksiyondur.
- c. Tanım kümesindeki c elemanı değer kümesinden iki farklı eleman ile eşlenmiş olduğundan h bağıntısı fonksiyon değildir.

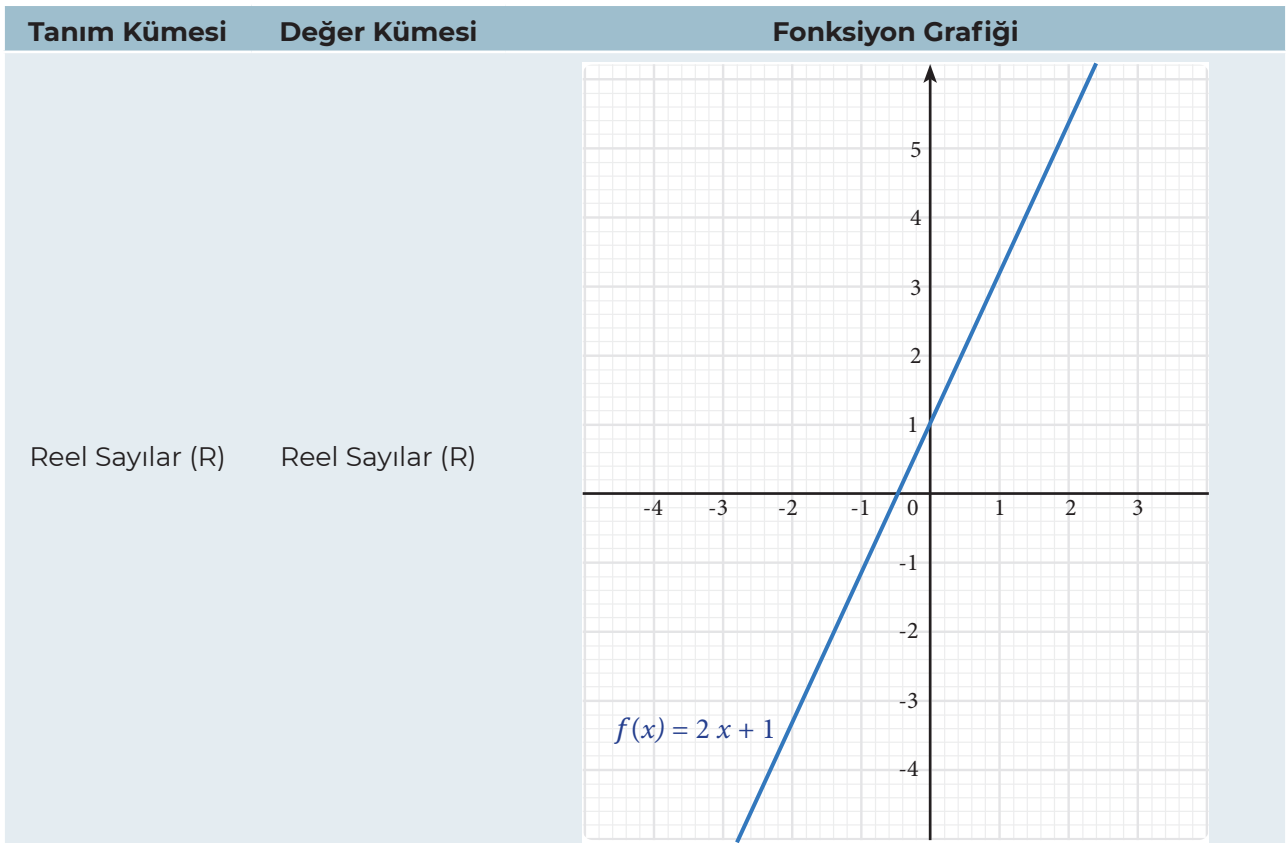
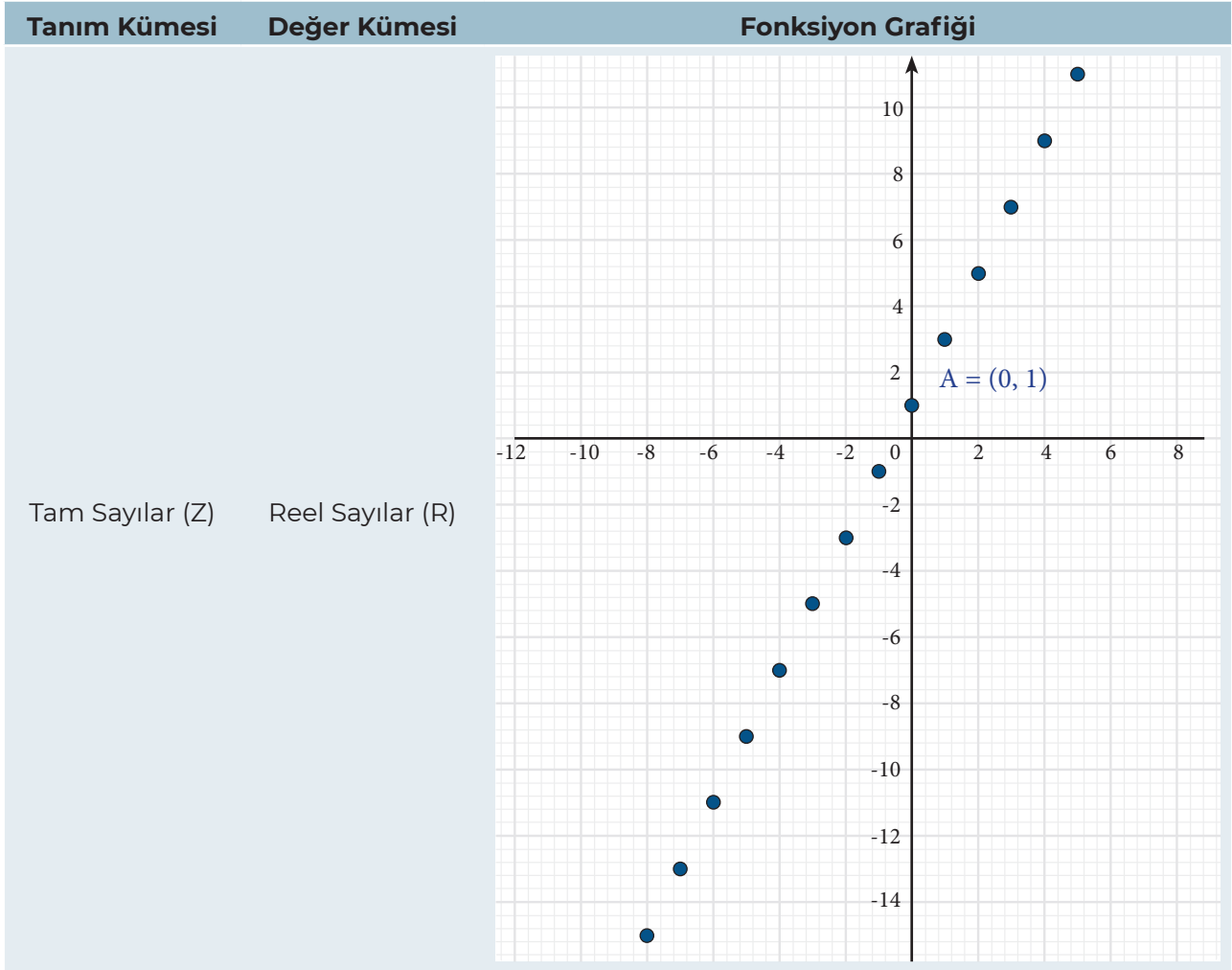
Fonksiyonun tanım kümesindeki değişimle birlikte grafiğinin de değişeceğini gözlemlemeleri için Etkinlik Formu Soru 9 çözülür.

Etkinlik Formu Soru 9

$f(x)=2x+1$ fonksiyonu için, tabloda verilen tanım ve değer kümelerine göre fonksiyonun grafiğini çiziniz. Değişimleri gözlemleyiniz.

Çözüm:







Fonksiyon ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 10).

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Bir GSM şirketi kullanıcılarına aylık 40 TL sabit ücret karşılığı her yöne 1000 dakika arama hakkı veren bir tarife sunmaktadır. Bu tarife göre 1000 dakika aşımı hâlinde, ilave her dakika konuşma için 25 kuruş ücretlendirme yapılmaktadır. Bu durumda;
 - a. Cep telefonu ile ayda ortalama 1250 dakikalık bir arama yapan bir kişinin bu tarife göre ne kadar ücret ödeyeceğini bulunuz.
 - b. Konuşma süresine (dakika) bağlı ödenecek ücreti gösteren bir fonksiyon yazılabilir mi?
- Siz de günlük hayatınızda karşılaştığınız bir fonksiyon örneği oluşturulabilir misiniz?
- Descartes'in Kartezyen düzlem ile ilgili çalışmaları araştırılabilir.
- Satranç notasyonlarında ve vektörel tabanlı grafik çizimlerinde, sıralı ikilinin kullanımını araştırınız.

KAYNAKLAR

Komisyon (2013) *Ortaöğretim Matematik 9. Sınıf 1. Kitap*, Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Uğurel, I., & Morali, S. (2010). Ortaöğretim Öğrencilerinin Kümeler Konusundaki Öğrenmelerinin Değerlendirilmesi-I. *Akademik Bakış Dergisi*, 22, 1-25.

Uçak, A., Emir, E., Uçkun, F., Kutlu, G., Kahraman, S., (2018) *Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik 9. Sınıf Ders Kitabı*, Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Derece Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. 16

2. 48

3. 12

4. a. 0

b. 10

c. 20

d. 0

5. $2\sqrt{2}$ 6. $A = \{-18, -16, -14, \dots, 14, 16, 18\}$ $\beta^{-1} = \{(-18, -6), (-15, -5), (-12, -4), \dots, (0, 0), (4, 12), (5, 15), (6, 18)\}$ $\beta^{-1} = \{(x, y) : x = 3y, (y, x) \in A \times A\}$

7. a. 256

b. 64

c. 64

d. 9

8. 56

9. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

10. Tanım Kümesi = $[-6, 5]$ ve Değer Kümesi = $[-3, 3]$

**Etkinlik Formu**

1. $(4 + a, 9) = (17, 5b - 6)$ ise $a + b$ toplamı kaçtır?

2. $(4^a, 45) = (256, 4b - 3)$ ise $a.b$ çarpımı kaçtır?

3. $(\sqrt{a-3}, 3^{b-5}) = (2, 9^{a-7})$ ise $a + b$ toplamı kaçtır?

4. $A \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ ve

$B \times D = \{(b, 4), (b, 5), (c, 4), (c, 5), (d, 4), (d, 5)\}$ kartezyen çarpım kümeleri veriliyor. Buna göre,

a. $A \times (B \cap C)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

b. $D \times (A \cup C)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

c. $(A \cup B) \times (C \cup D)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

d. $(B \cup C) \times (A \cap D)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

5. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor. $A \times A$ kümesinin grafiğini çiziniz. $A \times A$ 'nın tüm elemanlarını içeren en küçük çemberin yarıçapının kaç birim olduğunu bulunuz.

6. $A = \{x : -19 < x < 19, x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(x, y) : y = 3x, (x, y) \in A \times A\}$ bağıntısı veriliyor. β^{-1} ters bağıntısını bulunuz.

7. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{5, 6\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre

a. A 'dan B 'ye kaç farklı bağıntı yazılabileceğini bulunuz.

b. A 'dan B 'ye tanımlanan kaç bağıntıda $(1, 5)$ ve $(2, 6)$ bulunur?

c. A 'dan B 'ye tanımlanan kaç bağıntıda $(1, 5)$ bulunur ancak $(2, 6)$ bulunmaz?

d. A 'dan B 'ye tanımlanan en çok 1 elemanlı kaç tane bağıntı vardır?

8. $A = \{x : x \leq 18, x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$

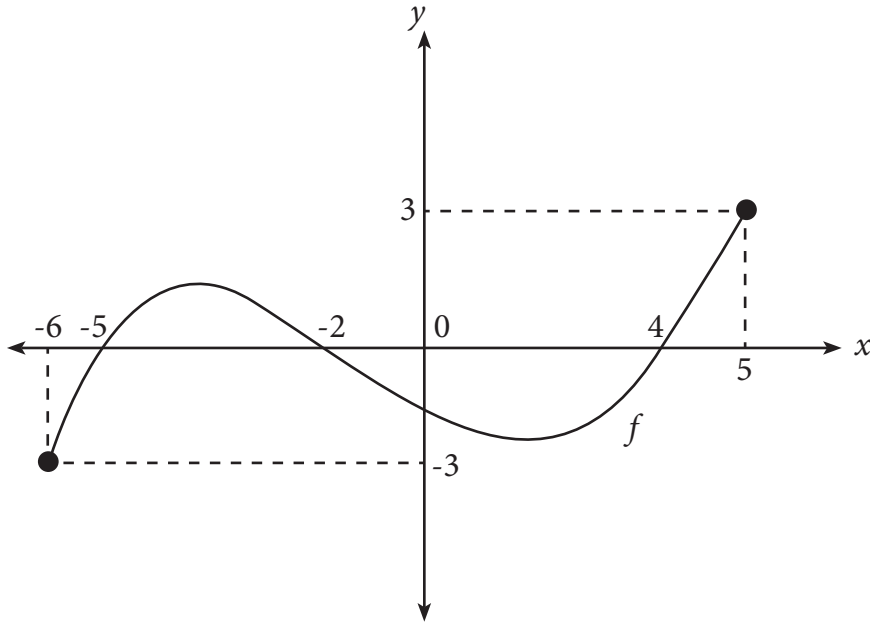
$B = \{y : 12 < y \leq 150, y \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{z : 9 < z < 21, z \in \mathbb{Z}\}$ olduğuna göre, $(A \times B) \cap (A \times C)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

9. $f(x)=2x+1$ fonksiyonu için, tabloda verilen tanım ve değer kümelerine göre fonksiyonun grafiğini çiziniz. Değişimleri gözlemleyiniz.

Tanım Kümesi	Değer Kümesi	Fonksiyon Grafiği
$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$\{-3, -1, 1, 3, 5\}$	
Doğal Sayılar (N)	Doğal Sayılar (N)	
Tam Sayılar (Z)	Tam Sayılar (Z)	
Tam Sayılar (Z)	Reel Sayılar (R)	
Reel Sayılar (R)	Reel Sayılar (R)	

10. Şekilde verilen f fonksiyonunun tanım ve değer kümelerini yazınız.





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: FİBONACCİ SAYILARI ve ALTIN ORAN

: Cebir ve Sayılar Teorisi/Örüntü ve Özel Sayılar

- : 1. Belli özelliklere sahip sayıları ortak özelliklerine göre sınıflandırır.
2. Fibonacci sayı dizisinin örüntü kuralını cebirsel olarak ifade eder.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

: Etkinlik Formu

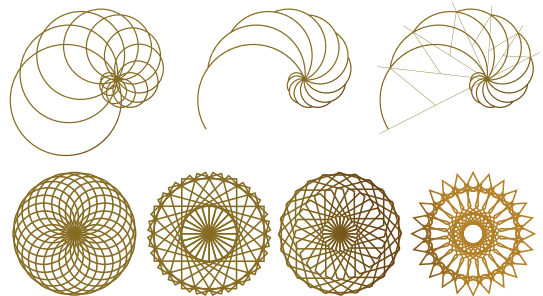
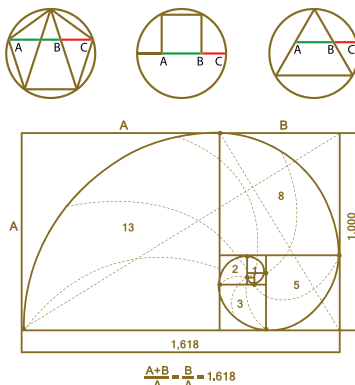
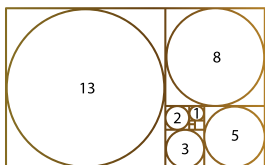
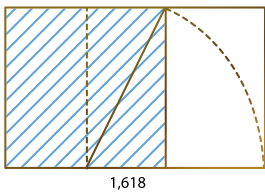
Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, Fibonacci sayı dizisinin örüntü kuralını keşfetmeye yönelik çalışmaların yapılması amaçlanmaktadır. Ayrıca, Fibonacci sayı dizisinin terimleri arasındaki oranın altın oranı verdiği çalışmalara ve Fibonacci sayı dizisinin terimleri arasındaki oranın sabit olmasına yönelik çalışmalara yer verilmesi hedeflenmektedir.

Başlarken...

Leonardo Fibonacci İtalya'da doğmuş, babasının işleri dolayısıyla Cezayir'de büyümüştür. 1202'de yazdığı Liber Abbaci kitabında Muhasebe okuluna devam ederken Hintlilerin dokuz sembol kullandıkları sanatı çok iyi öğrendiğini ve bunun kendisini mutlu ettiğini belirtmektedir. Bu kitapta kapsamlı bir aritmetik metni oluşturarak Hint-Arap sembollerini Avrupa'ya tanıtmıştır. Hint-Arap sembollerinin abaküsün yerini alması yüzyıllar sürse de tamamen yazıya dayanan hesaplama sisteminin faydaları sonradan anlaşılmıştır.

Liber Abbaci kitabında şu şekilde bir problem yer almaktadır: “Etrafı çevrili bir çiftlikte bir çift yavru tavşan vardır. Bu tavşanlar ay sonunda bir çift yavru yapsın ve yeni yavrular da ikinci aydan itibaren yavru yapsınlar, bir yıl sonunda çiftlikte kaç çift tavşan olur?”





Tavşan Problemi

Yetişkin bir tavşan çiftinin her ay sonunda bir çift tavşan yavruladıklarını ve bu yavru çiftin bir ay sonunda yetişkin olduklarını kabul edelim, yavru olan bir çift tavşandan itibaren bir yılda oluşacak çiftlerin sayısı kaçtır?

Aylar	1		1
	2		1
	3		2
	4		3
	5		5

Yukarıdaki tabloda ilk 5 aya ait tavşan çiftlerinin sayısı adım adım gösterilmiştir. Tablo incelendiğinde her ayın sonundaki tavşan çifti sayısı ondan önceki iki ayın sonundaki tavşan çiftlerinin toplamından oluştuğu gözlenmektedir. O hâlde, aylara göre tavşan çiftlerinin sayısı

1. ay	2. ay	3. ay	4. ay	5. ay	6. ay	7. ay	8. ay	9. ay	10. ay	11. ay	12. ay
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

şeklinde olacaktır.



Kitaplarda tavşan problemi olarak geçen bu problem, halk arasında kuzu-toklu-koyun problemi olarak bilinmektedir. Yetişkin kuzu olan toklu, çoğunlukla iki yaşında yavru vermektedir. Yavru dişi bir kuzu ile başlayıp her yavru lamada bir dişi kuzunun doğduğunu ve ölüm olmadığını kabul edersek 12 yıl sonunda kaç adet hayvana sahip olunur?

Belli bir yıldaki hayvan sayısı, önceki iki yıldakilerin toplamı olmak üzere 12. yılda 144 adet (baş) hayvan olur. Bunların yıllara göre kuzu, toklu, koyun sayısı dağılımına gelince aşağıdaki gibi bir durum ortaya çıkmaktadır.

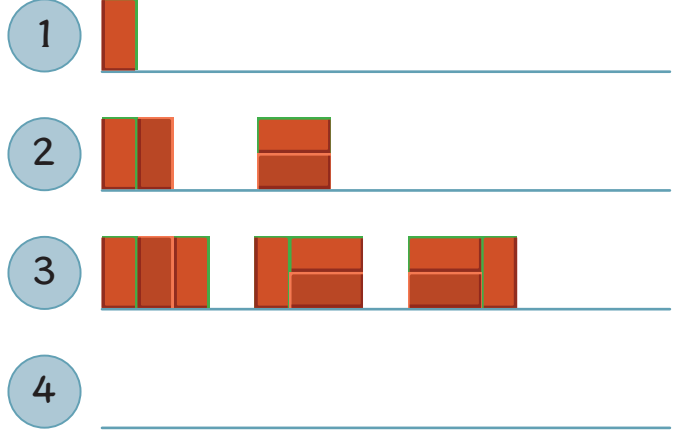
Yıllar	Kuzu Sayısı	Toklu Sayısı	Koyun Sayısı	Toplam
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	1	0	1	2
4	1	1	1	3
5	2	1	2	5
6	3	2	3	8
7	5	3	5	13
8	8	5	8	21
9	13	8	13	34
10	21	13	21	55
11	34	21	34	89
12	55	34	55	144

Yıllara göre toplam sayılar incelendiğinde her yılın sonundaki toplam (kuzu–toklu-koyun) sayının ondan önceki iki yılın sonundaki sayıların toplamından oluştuğu gözlenmektedir.



Kısa kenarı 1 birim, uzun kenarı 2 birim olan tuğlalardan yüksekliği 2 birim olan duvarlar yapılacaktır.

- a. Şekilde 1, 2, 3 tuğla varken oluşan desenler gösterilmiştir. 4 tuğla varken kaç farklı desende duvar yapılabilir?
- b. n. adımdaki desen sayısını veren bir formül elde edebilir miyiz?



Çözüm:

- a. Sol taraftan iki türlü başlayabiliriz.

Kısa kenarı yerde duran tuğla: Bu durumda 3 farklı desende duvar yapılabilir.



Uzun kenarı yerde duran tuğla: Bu durumda 2 farklı desende duvar yapılabilir.



Toplamda: $2+3=5$ desen oluşur.

- b. n tuğla için sol tarafta kısa kenarı yerde duran tuğla ile başlarsak n-1 tuğla ile elde edilecek desen sayısına eşit çıkacaktır. Sol tarafta uzun kenarı yerde duran tuğla ile başlanırsa n-2 tuğla ile elde edilecek desen sayısına eşit çıkacaktır. Yani n. adımda oluşacak desen sayısı, kendinden önceki iki adımda oluşan desen sayılarının toplamına eşit olacaktır.



TANIM

Fibonacci Dizisi: $F_1=1$ ve $F_2=1$ olmak üzere, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$ ile tanımlanan sayı dizisine **Fibonacci dizisi** denir. Bu dizinin elemanlarına da **Fibonacci sayıları** denir.

Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

şeklindedir. ($F_0=0$ kabul edilir.)



Fibonacci dizisinin ilk 20 terimini ve bu terimler için $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ oranını veren bir tablo oluşturunuz. $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ değerlerini gözlemleyiniz. Çıkan sonuçların sürekli olarak yaklaştığı bir sabit sayı var mıdır?

n	F_n	$\frac{F_n}{F_{n-1}}$
1	1	–
2	1	1
3	2	2
4	3	1.5
5	5	1.666667
6	8	1.6
7	13	1.625
8	21	1.615385
9	34	1.619048
10	55	1.617647
11	89	1.618182
12	144	1.617977
13	233	1.618056
14	377	1.618026
15	610	1.618037
16	987	1.618033
17	1597	1.618034
18	2584	1.618034
19	4181	1.618034
20	6765	1.618034

Fibonacci dizisinin bir terimi öncekine bölündüğünde bölümün "altın oran" denen ve irrasyonel bir sayı olan

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398...$$

sayısına yaklaştığı görülmektedir.



Metin tabanlı programlama dili kullanarak ilk 50 Fibonacci sayısını ve yaklaşık altın oran değerini hesaplayalım.

```
ilksayı = 1

ikincisayı = 1

fibonacci = [ilksayı,ikincisayı]

for i in range(50):

    ilksayı,ikincisayı = ikincisayı,ilksayı + ikincisayı

    fibonacci.append(ikincisayı)

altın_oran=fibonacci[-1]/fibonacci[-2]

print(fibonacci)

print(altın_oran)
```

Program çıktısı

```
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946,
17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309,
3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, 102334155,
165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903170, 1836311903, 2971215073,
4807526976, 7778742049, 12586269025, 20365011074, 32951280099]
```

```
1.618033988749895
```



Hesap makinesi ile yaklaşık altın oran değerini hesaplayalım.

- Ekranı ilk olarak 1 sayısını girdikten sonra sürekli olarak $1/x$ tuşuna basıp 1 ekleyin, bulduğunuz sonuçlar için bu durumu tekrar edin.
- Şekilde aşağıdan yukarıya doğru ilk üç adım gösterilmiştir.

Belli bir adımdan sonra ilk dört sayının değişmediğini görebilirsiniz.

$$1/(1,5) + 1$$

**1,66666666666666666666
666666667**

$$1/(2) + 1 =$$

1,5

$$1/(1) + 1 =$$

2

Fibonacci dizisi ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1-6)

ALTIN ORAN:



[AB] doğru parçasının $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|}$ eşitliği sağlanacak şekilde bölünmesine altın kesit denir.

$|AB| = |AC| + |CB|$ yazılırsa,

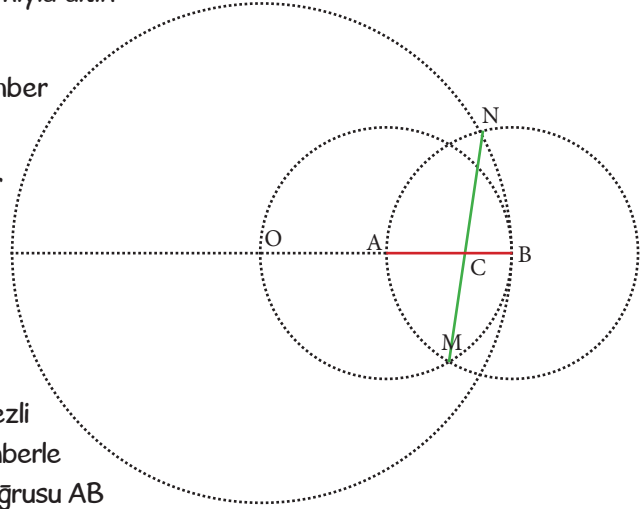
$$\frac{|AC|+|CB|}{|AC|} = 1 + \frac{|AC|}{|CB|} \Rightarrow \frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{|AC|}{|CB|}} = \frac{|AC|}{|CB|} \quad \text{olacaktır.}$$

Buradan, $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bulunur. Bu orana altın oran denir ve φ (Phi) sembolü ile gösterilir.



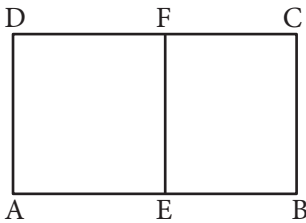
Bir AB doğru parçasını pergel ve cetvel yardımıyla altın oranda bölelim.

- A merkezli, B noktasından geçen çember çizilir.
- B merkezli, A noktasından geçen çember çizilir.
- A merkezli çember ile BA doğrusunun kesişimi olan O noktasını merkez kabul eden B noktasından geçen çember çizilir.
- B merkezli çemberin sırasıyla O merkezli çemberle kesim noktası N ve A merkezli çemberle kesim noktası M noktalarından geçen NM doğrusu AB doğru parçasını altın oranda keser.



TANIM

Altın Dikdörtgen: Herhangi bir dikdörtgenden bir kare çıkarıldığında geriye kalan küçük dikdörtgenin kenar uzunlukları oranı baştaki dikdörtgenin kenar uzunlukları oranı ile aynı ise bu dikdörtgene **Altın Dikdörtgen** denir.



ABCD ve EBCF dikdörtgen, AEFD kare olmak üzere,

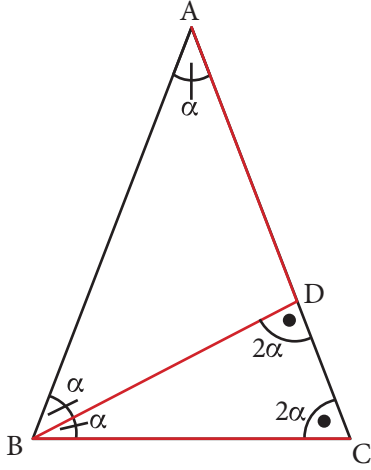
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CF|}$$

ise ABCD altın dikdörtgendir.

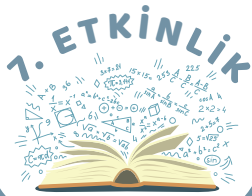


TANIM

Altın Üçgen: Bir ikizkenar üçgenden kendine benzer bir üçgen kesilip alındığında geriye ikizkenar üçgen kalıyorsa bu üçgene “**Altın Üçgen**” denir. Tepe açısı 36° veya 108° olan ikizkenar üçgenler altın üçgenlerdir.

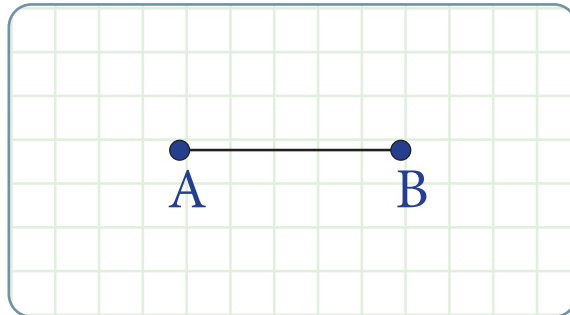


- $|AB| = |AC| > |BC|$ olmak üzere bir ABC üçgeni çizelim ve $m(\angle ABC) = 2\alpha$ olsun.
- $|AC|$ üzerinden $|AD| = |BD| = |BC|$ olmak üzere bir D noktası belirleyelim ve büyük ABC üçgenine benzer olacak şekilde üçgen içinde bir DBC ikizkenar üçgeni daha oluşturalım.
- $m(\angle BCD) = m(\angle CDB) = 2\alpha$ ve $m(\angle DBC) = \alpha$ olur.
- Buradan, $5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$ bulunur.

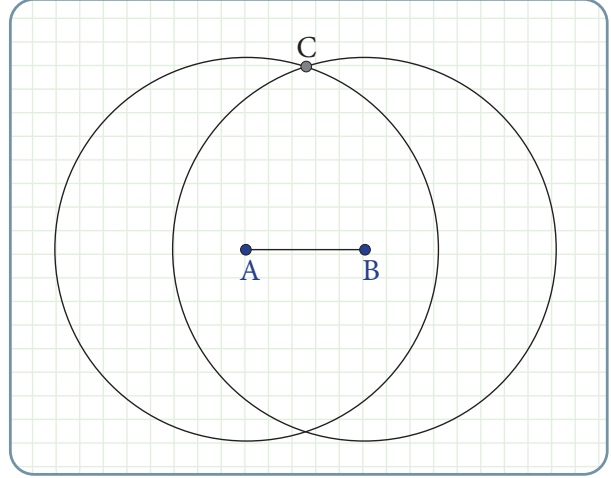


Eşit kenarların uzunluğu taban uzunluğundan büyük olan altın üçgen, dinamik matematik yazılımı ile aşağıda verilen basamaklar uygulanarak çizilebilir.

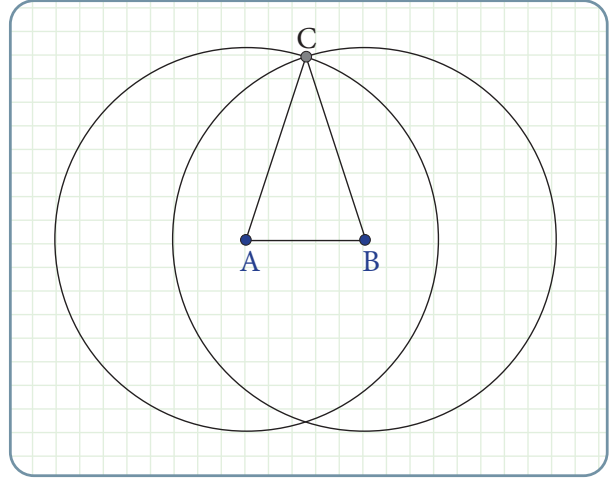
- Bir AB doğru parçası alalım.



- $|AB| = f$ olmak üzere giriş alanına $f * (1 + \sqrt{5})/2$ değeri yazılırsa cebir penceresinde bir a değeri oluşur. “Merkez ve yarıçapla çember” seçeneğini kullanarak A ve B merkezli a yarıçaplı iki çember çizilir.



- Bu çemberlerin kesişim noktası C alınarak elde edilen ABC üçgeni bir altın üçgendir.



Araçlar menüsünden “Yeni araç oluştur” seçeneği ile “Çıkış nesnesi” olarak ABC üçgeni, “Giriş nesnesi” olarak A ve B noktaları seçilerek tabanı verilen altın üçgeni çizen bir araç oluşturulur ve iki nokta belirlenerek altın üçgenler çizilebilir.

Taban uzunluğunun eş kenarların uzunluklarından büyük olması durumunda ise giriş alanına $2f*(1+\sqrt{5})$ yazılıp yukarıdaki adımlar tekrarlanır.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Fibonacci dizisine benzer başka dizilerin varlığı araştırılabilir.
- Kuzular 3 yaşına geldiklerinde yavruluyor olsaydı nasıl bir sayı sistemi oluşurdu?
- Altın dikdörtgen içine çizilen altın spiralın nasıl çizildiği araştırılabilir.
- Altın oranın doğadaki, sanattaki, müzikteki ve mimarideki örnekleri araştırılabilir.



- Beethoven'ın "Beşinci Senfoni"sindeki altın oran araştırılabilir.
- Altın oranın görsel sanatlardaki kullanımı (logo tasarımı vb.) araştırılabilir.
- Leonardo Da Vinci'nin çizimlerindeki altın oran araştırılabilir.
- Trigonometri ve altın oran ilişkisi incelenebilir.
- Pergel ve cetvel ile altın oran çizim çalışmaları yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Aslaner, R., Bakan, S. (2020). Altın Üçgen ve Düzgün Beşgen Üzerinde Oluşan Altın Üçgenlerin Bir Dinamik Geometri Yazılımı ile Araştırılması, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* Cilt 36, Sayı 2 , 2020.
- Öztürk, F. (1995). *Kombinatorik (Sayma Problemleri)*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları.
- Stewart, I. (2009). *Matematiğin Kısa Tarihi* (6.Basım). Alfa Bilim Yayınları.
- TÜBİTAK (2003). *İlköğretim Matematik Olimpiyatları 2.Aşama Soruları*

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Derecelendirme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. a. $F_1 + F_2 + \dots + F_{10} = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143$ ve $F_{12} = 144$ olup

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{10} = F_{12} - 1 \text{ bulunur.}$$

b. $F_1 = F_3 - F_2$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

.

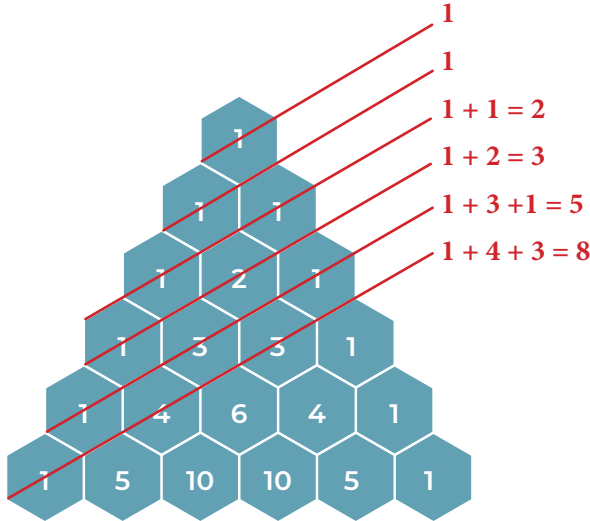
.

.

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ olur.

2.



3. a. $F_1 + F_3 + \dots + F_{13} = 1 + 2 + 5 + 8 + 13 + 34 + 89 + 233 = 377$ ve $F_{14} = 377$ olup

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{13} = F_{14} \text{ bulunur.}$$

b. $F_1 = F_2 - F_0$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

.

.

.

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ olur.



4. a. $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_6^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104$ 'tür. Ayrıca $F_6 = 8$ ve $F_7 = 13$ olup $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_6^2 = 104 = 8 \cdot 13 = F_6 \cdot F_7$ bulunur.

b. $F_1^2 = F_1 \cdot F_2 = F_1(F_1 - F_0) = F_1 \cdot F_2 - F_1 \cdot F_0$

$$F_2^2 = F_2 \cdot F_3 = F_2(F_3 - F_1) = F_2 \cdot F_3 - F_2 \cdot F_1$$

$$F_3^2 = F_3 \cdot F_4 = F_3(F_4 - F_2) = F_3 \cdot F_4 - F_3 \cdot F_2$$

.

.

.

$$F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} = F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ olur.

5. a. 2, 8, 34, ...

- b. 3, 21, 144, ...

- c. 5, 55, ...

- d. k değeri, m değerinin katıdır.

6. a.

n	m	$EBOB(n, m)$	F_n	F_m	$EBOB(F_n, F_m)$
2	10	2	1	55	1
3	6	3	2	8	2
6	9	3	8	34	2
5	10	5	5	55	5
4	8	4	3	21	3

b. $F_{EBOB(n, m)} = EBOB(F_n, F_m)$

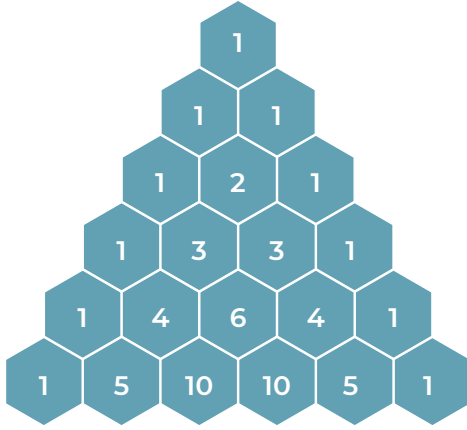
7. 233

8. 233

9. 34

Etkinlik Formu

1. F_n : Fibonacci dizisinin genel terimi (n . terimi) olmak üzere,
 - a. $F_1 + F_2 + \dots + F_{10} =$ toplamının F_{12} türünden değeri nedir?
 - b. $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ olduğunu gösteriniz.
2. Pascal üçgenin terimlerinden Fibonacci dizisinin elemanlarını verecek şekilde bir örüntü belirleyiniz.



3. F_n : Fibonacci dizisinin genel terimi (n . terimi) olmak üzere,
 - a. $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{13}$ toplamının F_{14} türünden değeri nedir?
 - b. $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ olduğunu gösteriniz.
4. F_n : Fibonacci dizisinin genel terimi (n . terimi) olmak üzere,
 - a. $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_6^2$ toplamının F_6 ve F_7 türünden değeri nedir?
 - b. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ olduğunu gösteriniz.
5. F_n : Fibonacci dizisinin genel terimi (n . terimi) olmak üzere,
 - a. 2'nin katı olan Fibonacci sayılarını bulunuz.
 - b. 3'ün katı olan Fibonacci sayılarını bulunuz.
 - c. 5'in katı olan Fibonacci sayılarını bulunuz.
 - d. Bulduğunuz sayı örüntülerini inceleyiniz. Eğer F_k değeri F_m değerinin bir katıysa k ve m arasında nasıl bir ilişki olacağını gözlemleyiniz.



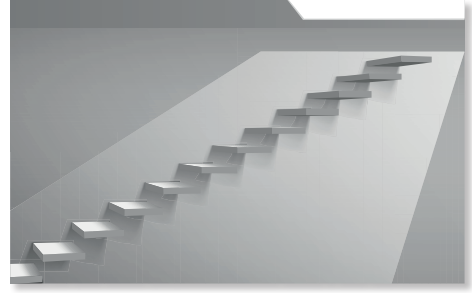
6. F_n : Fibonacci dizisinin genel terimi (n . terimi) olmak üzere,

a. Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

n	m	$EBOB(n, m)$	F_n	F_m	$EBOB(F_n, F_m)$
2	10				
3	6				
6	9				
5	10				
4	8				

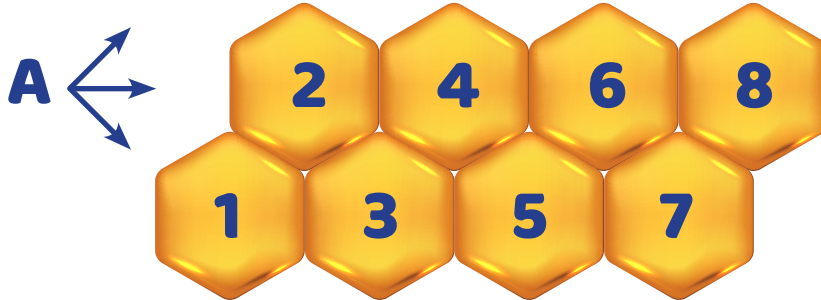
b. Yukarıdaki tablodan yola çıkarak genel bir durum elde edilebilir mi?

7. Gökay, 12 basamaklı bir merdiveni her seferinde 1 ya da 2 adım atarak kaç farklı şekilde çıkabilir?



8. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ kümesinin, herhangi iki ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?
(2003 - TÜBİTAK İlköğretim Matematik Olimpiyatı 2. Aşama)

9. Şekildeki gibi A noktasında bulunan arı, sadece ok yönlerinde hareket edebilmektedir. 1 numaralı peteğe gitmek için bir seçeneği vardır. 2 numaralı petek için 12 ya da 2 olmak üzere iki seçeneği vardır. 3 numaralı petek için 123, 13, 23 olmak üzere 3 seçeneği vardır. Acaba 8 numaralı petek için kaç farklı seçeneği vardır?





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: ÖZEL SAYILAR
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Örüntü ve Özel Sayılar
KAZANIMLAR	: 1. Özel sayı örüntülerinin genel kuralını cebirsel olarak ifade eder.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

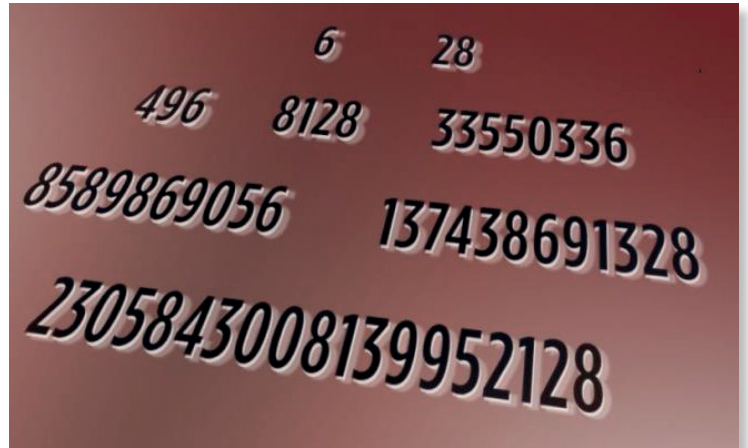
Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, Lucas Sayıları, Smith Sayısı, Palindromik Sayılar, Mükemmel Sayı, Dost (Arkadaş) Sayılar, Fermat Sayıları, Tau Sayıları gibi özel sayılar ile ilgili çalışmalar yapılarak öğrencilerin bu sayıları tanımaları amaçlanmaktadır.

Başlarken...

Sayıların kullanılmaya başlanmasının yedi bin yıllık geçmişe sahip olduğu tarihi kaynaklarda geçmektedir. Sümerler, Babilliler, Mayalar, Hintliler, Romalılar, Mısırlılar, Çinliler ve birçok medeniyet, sayılar ve sayılarla yapılan işlemler konusunda katkı sağlamışlardır. Sayılar teorisi (ya da aritmetik), tam sayılar ve bunlarla ilgili işlemleri incelemektedir. Matematikte kendine has özellikleri olan çok çeşitli sayı tipleri mevcuttur. Bu sayılardan ilki ve matematikçilerin en çok uğraştığı sayı, çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna bölümü olan pi sayısıdır.

Asal sayılar genel formülü bulunamamış ve üzerine çok fazla araştırma yapılmış matematiğin gizemli alanlarından biridir. Sizin de aklınıza gelen matematikte karşınıza çıkan özel sayılar var mıdır?



**Smith Sayısı**

Öğrenciler Etkinlik Formu soru 1'e yönlendirilir ve düşünceleri istenir.

Sayı	Sayının Rakamları Toplamı	Sayının Asal Çarpanlarının Çarpımı Şeklinde Yazılması	Tüm Asal Çarpanların Rakamlarının Toplamı
12	$1+2=3$	$2 \times 2 \times 3$	$2+2+3=7$
22	$2+2=4$	2×11	$2+1+1=4$
210	$2+1+0=3$	$2 \times 3 \times 5 \times 7$	$2+3+5+7=17$
728	$7+2+8=17$	$2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$	$2+2+2+7+1+3=17$

İstenen adımlar uygulandığında, sayının rakamlarının toplamı ile sayı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazıldığında, bu yazılıştaki tüm asal sayıların rakamlarının toplamı bazı durumlarda eşit olmaktadır.

TANIM

1'den büyük asal olmayan (bileşik) bir sayının rakamlarının toplamı, sayı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazıldığında, bu yazılıştaki tüm asal sayıların rakamlarının toplamına eşit oluyorsa bu tür sayılara Smith Sayıları denir. (Örneğin, 85 bir Smith sayısıdır. Çünkü: $85 = 5 \times 17$ olup $8 + 5 = 5 + 1 + 7$ 'dir.)

Smith sayısı ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 2).

Lucas Sayıları

1, 3, 4, 7, 11, ... sayı dizisi için öğrenciler aşağıdaki sorular sorularak yönlendirilir.

- Bu dizinin (örüntünün) kuralını belirleyiniz.
- Bu dizinin kuralı daha önce bildiğiniz bir dizinin kuralına benziyor mu?
- Dizinin terimleri arasındaki oranı Fibonacci dizisinde kullanılan bir yöntemle (hesap makinesi, metin tabanlı yazılım ve tablolama programı vb.) hesaplayınız.

TANIM

$L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$ ile tanımlanan sayı dizisine

Lucas dizisi denir. Bu dizini elemanlarına da Lucas sayıları denir.

Lucas dizisinin genel terimi, $L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$

şeklindedir. ($L_0 = 2$ kabul edilir.)

Lucas sayıları ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 3, 4).

Palindrom Sayılar

Örnek:

Nalan elinde bulunan 4 sesli harf ve 5 sessiz harfi kullanarak belirli kurallar ölçüsünde 5 harfli kelimeler yazacaktır. Bu kurallar şu şekildedir.

- Kelimelerin soldan sağa ve sağdan sola okunuşları aynı olmalı.
- Her harfi istediği kadar kullanabilir.
- Herhangi iki sesli harf ve herhangi iki sessiz harf yan yana olmamalı.

Nalan bu şartlar altında 5 harfli kaç kelime yazabilir?

Çözüm:

İstenen durumlar aşağıdaki gibi olabilir.

1. durum: Sesli harf ile başlayabilir.

SESLİ	SESSİZ	SESLİ	SESSİZ	SESLİ
4 durum	5 durum	4 durum	1 durum	1 durum
1. durum için toplam kelime sayısı: $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$				

2. durum: Sessiz harf ile başlayabilir.

SESSİZ	SESLİ	SESSİZ	SESLİ	SESSİZ
5 durum	4 durum	5 durum	1 durum	1 durum
2. durum için toplam kelime sayısı: $5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$				
Toplam kelime sayısı: $80 + 100 = 180$				

TANIM

Polindrom Sayılar: Tersten okunduğunda da aynı olan sayılara palindrom sayılar ya da palindromik sayılar denir. (Örneğin 142241 sayısı bir palindrom sayıdır.)

Tersten okunduğunda da aynı olan sözcüklere de palindrom sözcük denir. (Örneğin KAZAK, MUM, YATAY...)



500'den küçük palindrom sayılar, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 303, 313, 323, 333, 343, 353, 363, 373, 383, 393, 404, 414, 424, 434, 444, 454, 464, 474, 484, 494} şeklindedir.

Palindrom sayıları, tek sayıda basamak içeren ve çift sayıda basamak içeren olmak üzere iki gruba ayırabiliriz.

Örneğin dokuz basamaklı palindrom sayıları, $abcdedcba$ olacak şekilde ortadaki basamaktan sonrası, ortadaki basamaktan öncesinin tersten yazımıdır.

Örneğin sekiz basamaklı palindrom sayılar $abcdedcba$ olacak şekilde basamak sayısının yarısından sonraki kısım, basamak sayısının yarısından önceki kısmın tersten yazımıdır.

Örnek:

Palindrom sayılar küçükten büyüğe doğru yazıldığında 2235. sıradaki palindrom sayı kaçtır?

Çözüm:

İlginç bir yöntemle herhangi bir palindrom sayının sırasını bulmak mümkündür.

Eğer sayı tek sayıda basamak içeriyorsa sayının ilk basamağına 1 ekleyip tam ortadaki basamağa kadar yazarız. Oluşan sayı bize baştaki palindromik sayının sırasını verecektir.

Örneğin sayımız 434 olsun. Bu palindromik sayı $(4 + 1)3 = 53$. sıradadır.

Örneğin sayımız 1235321 olsun. Bu palindromik sayı $(1+1)235 = 2235$. sıradadır.

Eğer sayı çift sayıda basamak içeriyorsa, sayının ilk yarısının başına yeni bir basamak olarak 1 yazarız.

Örneğin sayımız 22 olsun. Bu palindromik sayı 12. sıradadır.

Örneğin sayımız 1991 olsun. Bu palindromik sayı 119. sıradadır.

O hâlde, 2235. sıradaki palindrom sayı 1235321 olacaktır.

Örnek:

Bir dijital saat ekranının saati gösteren kısmında 1 ile 12 arasında değerler görülmektedir. Saat 12.59'dan sonra 1.00 olmaktadır. Acaba ekranda kaç palindromik sayı görülebilir?

Çözüm:

1.01, 1.11, 1.21, 1.31, 1.41, 1.51,

2.02, 2.12, 2.22, 2.32, 2.42, 2.52

...

9.09, 9.19, 9.29, 9.39, 9.49, 9.59,

10.01, 11.11, 12.21

İlk dokuz saate $9 \times 6 = 54$ tane 10, 11 ve 12 saatleri için 3 olmak üzere, toplam 57 palindromik sayı görülebilir.

Palindrom sayılar ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 5-9).

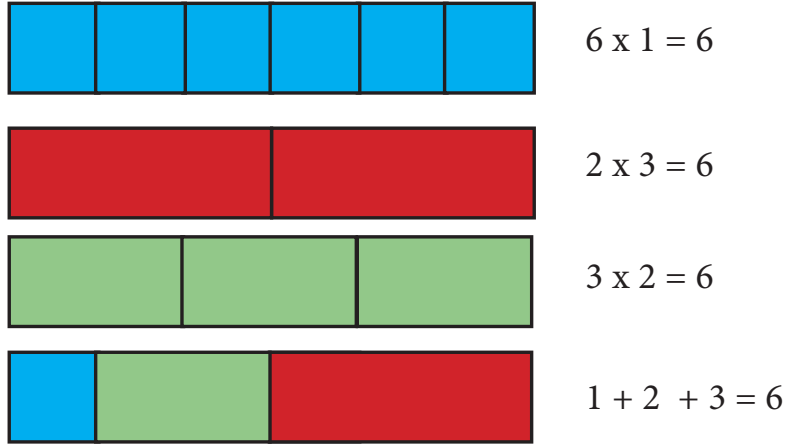
Mükemmel Sayılar

Vedat Öğretmen, üzeri birimlere ayrılmış çok miktarda eşit uzunlukta ipi sınıfta öğrencilere dağıtmıştır. Öğrencilerden aşağıdaki kurallara göre ipleri kesmesini istemiştir.

- İpler, birimlerin olduğu çizgilerden kesilecektir.
- Her parça eşit uzunlukta olacaktır.
- Her öğrenci kestiği parçalardan birini öğretmene verecektir.

Öğretmen, öğrencilerden topladığı farklı uzunluktaki parçaları birleştirerek ilk dağıttığı iple aynı uzunlukta bir ip elde etmiştir. Sizce ipin uzunluğu kaç birim olursa bu şartlar sağlanır? Sınıf mevcudunun bulduğunuz ip uzunluğuyla bir ilişkisi var mıdır?

Ahmet parmak kaldırarak ipin altı birimden oluşması gerektiğini ve aşağıdaki desenle çözdüğünü söylemiştir.



TANIM

Kendisi hariç tüm pozitif bölenleri toplamı, kendisine eşit olan sayılara mükemmel sayılar denir. (Örneğin, 6 mükemmel sayıdır. Çünkü 6'nın kendisi hariç pozitif bölenleri, 1, 2, 3 olup $1 + 2 + 3 = 6$ 'dır).

Mükemmel sayılar ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 10).

**Teorem:**

Eğer p ve $2^p - 1$ asal ise, $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ çarpımı mükemmel sayıdır.

İspat:

p ve $2^p - 1$ asal olsun. $A = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ diyelim. A sayısının kendisi hariç pozitif bölenlerinin toplamını bulalım. Bunun için tüm bölenlerinin toplamından kendisini çıkarmalıyız.

$$A \text{ sayısının tüm pozitif bölenlerinin toplamı: } \left(\frac{2^{p-1+1} - 1}{2 - 1} \right) \cdot (1 + 2^p - 1) = 2^p \cdot (2^p - 1)$$

olur. Bu toplamdan A sayısının kendisi çıkarılırsa,

A sayısının kendisi hariç tüm pozitif bölenlerinin toplamı:

$$\begin{aligned} 2^p \cdot (2^p - 1) - 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) &= 2 \cdot 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) \cdot (2^p - 1) \\ &= 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) \\ &= A \end{aligned}$$

bulunur. O hâlde, $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ çarpımı yani $A = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ sayısı mükemmel sayıdır.

Örnek:

Her mükemmel sayının birler basamağı 6 ya da 8'dir. Gösteriniz.

Çözüm:

p ve $2^p - 1$ asal olsun. $A = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ sayısının mükemmel sayı olduğunu bulmuştuk.

$p = 2$ ise $A = 2^{2-1} \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$ olup birler basamağı 6'dır.

$p > 2$ ise, her asal sayının $4k + 1$ ya da $4k + 3$ formunda olduğunu biliyoruz.

$p = 4k + 1$ olsun.

$$\begin{aligned} A &= 2^{4k+1-1} \cdot (2^{4k+1} - 1) = 2^{4k} \cdot (2^{4k+1} - 1) \\ &= 16^k \cdot (2 \cdot 16^k - 1) \equiv 6^k \cdot (2 \cdot 6^k - 1) \pmod{10} \\ &\equiv 6 \cdot (2 \cdot 6 - 1) \pmod{10} \\ &\equiv 6 \pmod{10} \end{aligned}$$

olup birler basamağı 6'dır.

$p = 4k + 3$ olsun.

$$\begin{aligned} A &= 2^{4k+3-1} \cdot (2^{4k+3} - 1) = 2^{4k+2} \cdot (2^{4k+3} - 1) \pmod{10} \\ &\equiv 6 \cdot 4 \cdot (8 \cdot 6 - 1) \pmod{10} \\ &\equiv 8 \pmod{10} \end{aligned}$$

olup birler basamağı 8'dir.

O hâlde, her mükemmel sayının birler basamağı 6 ya da 8'dir.

Örnek:

6 dışındaki her mükemmel sayının 9 ile bölümünden kalan 1'dir.

Çözüm:

p ve $2^p - 1$ asal olsun. $A = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ sayısının mükemmel sayı olduğunu bulmuştuk.

$p > 3$ ise, her asal sayının $6k + 1$ ya da $6k + 5$ formunda olduğunu biliyoruz.

$p = 6k + 1$ olsun.

$$\begin{aligned} A &= 2^{6k+1-1} \cdot (2^{6k+1} - 1) = 2^{6k} \cdot (2^{6k+1} - 1) \\ &\equiv 64^k \cdot (2 \cdot 64^k - 1) \equiv 1^k \cdot (2 \cdot 1^k - 1) \pmod{9} \\ &\equiv 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) \pmod{9} \\ &\equiv 1 \pmod{9} \end{aligned}$$

olup 9 ile bölümünden kalan 1'dir.

$p = 6k + 5$ olsun.

$$\begin{aligned} A &= 2^{6k+5-1} \cdot (2^{6k+5} - 1) = 2^{6k+4} \cdot (2^{6k+5} - 1) \\ &\equiv 16 \cdot 64^k (32 \cdot 64^k - 1) \equiv 7 \cdot 1^k \cdot (5 \cdot 1^k - 1) \pmod{9} \\ &\equiv 7 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 1 - 1) \pmod{9} \\ &\equiv 1 \pmod{9} \end{aligned}$$

olup 9 ile bölümünden kalan 1'dir.

O hâlde, 6 dışındaki her mükemmel sayının 9 ile bölümünden kalan 1'dir.

Örnek:

Mükemmel sayılar ile 2'lik tabanlar arasındaki ilişki öğrencilere sorgulattılır.

$$6 = (110)_2$$

$$28 = (11100)_2$$

$$496 = (111110000)_2$$

·
·
·

Bu şekilde devam edildiğinde,

- Bir sonraki mükemmel sayıyı bulunuz.
- Mükemmel sayıların 2'lik taban ile ilgili yazılışları arasında bir ilişki belirleyiniz.

**Çözüm:**

- a. Bir sonraki mükemmel sayı: $8128 = (1111111000000)_2$
- b. n ve $2^n - 1$ asal olmak üzere, $N = (\underbrace{111\dots 1}_{n \text{ tane}} \underbrace{1000\dots 00}_{n-1 \text{ tane}})_2$ sayısı mükemmel sayıdır.

Arkadaş Sayılar

Birbirleri ile arkadaş olan Gökay ve Kutay aşağıda kuralları verilen bir oyun oynamaktadırlar.

- Gökay bir sayı söylemekte ve bu sayının kendisi hariç pozitif bölenlerinin toplamını tahtaya yazmaktadır. Gökay'ın söylediği sayı G ve bu sayının kendisi hariç pozitif bölenlerinin toplamı G' olsun.
- Kutay bir sayı söylemekte ve bu sayının kendisi hariç pozitif bölenlerinin toplamını tahtaya yazmaktadır. Kutay'ın söylediği sayı K ve bu sayının kendisi hariç pozitif bölenlerinin toplamı K' olsun.
- $G > K'$ ise oyunu Gökay kazanacaktır.
- $K > G'$ ise oyunu Kutay kazanacaktır.



Buna göre, Gökay 220 sayısını söylediğinde ve oyun berabere bittiğine göre, Kutay'ın söylemiş olduğu sayı kaçtır?

TANIM

İki sayı birbirinin kendisi hariç tüm pozitif bölenleri toplamına eşit oluyorsa bu sayılara arkadaş sayılar denir. (Örneğin 220 ile 284 arkadaş sayılardır.)

Arkadaş sayılar ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 11).

Tau Sayıları**TANIM**

Pozitif bölenlerinin sayısına tam bölünebilen bir doğal sayıya Tau Sayısı denir. (Örneğin 12 bir Tau sayısıdır. Çünkü 12 sayısının pozitif bölenleri, 1, 2, 3, 4, 6, 12 olup 6 ile tam bölünür.)

Tau sayıları ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 12).

Örnek:

Herhangi bir tek Tau sayısı tamkaredir.

Çözüm:

A sayısı tek Tau sayısı olsun. $p_1, p_2, \dots, p_k$ farklı asal sayılar ve $a_1, a_2, \dots, a_k$ pozitif doğal sayılar olmak üzere,

$$A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

1 2

şeklinde asal çarpanlarına ayrılabilir olsun. A sayısının pozitif bölenlerinin sayısı,

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)'dir.$$

A Tau sayısı olduğundan, $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ sayısı A'nın bir bölenidir. Ayrıca A tek olup, $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ sayısı da tek olmalıdır. Bu durumda, $a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_k + 1$ sayılarının her biri tek olup $a_1, a_2, \dots, a_k$ sayılarının her biri çift olmalıdır. Bu durumda ise $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ sayısı tamkaredir.

Örnek:

A herhangi bir tek Tau sayısı ise $2A$ Tau sayısıdır.

Çözüm:

A sayısı tek Tau sayısı olsun. $p_1, p_2, \dots, p_k$ farklı asal sayılar ve $a_1, a_2, \dots, a_k$ pozitif doğal sayılar olmak üzere,

$A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ (A'nın hiçbir asal çarpanı 2 değildir.) şeklinde asal çarpanlarına ayrılabilir olsun. Bu durumda $2A = 2 \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ şeklindedir.

A sayısının pozitif bölenlerinin sayısı: $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ olacaktır.

A tau sayısı olduğundan, $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ sayısı A'nın bir bölenidir.

O hâlde, $2(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ sayısı da $2A$ 'nın bir bölenidir. Bu durumda $2A$ bir Tau sayısıdır.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- Friedman sayıları, Fermat sayıları, Strobogramatik sayılar, Narsistik sayılar, Catalan sayıları, Bell sayıları, Stirling sayıları gibi özel sayı dizileri araştırılabilir.
- Her pozitif tam sayının üç palindrom sayının toplamı olarak yazılabileceği ile ilgili araştırma yapılabilir.
- F_n : Fibonacci dizisinin genel terimi (n. terimi) ve L_n : Lucas dizisinin genel terimi (n. terimi) olmak üzere, aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$F_{2n} = F_n \cdot L_n$$



$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, (n > 1)$$

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}, (n > 2)$$

$$5F_n = L_{n+1} - L_{n-1}$$

$$L_n = F_{2n} - F_{n+1}$$

KAYNAKLAR

- Kaya, E., E.. (2021). <https://bilimgenc.tubitak.gov.tr/makale/mukemmel-sayi-nedir>. Erişim tarihi: 30.05.2021
- Öztürk, Ö. (2018). *Nesin Matematik Köyü, Öğretmenler İçin Matematiksel Araştırma Deneyimi Programı-1 Ders Notları*.
- Thongmoon, M. (2009). Identities for the common factors of Fibonacci and Lucas numbers. *In International Mathematical Forum* (Vol. 4, No. 7, pp. 303-308).
- Voight, J. (1998). *Perfect numbers: An Elementary Introduction*. University of California, Berkley.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. Çözüm ders etkinliğinde yapılmıştır.

2. 4

3. a. $L_1 + L_2 + \dots + L_{10} = 1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 + 76 + 123 = 319$ ve $L_{12} = 322$

olup, $L_1 + L_2 + \dots + L_{10} = L_{12} - 3$ bulunur.

b. $L_1 = L_3 - L_2$

$$L_2 = L_4 - L_3$$

$$L_3 = L_5 - L_4$$

⋮

⋮

⋮

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, $L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3$ olur.

4. a. $L_1 + L_3 + \dots + L_{15} = 1 + 4 + 11 + 29 + 76 + 199 = 320$ ve $F_{12} = 322$ olup,

$L_1 + L_3 + \dots + L_{15} = L_{12} - 2$ bulunur.

b. $L_1 = L_2 - L_0$

$$L_3 = L_4 - L_2$$

$$L_5 = L_6 - L_4$$

⋮

⋮

⋮

$$L_{2n-1} = L_{2n} - L_{2n-2}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, $L_1 + L_3 + L_5 \dots + L_{2n-1} = L_{2n} - L_0 = L_{2n} - 2$ olur.

5. 900

6. 648

7. 110

8. 12.02.2021

9. 16

10. 70

11. 2

12. 2924

13. 3

**Etkinlik Formu**

1. Aşağıdaki tabloda verilen sayılar ile ilgili aşağıdaki adımlar uygulanacaktır.

1. Adım: Her sayının rakamları toplamını ilgili sütuna yazınız.
2. Adım: Her sayının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazılmasını ilgili sütuna yazınız.
3. Adım: Her sayının tüm asal çarpanlarının rakamları toplamını ilgili sütuna yazınız.

Sayı	Sayının Rakamları Toplamı	Sayının Asal Çarpanlarının Çarpımı Şeklinde Yazılması	Tüm Asal Çarpanların Rakamlarının Toplamı
12			
22			
210			
728			

Verilen sayının rakamları toplamını ve tüm asal çarpanlarının rakamlarının toplamını karşılaştırınız ve aralarındaki ilişkiyi inceleyiniz.

2. 1'den büyük asal olmayan (bileşik) bir sayının rakamlarının toplamı, sayı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazıldığında, bu yazılıştaki tüm asal sayıların rakamlarının toplamına eşit oluyorsa bu tür sayılara **Smith Sayıları** denir. Buna göre, 121, 150, 166, 202, 265, 300 sayılarından kaç tanesi Smith sayısıdır.

3. L_n : Lucas dizisinin genel terimi (n. terimi) olmak üzere,

a. $L_1 + L_2 + \dots + L_{10}$ toplamının L_{12} türünden değeri nedir?

b. $L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3$ olduğunu gösteriniz.

4. L_n : Lucas dizisinin genel terimi (n. terimi) olmak üzere,

a. $L_1 + L_3 + \dots + L_5 + \dots + L_{11}$ toplamının L_{12} türünden değeri nedir?

b. $L_1 + L_2 + L_5 + \dots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2$ olduğunu gösteriniz.

5. Beş basamaklı kaç tane palindrom sayı vardır?
6. Altı basamaklı ve ilk üç basamağının rakamları farklı olan kaç tane palindrom sayı vardır?
7. En son yaşanan palindromik yıl ile bir sonra yaşanacak palindromik yıl arasında kaç yıl fark vardır?
8. İçinde bulunulan günün tarihi; gün, ay, yıl olarak yazıldığında, (23.04.2021 gibi) yaşanmış son palindromik tarih nedir?
9. Bir dijital saat ekranının saati gösteren kısmı 00 ile 23 arasında, dakikayı gösteren kısmı ise 00 ile 59 arasında değerler almaktadır. (Örneğin, 19.03) Ekranda oluşan oluşan dört haneli sayıyı düşündüğümüzde, kaç farklı palindromik sayı görülebilir.
10. Bir dijital saat ekranının saati gösteren kısmında 0 ile 23 arasında değerler görülmektedir. (5:23, 17:36 gibi). Ekranda kaç palindromik sayı görülebilir.
11. Kendisi hariç tüm pozitif bölenleri toplamı, kendisine eşit olan sayılara mükemmel sayılar denir. Buna göre, 28, 120, 248, 496 sayılarından kaç tanesi mükemmel sayıdır?
12. 2620 ile arkadaş olan sayıyı bulunuz.
13. Pozitif bölenlerinin sayısına tam bölünebilen bir doğal sayıya Tau Sayısı denir. Buna göre, 96, 100, 104, 108, 120 sayılarından kaç tanesi Tau sayısıdır.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: ÇOKGENSEL SAYILAR
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Örüntü ve Özel Sayılar
KAZANIMLAR	: 1. Şekil örüntüleriyle sayı örüntülerini ilişkilendirir. 2. Özel sayı örüntülerinin genel kuralını cebirsel olarak ifade eder.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte; üçgensel sayılar, dörtgensel (karesel) sayılar, beşgensel sayılar gibi sayı dizilerinin genel terimlerinin bulunması amaçlanmaktadır. Ayrıca, üçgensel sayıların özelliklerine yönelik ispat çalışmalarının yapılması hedeflenmektedir.

Başlarken...

Üçgensel sayılar ile ilgili formül ünlü matematikçi Carl F. Gauss tarafından çocukluk yıllarında bulunmuştur. Formülün bulunuşu ile ilgili meşhur hikâyede Gauss'un ilkökul öğretmeni J. G. Büttner öğrencilerin oyalanması için 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamını sormuştur. Gauss, birkaç saniye içinde öğretmenini ve öğretmenin asistanı Martin Bertels'i hayrete düşürerek 5050 cevabını bulmuştur. Peki, sizce Gauss bunu nasıl yapmıştır?



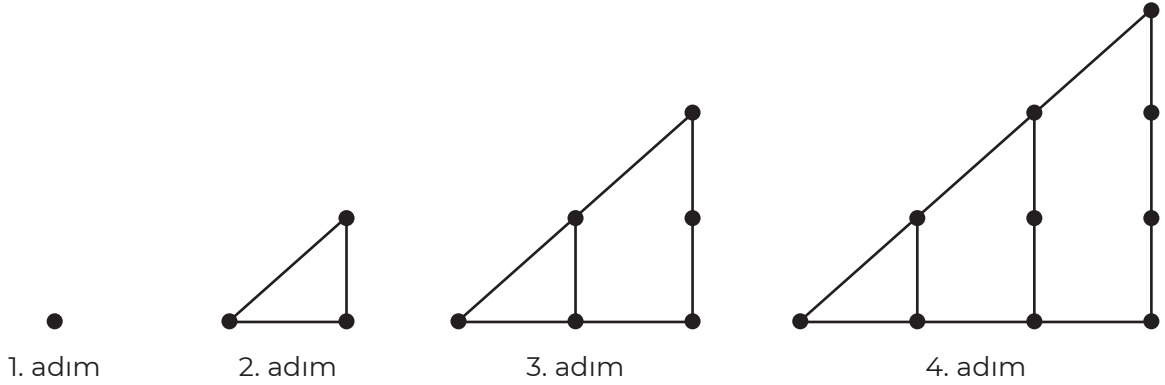
Carl Friedrich Gauss

TANIM

Çokgensel Sayılar: Bir çokgenin köşelerini referans alıp 1'den başlayarak her adımda çokgenin kenarlarının 1 fazla sayıyla bölünmesi sonucunda elde edilen noktaların toplamının oluşturduğu sayı dizisine çokgensel sayılar denir.



Verilen şekil örüntüsüne göre, öğrenciler aşağıdaki sorularla yönlendirilir:



- Verilen şekil örüntüsüne göre 10. adımdaki daire sayısı kaçtır?
- Verilen şekil örüntüsüne göre 20. adımdaki daire sayısı kaçtır?
- Verilen şekil örüntüsüne göre n . adımdaki daire sayısını veren bir bağıntı bulabilir misiniz?
- Verilen örüntüyle bilardo üçgeni içindeki topların ve bowling lobutların dizilişi ve sayısı arasında bir ilişki kurabildiniz mi?



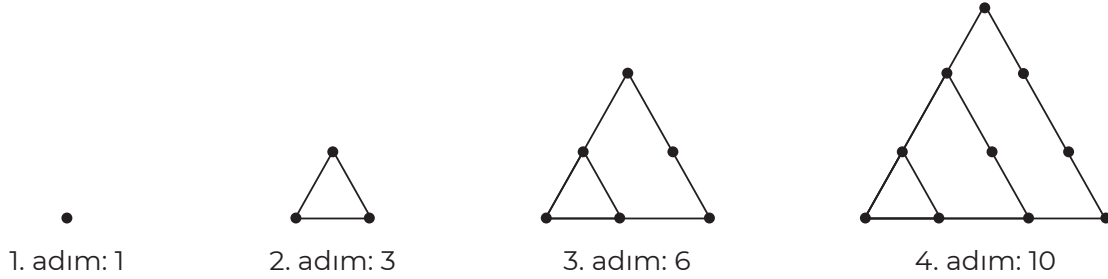
- Verilen şekil örüntüsünün terimlerinden oluşan diziye üçgensel sayı dizisi denebilir mi? Bulduğunuz bağıntı üçgensel sayı dizisinin genel terimi olabilir mi?

TANIM

Üçgensel Sayı Dizisi: 1’den başlanarak n ’ye kadar olan ardışık doğal sayıların toplamı olarak yazılan sayılara üçgensel sayılar denir. Bu sayıların oluşturduğu diziye üçgensel sayı dizisi denir.



Üçgensel sayı dizisinin genel teriminin, $\ddot{U}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu gösterelim:



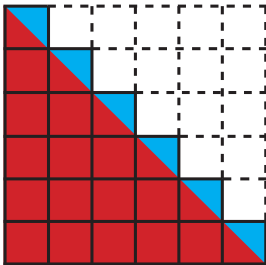
Şekilde üçgensel sayıların ilk dört elemanı gösterilmiştir. Üçgensel sayılar dizisinin genel terimi $\ddot{U}_n$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned}\ddot{U}_1 &= 1 \\ \ddot{U}_2 &= 1 + 2 \\ \ddot{U}_3 &= 1 + 2 + 3 \\ &\vdots \\ \ddot{U}_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + n\end{aligned}$$

şeklinde olacağından, üçgensel sayı dizisinin genel terimi

$$\ddot{U}_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ şeklindedir.}$$

Üçgensel Sayıların Genel Terimini Veren Görsel İspat:

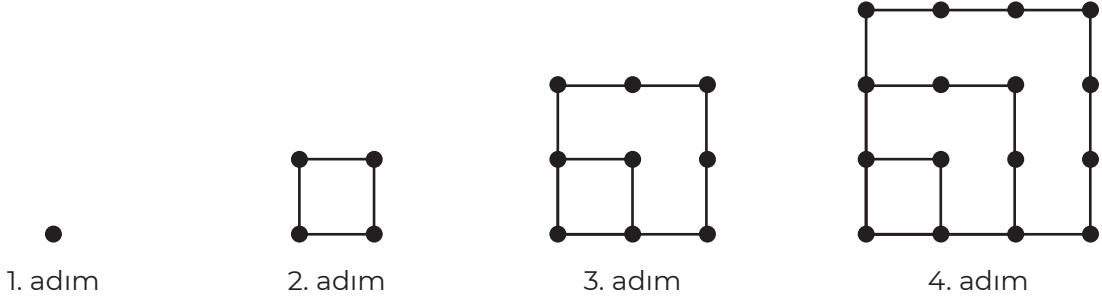


$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Üçgensel sayı dizisi ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1-3)



Verilen şekil örüntüsüne göre, öğrenciler aşağıdaki sorularla yönlendirilir:

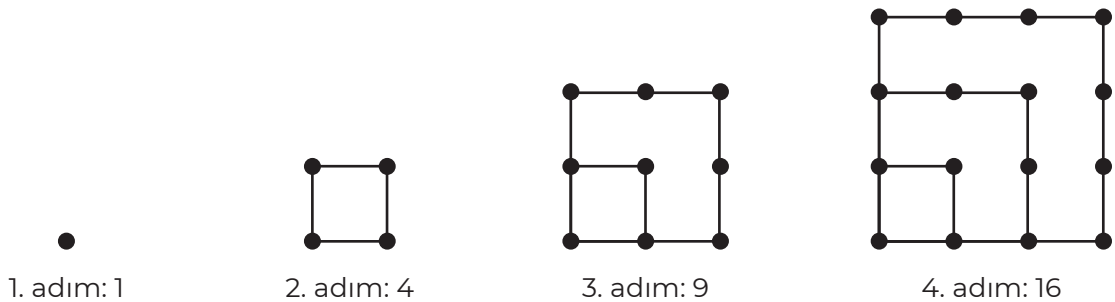


- Verilen şekil örüntüsüne göre 12. adımdaki daire sayısı kaçtır?
- Verilen şekil örüntüsüne göre 24. adımdaki daire sayısı kaçtır?
- Verilen şekil örüntüsüne göre n . adımdaki daire sayısını veren bir bağıntı bulabilir misiniz?
- Verilen şekil örüntüsünün terimlerinden oluşan diziye dörtgensel (karesel) sayı dizisi denilebilir mi? Bulduğunuz bağıntı dörtgensel (karesel) sayı dizisinin genel terimi olabilir mi?

TANIM

Dörtgensel Sayılar (Kare Sayılar): Bir tam sayının karesi şeklinde yazılabilen sayılara kare sayılar denir. Kare sayıların oluşturduğu diziye kare sayı dizisi denir.

Dörtgensel (karesel) sayı dizisinin genel teriminin, $D_n = n^2$ olduğunu gösterelim:





Şekilde dörtgensel (karesel) sayıların ilk dört elemanı gösterilmiştir. Dörtgensel (karesel) sayılar dizisinin genel terimi D_n ile gösterilirse

$$D_1 = 1$$

$$D_2 = 1 + 3$$

$$D_3 = 1 + 3 + 5$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$D_n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$$

şeklinde olacağından, dörtgensel sayı dizisinin genel terimi

$$D_n = n^2$$

şeklindedir.

Üçgensel ve dörtgensel (karesel) sayı dizileri ile ilgili çeşitli örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3-4)



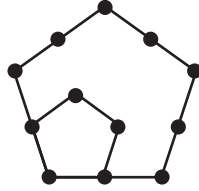
Verilen şekil örüntüsüne göre, öğrenciler aşağıdaki sorularla yönlendirilir.



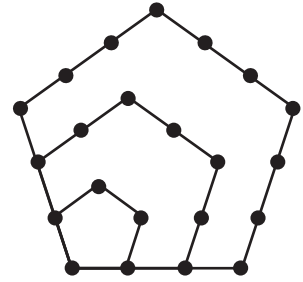
1. adım: 1



2. adım: 5



3. adım: 12



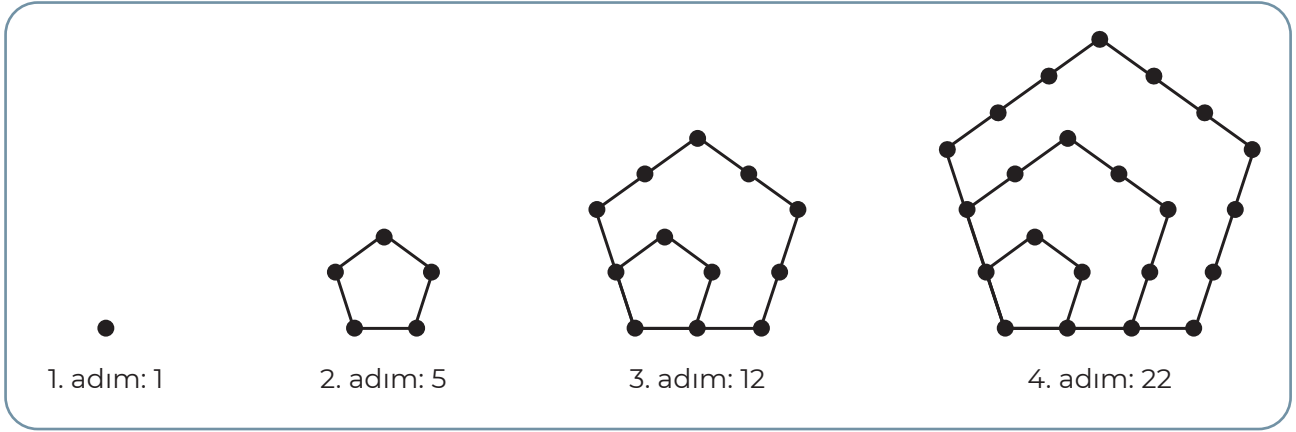
4. adım: 22

- Verilen şekil örüntüsüne göre 5. adımdaki daire sayısı kaçtır?
- Verilen şekil örüntüsüne göre 10. adımdaki daire sayısı kaçtır?
- Verilen şekil örüntüsüne göre n. adımdaki daire sayısını veren bir bağıntı bulabilir misiniz?
- Verilen şekil örüntüsünün terimlerinden oluşan diziye beşgensel sayı dizisi denebilir mi? Bulduğunuz bağıntı beşgensel sayı dizisinin genel terimi olabilir mi?

TANIM

Beşgensel Sayılar: 1'den n 'ye kadar $3n-2$ şeklindeki doğal sayıların toplamı şeklinde yazılan sayılara beşgensel sayılar denir. Bu sayılarla oluşturulmuş diziye ise beşgensel sayı dizisi denir.

Beşgensel sayı dizisinin genel teriminin $B_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ olduğunu gösterelim:



Şekilde beşgensel sayıların ilk dört elemanı gösterilmiştir. Beşgensel sayı dizisinin genel terimi B_n ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
 B_1 &= 1 \\
 B_2 &= 1 + 4 \\
 B_3 &= 1 + 4 + 7 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 B_n &= 1 + 4 + 7 + \dots + 3n - 2
 \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Bu sayı dizisinin genel terimini bulalım.

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{3n-2-1}{2} + 1 = \frac{3n-3}{3} + 1 = \frac{3(n-1)}{3} + 1 = n - 1 + 1 = n$$

$$\text{Terimlerin Toplamı} = n\left(\frac{3n-2+1}{2}\right) = n\left(\frac{3n-1}{2}\right)$$

olacağından, beşgensel sayıların genel terimi $B_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

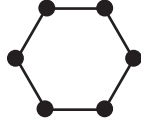
şeklindedir.



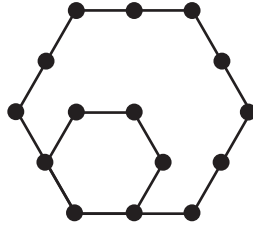
Verilen şekil örüntüsüne göre, öğrenciler aşağıdaki sorularla yönlendirilir.



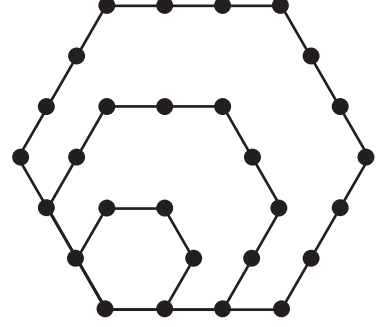
1. adım: 1



2. adım: 6



3. adım: 15



4. adım: 28

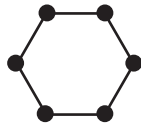
- Verilen şekil örüntüsüne göre 5. adımdaki daire sayısı kaçtır?
- Verilen şekil örüntüsüne göre 10. adımdaki daire sayısı kaçtır?
- Verilen şekil örüntüsüne göre n . adımdaki daire sayısını veren bir bağıntı bulabilir misiniz?
- Verilen şekil örüntüsünün terimlerinden oluşan diziye altıgensel sayı dizisi denebilir mi? Bulduğunuz bağıntı altıgensel sayı dizisinin genel terimi olabilir mi?

TANIM

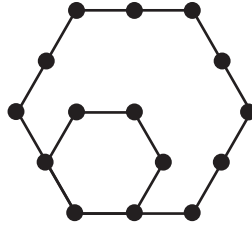
Altıgensel Sayılar: 1'den n 'ye kadar $4n-3$ şeklindeki doğal sayıların toplamı şeklinde yazılan sayılara altıgensel sayılar denir. Bu sayılarla oluşturulmuş diziye ise altıgensel sayı dizisi denir.



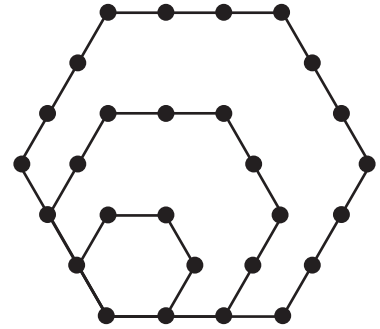
1. adım: 1



2. adım: 6



3. adım: 15



4. adım: 28

Şekil de altıgensel sayıların ilk dört elemanı gösterilmiştir. Altıgensel sayı dizisinin genel terimi A_n ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1 \\
A_2 &= 1 + 5 \\
A_3 &= 1 + 5 + 9 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
A_n &= 1 + 5 + 9 + \dots + 4n - 3
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Şimdi bu sayı dizisinin genel terimini bulalım.

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{4n-3-1}{4} + 1 = \frac{4n-4}{4} + 1 = \frac{4(n-1)}{4} + 1 = n - 1 + 1 = n$$

$$\text{Terimlerin Toplamı} = n \left(\frac{4n-3+1}{2} \right) = n \left(\frac{4n-2}{2} \right)$$

olacağından, altıgensel sayıların genel terimi

$$A_n = \frac{n(4n-2)}{2}$$

şeklindedir.

Üçgensel ve altıgensel sayı dizilerinin ilişkisini gösteren çeşitli örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5)

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Diğer çokgensel sayıların genel terimlerini bulma çalışması yapılabilir.
- Tüm çokgensel sayıların genel terimlerini veren bir bağıntı bulma üzerine çalışmalar yapılabilir.
- Çokgensel sayılar üç boyutlu uzayda oluşturulabilir mi?
- Çokgensel sayıların genel terimlerini veren ifadelerin tümevarım yöntemi ile ispatları yapılabilir.

KAYNAKLAR

Büyükokutan, A., Çelik, S., Kemancı, B., Kemancı, Z., (2018) *Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik 12 Ders Kitabı*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Karaatlı, O. (2010). *Üçgensel Sayılar*, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.



Etkinlik Formu Cevapları

1. a. 441

b. n^2 2. $n + \ddot{U}_{n-1} = \ddot{U}_n$

3. a. 210

b. $\ddot{U}_{2n}$ 4. a. $9\ddot{U}_n + 1 = 9 \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{9n^2 + 9n + 2}{2} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} = \ddot{U}_{3n+1}$

$$\begin{aligned} \text{b. } (\ddot{U}_{n+1})^2 - (\ddot{U}_n)^2 &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right] \cdot \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2-n)}{2} \right] \cdot \left[\frac{(n+1)(n+2+n)}{2} \right] \\ &= \left[\frac{(n+1) \cdot 2}{2} \right] \cdot \left[\frac{(n+1)(2n+2)}{2} \right] \\ &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

5. $8\ddot{U}_n + 1 = 8 \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{8n^2 + 8n + 2}{2} = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 = D_{2n+1}$ 6. $A_n = \frac{n(4n-2)}{2} = \frac{(2n-1)(2n)}{2} = \ddot{U}_{2n-1}$

7. n. satırda bulunan ilk sayının n. altıgensel sayı olduğuna dikkat ediniz.

8. 7-Gensel Sayılar

9. 8-Gensel Sayılar

10. a. 84

b. $2n(n+1)$

11. a. 57

b. $\frac{n(3n+1)}{2}$

12. a. 41

b. $1+2 \cdot (n-1) \cdot n$

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Kontrol Listesi Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu

Üçgensel Sayılar

1. adım

2. adım

3. adım

4. adım

Dörtgensel
(Karesel) Sayılar

1. adım

2. adım

3. adım

4. adım

Beşgensel Sayılar

1. adım

2. adım

3. adım

4. adım

Altıgensel Sayılar

1. adım

2. adım

3. adım

4. adım

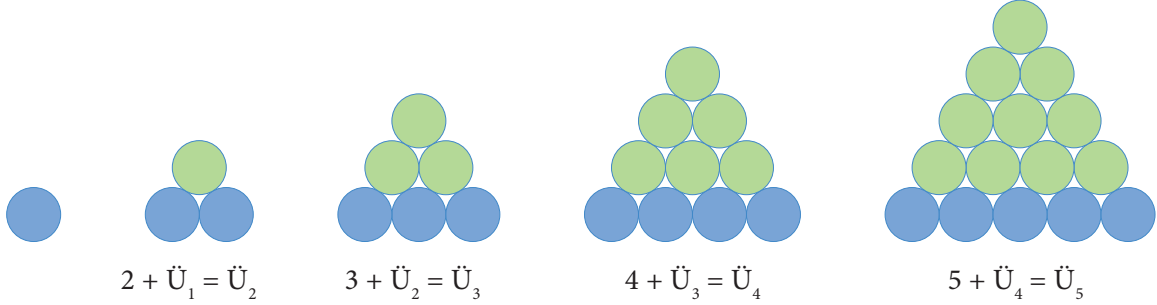
1. $\check{U}_n$: Üçgensel sayı dizisinin genel terimi (n . terimi) olmak üzere,

a. $\check{U}_{20} + \check{U}_{21}$ toplamının değeri kaçtır?

b. $\check{U}_{n-1} + \check{U}_n$ toplamının değeri nedir? Bu toplam kısaca nasıl ifade edilebilir?



2. Aşağıdaki görseli ifade eden genel bağıntıyı yazınız.

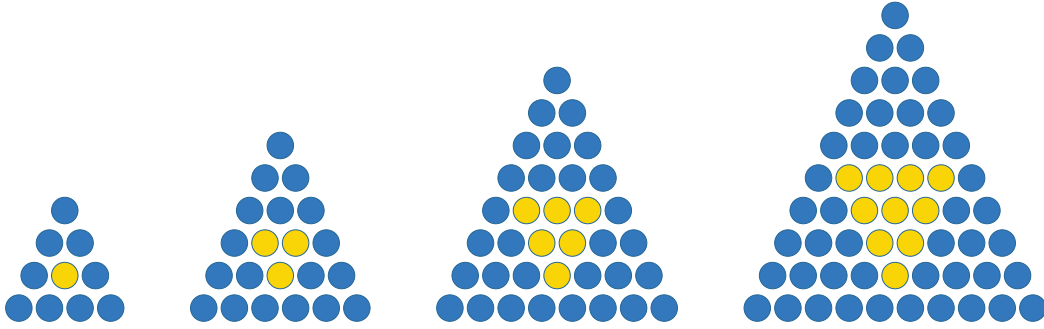


3. $\ddot{U}_n$: Üçgensel sayı dizisinin genel terimi (n . terimi) olmak üzere,

a. $\ddot{U}_9 + 3\ddot{U}_{10}$ toplamının değeri kaçtır?

b. $\ddot{U}_{n-1} + 3\ddot{U}_n$ toplamının değeri nedir? Bu toplam kısaca nasıl ifade edilebilir?

Aşağıdaki şekil bu ifadenin görsel ispatı olabilir mi?



4. $\ddot{U}_n$: Üçgensel sayı dizisinin genel terimi (n . terimi) olmak üzere,

a. $9\ddot{U}_n + 1 = \ddot{U}_{3n+1}$

b. $(\ddot{U}_{n+1})^2 - (\ddot{U}_n)^2 = (n+1)^3$ olduğunu gösteriniz.

5. Üçgensel sayı dizisinin genel terimi (n . terimi) $\ddot{U}_n$ ve dörtgensel (karesel) sayı dizisinin genel terimi (n . terimi) D_n olmak üzere, $8\ddot{U}_n + 1 = D_{2n+1}$ olduğunu gösteriniz.

6. Her altıgensel sayının bir üçgensel sayı olduğunu gösteriniz.

7. Aşağıdaki eşitliklerden yola çıkarak altıgensel sayılar hakkında bir genelleme yapılabilir mi?

$$1^2 = 1^2$$

$$6^2 + 7^2 = 9^2 + 2^2$$

$$15^2 + 16^2 + 17^2 = 19^2 + 20^2 + 3^2$$

$$28^2 + 29^2 + 30^2 + 31^2 = 33^2 + 34^2 + 34^2 + 4^2$$

...

8. Birler basamağı 7 olan bir sayı için tablodaki adımlar uygulanırsa çıkan son sayılar hakkında ne söyleyebilirsiniz?

X	7	17	27	37	47	57	...
Karesi	49	289	729	1369	2209	3249	...
9 eksiği	40	280	720	1360	2200	3240	...
40'a bölümü	1	7	18	34	55	81	...

9. En büyüğü 3'ün katı olan ardışık üç sayının çarpımlarının toplamlarına oranı hangi çokgensel sayılarla ilişkilendirilebilir.

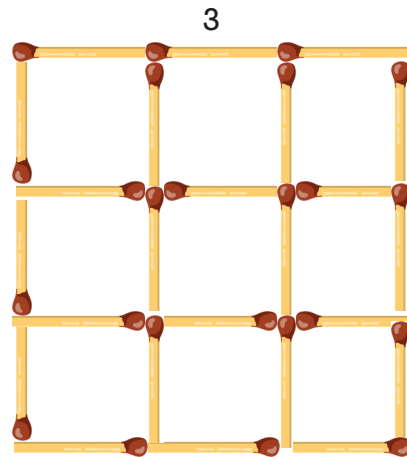
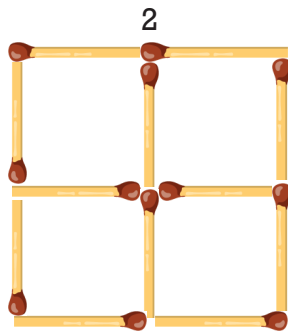
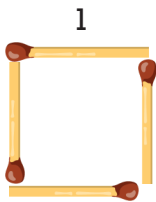
$$1 \times 2 \times 3 / (1 + 2 + 3) = 1$$

$$4 \times 5 \times 6 / (4 + 5 + 6) = 8$$

$$7 \times 8 \times 9 / (7 + 8 + 9) = 21$$

$$10 \times 11 \times 12 / (10 + 11 + 12) = 40$$

10. Şekilde karelerden oluşmuş bir örüntünün ilk üç adımı verilmiştir.



- a. Altıncı adımda kaç tane kibrit çöpü vardır.
b. n. adımda kaç tane kibrit çöpü kullanıldığını veren bir genelleme yapabilir misiniz?



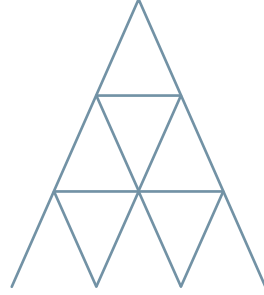
11. Şekildeki oyun kartları eşit uzunluktaki çizgilerden oluşmuş olup örüntünün ilk üç adımı verilmiştir.



1. adım



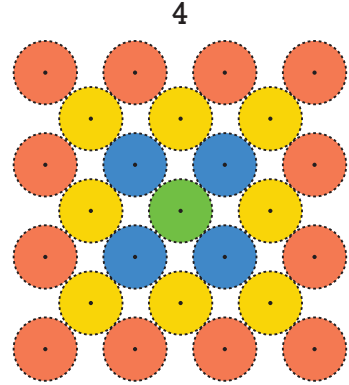
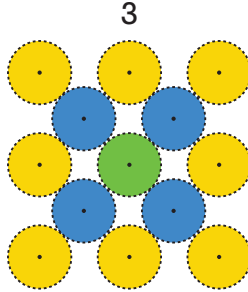
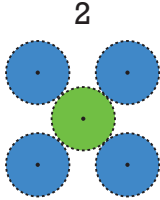
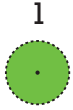
2. adım



3. adım

- a. Altıncı adımda eşit uzunluktaki çizgilerden kaç tane vardır?
b. n. adım için eşit uzunluktaki çizgi sayısını veren bir genelleme yapabilir misiniz?

12. Şekilde dairelerden oluşmuş bir örüntünün ilk dört adımı verilmiştir.



- a. Beşinci adımda kaç tane daire vardır?
b. n. adımdaki daire sayısını veren bağıntıyı bulunuz.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

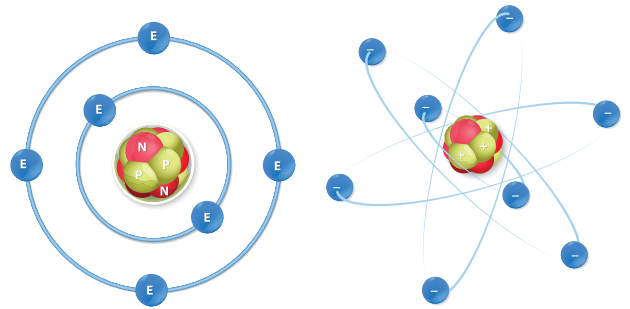
ETKİNLİK ADI	: ÜSLÜ SAYILAR
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Üslü ve Köklü Sayılar
KAZANIMLAR	: 1. Üslü ifadelerle ilgili temel kuralları ispatlar. 2. Farklı disiplinlerde kullanılan çok büyük ve çok küçük sayıları bilimsel gösterimle ifade ederek karşılaştırır.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Öğrencilerin; tam sayıların, tam sayı kuvvetlerini hesaplaması ve üslü ifadelerle ilgili temel kuralları uygulaması ve birbirine denk ifadeler oluşturması amaçlanmaktadır. Verilen bir sayının 10'un tam kuvvetlerini kullanarak yazılması hedeflenmektedir. a , 1 veya 1'den büyük 10'dan küçük bir sayı ve n bir tam sayı olmak üzere $a \times 10^n$ gösteriminin "bilimsel gösterim" olarak ele alınmasına yönelik çalışmalara yer verilir.

Başlarken...

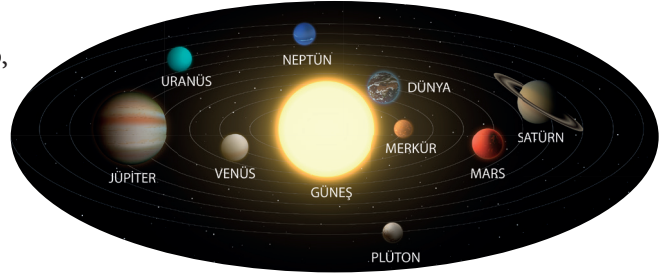
"Bir bahçede 3 ağaç, her ağacın 3 dalı, her dalda 3 kuş, her kuşun 3 yuvası olduğuna göre bu bahçede kaç kuş yuvası vardır?" Bu sorunun cevabını $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ olarak hesaplayabiliriz. Peki "Bir izci kampına 7 ülkeden, her ülkenin 7 tane şehrinden, her şehirden 7 tane öğrenci gelmiştir. Her öğrencinin 7 tane çantası, her çantada 7 tane kitap, her kitapta 7 sayfa, her sayfada 7 resim, her resimde 7 şeker bulunmaktadır. Bu kampta kaç şeker resmi vardır?" diye sorulduğunda $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^8$ şeklinde göstermeyi tercih ederiz. Sayıların sonsuz olduğunu biliyoruz. Peki isimlendirilmiş en büyük sayı kaçtır? Bir googol = 10^{100} sayısını ifade etmektedir. Bir googolpleks = $10^{10^{100}}$ sayısını ifade etmektedir. Bir Googolpleks sayısı o kadar çok yer kaplar ki en küçük yazıyla bile yazılsa dünyada bu sayıyı yazmaya yetecek kadar kâğıt yoktur. Arama motoru Google'ın isminin de goo-



Karbon atomu



gol sayısından geldiği bilinmektedir. Astronomi, tıp, mühendislik gibi alanlarda çok büyük ve çok küçük sayıların yazımında üslü sayıları kullanırız. Bir karbon atomunun büyüklüğü ya da Güneş Sistemi'nin büyüklüğü yaklaşık olarak kaç metredir?



“Bir kültürdeki bakteri sayısı her 1 saatlik süre sonucunda iki katına çıkmaktadır. Başlangıçta 2 tane bakterinin bulunduğu bu kültürde 3 saatin sonunda kaç bakteri olur?” sorusu öğrencilere yönlendirilir. Başlangıçta 2 bakteri vardır. 1 saat sonra $2 \cdot 2 = 2^2$, 2 saat sonra $2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, 3 saat sonra $2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ olur.

TANIM

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n tane a sayısının çarpımı $\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ tane}} = a^n$ ile gösterilir. a^n ifadesinde n üs ya da **kuvvet** a ise **tabandır**. a^n ifadesi “**a’nın n. kuvveti**” veya “**a üssü n**” diye okunur.

Çarpımları üslü olarak ifade etme ile ilgili örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 1).

“1’in onuncu kuvveti kaçtır? 1’in on milyonuncu kuvveti kaçtır?” gibi sorularla 1’in tüm kuvvetlerinin 1 olduğu fark ettirilir.

“2¹ kaçtır? 1,000,000¹ kaçtır?” gibi sorularla tüm sayıların birinci kuvveti kendisi olduğu fark ettirilir.

TANIM

$a, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $1^n = 1$ ve $a^1 = a$ ’dır.

Etkinlik Formu Soru 2

Aşağıdaki tabloyu doldurarak negatif sayıların üsleri ve ifadenin değeri arasında bir ilişki bulunuz.

İfade	Üs	Çarpım Şeklinde İfadesi	Değeri
$(-2)^2$	2	$(-2) \cdot (-2)$	4
$(-2)^3$	3	$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$	-8
$(-2)^4$	4	$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$	16
$(-2)^5$	5	$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$	-32

Üslü sayıların negatif kuvvetleri ile ilgili örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 2).

" -2^4 ve $(-2)^4$ birbirine eşit midir?" sorusu ile negatif sayıların kuvvetleri ile ilgili farklara dikkat çekilir ve negatif sayıların çift kuvvetleri ile ilgili genellemeye ulaşılması istenir.

TANIM

$a \in \mathbb{R}^+$ ve n çift sayı olmak üzere; $(-a)^n = a^n$ dir. Negatif sayıların çift kuvvetleri pozitiftir.

Üslü sayılarla ilgili çeşitli örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 3).

Üslü Sayılarda Toplama ve Çıkartma İşlemi

TANIM

Hem tabanı hem de üssü aynı olan üslü sayılar, ortak paranteze alınarak toplanabilir veya çıkartılabilir.

$a, b, c, x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$a \cdot x^m + b \cdot x^m - c \cdot x^m = (a + b - c) \cdot x^m \text{ olur.}$$

Örnek: $2^{10} + 2^9 - 2^8 = 2^2 \cdot 2^8 + 2^1 \cdot 2^8 - 2^8 = (2^2 + 2^1 - 2^0) \cdot 2^8 = 5 \cdot 2^8$ olarak bulunur.

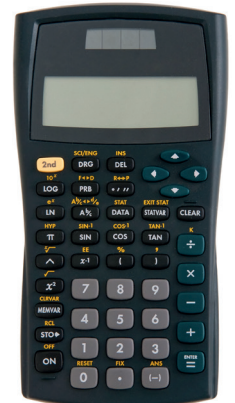
Üslü Sayılarda Çarpma İşlemi



Fonksiyonel bir hesap makinası kullanarak üslü sayılar hesaplanabilir. Örneğin 5^8 sayısı hesaplanırken 5^8 tuşlarına basılarak işlemler yapılır. Çeşitli üslü ifadelerin hesaplandığı örneklere yer verilir.

- Daha sonra hesap makinasındaki x tuşu bozulur. 5^8 sayısının 8 adet 5'in çarpılmasından daha kısa bir yöntemle hesaplanabilir mi diye tartışılır. Öğrencilerin x^2 tuşunu fark ederek $5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$ işlemini yaptığında 5^8 elde edilebileceği keşfettirilir.

O hâlde $5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^8$ olduğu görülür. Örnekler çeşitlendirilerek üslü sayılarda çarpma işleminin genel kuralı elde edilir.





Tabanları aynı olan üslü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken taban aynen yazılır, üsler toplanıp tabanın üssü olarak yazılır. $a \in \mathbb{R}$ ve $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ dir.

- b. Öğrencilere 4 adet 5^2 'ni çarpmaktan daha kısa bir yol olup olmayacağı sorulur. Öğrencilerin $(5^2 \cdot 5^2) = (5^2)^2 = 5^4$ olduğunu keşfetmeleri istenir.

Dolayısıyla $5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5^2)^2 \cdot (5^2)^2 = ((5^2)^2)^2 = 5^8$ olduğundan daha kısa bir yoldan elde edebilirler.

Üslü ifadenin kuvveti alınırken taban aynen yazılır, kuvvetler çarpımı da üs olarak yazılır. $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ dir.

- c. $3^5 \cdot 5^5$ işlemini yapalım. $3^5 \cdot 5^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$ şeklinde ifade edilir. $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^5$ olarak yazılır. Hesap makinasında bu işlem yapılmak istendiğinde eğer üsler ortaksa önce çarpma işlemi yapılarak daha sonra üs alınabilir.

Tabanları farklı ve üsleri aynı olan üslü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken tabanlar çarpılır, taban olarak yazılır. Ortak olan üs aynen yazılır. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ dir.

Negatif Üs Alma



4 adet A4 kâğıdı alınız. Her defasında yarısını alarak aşağıdaki gibi bir örüntü oluşturunuz. Oluşturulan örüntüdeki üsler ile sayılar arasındaki ilişkiyi gözlemleyiniz.

4	2	1	1/2	1/4
2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}

Bir üslü ifadenin pay ve paydası yer değiştirildiğinde üssün işareti değişir. $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 'dir.

Etkinlik içerisinde bir sayının sıfırıncı kuvvetine dikkat çekilerek $2^0 = 1$ olduğu görülür. Sıfır dışında bir sayının sıfırıncı kuvveti sayının kendisi ile bölünmesi anlamına gelmektedir dolayısıyla her zaman 1'dir.

$a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $a^0 = 1$ 'dir.

Örnek:

$(x - 2)^{2x^2 - 8} = 1$ denkleminin kaç kökü vardır?

Çözüm:

- $x - 2 = 1$ ve $2x^2 - 8 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = 3$ olur.
- $x - 2 \neq 0$ ve $2x^2 - 8 = 0$ olmak üzere $2(x - 2)(x + 2) = 0$ eşitliğinden $x = 2$ ve $x = -2$ olur. Ancak $x - 2 \neq 0$ olduğundan $x = -2$ olur.
- $x - 2 = -1$ ve $2x^2 - 8$ çift olmak üzere $x = 1$ olur. Öyleyse 3 çözüm vardır.

Üslü sayılarla ilgili çeşitli örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 4, 5).

Üslü Sayılarda Bölme İşlemi



- a. Uzun kenarının uzunluğu 3^4 , kısa kenarının uzunluğu 3^3 olan dikdörtgen şeklindeki arsa bir kenarı 3^2 olan kare şeklindeki alanlara bölünecektir. Kaç adet kareye bölüneceğini bulmak için büyük alanın küçük alana bölünmesi gerektiği fark ettirilir. Daha sonra üslü sayılarda bölme işlemi yapılır.

$$\frac{3^4 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 3^2} = \frac{3^7}{3^4} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^3 \text{ olarak bulunur.}$$



Tabanları aynı olan üslü ifadelerde bölme işlemi yapılırken taban aynen yazılır, payın üssünden paydanın üssü çıkarılıp ortak tabanın üssü olarak yazılır. $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ dir.

- b. Bir kenarının uzunluğu 10^2 olan kare şeklindeki arsa bir kenarı 5^2 olan kare şeklindeki alanlara bölünecektir. Kaç adet kareye bölüneceğini bulmak için büyük alanın küçük alana bölünmesi gerektiği fark ettirilir. Daha sonra üslü sayılarda bölme işlemi yapılır.

$$\frac{10^2 \cdot 10^2}{5^2 \cdot 5^2} = \frac{10^4}{5^4} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} = 2^4 \text{ olarak bulunur.}$$

$$a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ dir.}$$

Üslü sayılarla ilgili çeşitli örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 6).

Üslü sayılarla ilgili verilen yapboz kesilerek öğrencilere dağıtılır ve birbirine eşit olan kenarları eşleştirerek yapbozu tamamlaması sağlanır. (Bu etkinliğe ait Üslü Sayılar Yapbozu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.)

Ondalık Sayıların Çözümlemesi

Etkinlik Formu Soru 7

10 sayısının kuvvetlerini aşağıdaki tablo yardımı ile doldurunuz. Tabloda aşağı doğru giderken her basamakta 10'a böldüğünüzü düşünerek bir örüntü oluşturunuz.

10'un Tam Sayı Kuvvetleri	Değeri	Adı
10^4	10000	On binler basamağı
10^3	1000	Binler basamağı
10^2	100	Yüzler basamağı
10^1	10	Onlar basamağı
10^0	1	Birler basamağı
10^{-1}	$\frac{1}{10} = 0,1$	Onda birler basamağı
10^{-2}	$\frac{1}{100} = 0,01$	Yüzde birler basamağı
10^{-3}	$\frac{1}{1.000} = 0,001$	Binde birler basamağı
10^{-4}	$\frac{1}{10.000} = 0,0001$	On binde birler basamağı

Ondalık gösterimle verilmiş bir sayının çözümlemesi yapılırken 10'un tam sayı kuvvetleri kullanılarak basamak değerlerinin toplamı biçiminde yazılır. Örneğin;

$$5678,1234 = 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}$$

Ondalık sayıların çözümlemesi ile ilgili örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 8).

Örnek

Etkinlik Formu Soru 9

$4^{17} \cdot 125^9$ sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm:

$4^{17} \cdot 125^9 = 2^{34} \cdot 5^{27} = 2^7 \cdot 2^{27} \cdot 5^{27} = 2^7 \cdot 10^{27} = 128 \cdot 10^{27}$ olduğuna göre 128 sayısı 3 basamaklı olup yanında 27 tane 0 olduğundan 30 basamaklı bir sayıdır.

Çok Büyük ve Çok Küçük Sayılar

34 500 000 000 000 sayısını 1 ile 10 arasında bir sayı ile 10'un kuvveti olan bir sayının çarpımı şeklinde yazalım. $1 \leq 3,45 < 10$ olacak şekilde oluşturup 10'un kuvveti ile çarpım şeklinde $3,45 \cdot 10^{13}$ olarak yazabiliriz.

Üslü sayılarla ilgili örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 10-13)

TANIM

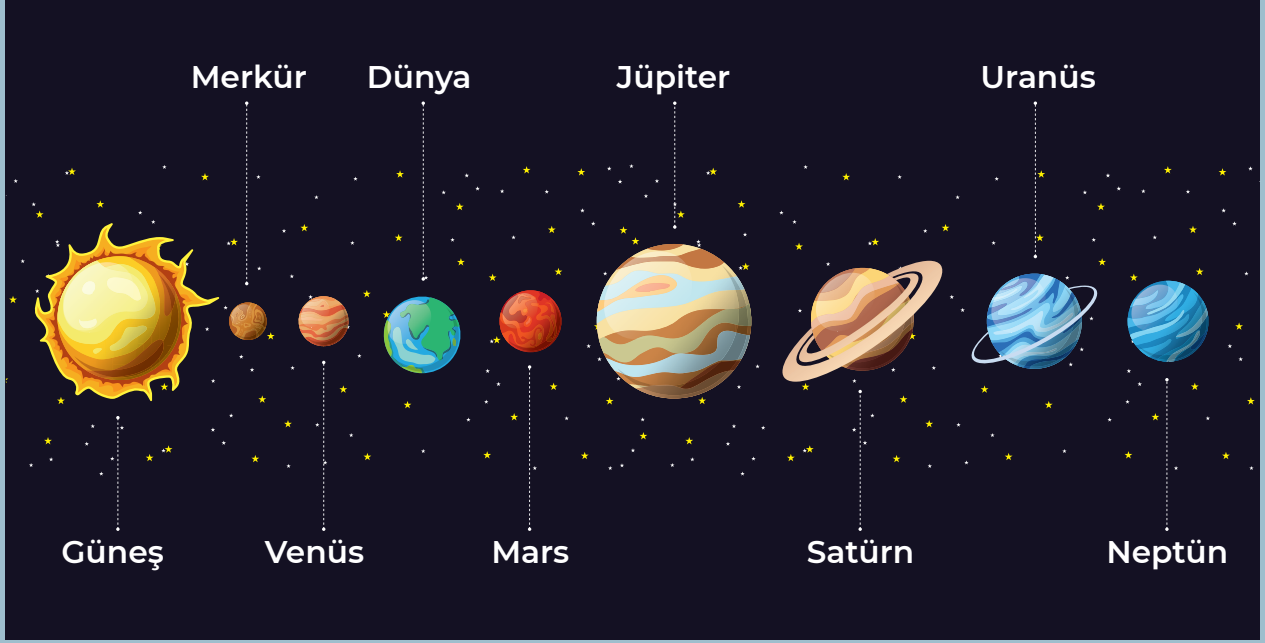
Tanım: $|a|$, 1 veya 1'den büyük, 10'dan küçük bir gerçek sayı ve n bir tam sayı olmak üzere $a \cdot 10^n$ gösterimine **bilimsel gösterim** denir.

Etkinlik Formu Soru 14

Öğrenciler iki gruba ayrılır. Birinci grup Gezegenler takımıdır. Güneş Sistemi'ni araştırarak gezegenlerin Güneş'e olan uzaklıklarını araştırma yaparak bulurlar ve birinci tabloyu doldururlar. Gezegenlerin Güneş'e uzaklıkları çok büyük sayılar olduğu için yaklaşık $1,5 \times 10^{11}$ metreye denk gelen 1 Astronomik Birim kullanılır. İkinci grup da Atomlar takımıdır. Tabloda verilen atomların kütlelerini araştırma yaparak bulurlar ve ikinci tabloyu doldururlar. Atomların kütleleri çok küçük sayılar olduğu için yaklaşık $1,67 \times 10^{-24}$ grama denk gelen 1 Atomik Kütle Birimi kullanılır. Daha sonra tablodaki değerlerin üslü gösterimleri ile ilgili tartışmalar yaparlar.

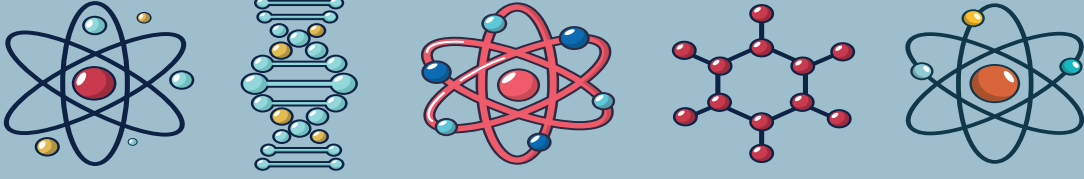


Gezegenler Takımı



Gezegen Adı	Güneş'e Uzaklık (AB) (1 AB= 1.5×10^{11} m)	Bilimsel Gösterimi (m)
Merkür	0.387	5.805×10^{10}
Venüs	0.723	1.0845×10^{11}
Dünya	1	1.5×10^{11}
Mars	1.523	2.2845×10^{11}
Jüpiter	5.202	7.803×10^{11}
Satürn	9.271	1.39065×10^{12}
Uranüs	19.194	2.8791×10^{12}
Neptün	30.066	4.5099×10^{12}

Atomlar Takımı



Atom Adı	Kütlesi (akb) (1 akb = 1.67×10^{-24} g)	Bilimsel Gösterimi (g)
Hidrojen	1.01	1.6867×10^{-24}
Oksijen	15.99	2.67033×10^{-23}
Karbon	12.01	2.00567×10^{-23}
Alüminyum	26.98	$4.5507166 \times 10^{-23}$
Demir	55.84	9.32528×10^{-23}
Çinko	65.38	1.091846×10^{-22}
Magnezyum	24.30	4.0581×10^{-23}
Bor	10.81	1.80527×10^{-23}

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- İsmlendirilen çok büyük sayıları araştırınız.
- Bilişim teknolojilerinde 2'nin kuvvetleri nasıl kullanılmaktadır? Araştırınız.
- A4 kâğıdının boyutlarını ve diğer A1, A2, ..., A10 kâğıtlarıyla ilişkisini araştırınız.
- Atomik kütle birimi ve astronomi biriminin nasıl elde edildiğini ve kullanım alanlarını araştırınız.
- Avagadro sayısını araştırınız.

KAYNAKLAR

Bayındır S. (2009). *Mol Kavramı*. Bingöl Üniversitesi. <http://www.bingol.edu.tr/documents/V%20Hafta.pdf> (Erişim Tarihi: 06.07.2021).

Boudreaux K. A. *Atomic Masses*. Department of Chemistry, Angelo State University https://www.angelo.edu/faculty/kboudrea/periodic/structure_mass.htm (Erişim Tarihi: 06.07.2021).

Demirkol G., Yaman A. (2012) *Şehrazat'ın 101 Oyunu*. Nesin Yayınevi.



- Frith A. Lacey M. Gillespie L. J. (2012). *Matematik Bize Ne Anlatıyor?*. TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları.
- Koller D. (Ocak, 2004). *Origin of the name “Google”* https://graphics.stanford.edu/~dk/google_name_origin.html (Erişim Tarihi: 05.07.2021)
- MEB (Ocak, 2020). *2019-2020 Öğretim Yılı Sınavla Öğrenci Alacak Ortaöğretim Kurumlarına İlişkin Merkezî Sınava Yönelik Ocak Ayı Örnek Soruları*. https://odsgm.meb.gov.tr/kurslar/pdf/ornek/1920/2020_01_OCAK_ORNEKSORULAR_SAY.pdf (Erişim Tarihi: 05.07.2021)
- ÖSYM (2002). *ÖSS Matematik Soru ve Cevapları*. <https://www.osym.gov.tr/Eklenti/1208,oss2002matematikpdf.pdf?0> (Erişim Tarihi: 06.07.2021)
- ÖSYM (2021). *Temel Yeterlilik Testi (Tyt) Soru ve Cevapları*. https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2021/YKS/TSK/tyt_yks_2021.pdf (Erişim Tarihi: 14.07.2021)
- Selam S. O. (2007). *Güneş Sistemi Tanımlar, Genel Bilgi, Güneş Sistemimizin Oluşumu Dersi Açık Ders Notları*. https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/23882/mod_resource/content/1/A207dersnotu_01.pdf (Erişim Tarihi: 6.07.2021)

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu’na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. OKULDABULUŞALIM

2. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

3.

$(-3)^4 =$	81	$-3^4 =$	-81	$(-5)^3 =$	-125
$(-1)^{100} =$	1	$(-1)^{101} =$	-1	$-1^{100} =$	-1
$(-11)^1 =$	-11	$(-7)^2 =$	49	$(-10)^2 =$	100

4.

$2^{-3} =$	$1/8$	$(-4)^{-4} =$	$1/256$	$2^3 \cdot 2^5 =$	2^8
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$	$\frac{27}{8}$	$-4^{-4} =$	$-1/256$	$(3^{-1})^{-4} =$	3^4
$(11)^0 =$	1	$(-1)^{-9} =$	-1	$(5^3 \cdot 5^2)^4 =$	5^{20}
$2^{17} \cdot 2^{-2} =$	2^{15}	$(-2)^4 \cdot (5)^4 =$	10^4	$-9^3 \cdot (-9)^4 =$	-9^7

5. 8

6. 16

7. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

8. 14

9. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

10. $A = (10^9 - 1)$ olarak yazılırsa $A^2 = 999.999.998.0000.000.001$ olur. Cevap:81

11. 14

12. -2

13. $x = -25, y = -21, z = -19, t = -27$

14. Etkinlik içerisinde verilmiştir.



Etkinlik Formu

1. Tuşlu bir cep telefonu ile haberleşen Uğur ve Ahmet yazmak istedikleri her harf için harfin üzerinde yazılı olduğu tuşa harfin sırası kadar basması gerekmektedir. Örneğin “E” harfi yazacak ise 3 tuşuna 2 defa basmalıdır ve bunu 3^2 ile ifade eder. Haberleşmelerini yazılı olarak ifade etmek isteyen Uğur aşağıdaki ifadeyi oluşturmuştur. Burada ne yazmaktadır?



6^3	5^2	8^2	5^3	3^1	2^1	2^2	8^2	5^3	8^2	7^4	2^1	5^3	4^3	6^1

2. Aşağıdaki tabloyu doldurarak negatif sayıların üsleri ve ifadenin değeri arasında bir ilişki bulunuz.

İfade	Üs	Çarpım Şeklinde İfadesi	Değeri
$(-2)^2$			
$(-2)^3$			
$(-2)^4$			
$(-2)^5$			

3. Aşağıda verilen üslü ifadelerin değerini bulunuz.

$(-3)^4 =$		$-3^4 =$		$(-5)^3 =$	
$(-1)^{100} =$		$(-1)^{101} =$		$-1^{100} =$	
$(-11)^1 =$		$(-7)^2 =$		$(-10)^2 =$	

4. Aşağıda verilen üslü ifadelerin değerini bulunuz.

$2^{-3} =$		$(-4)^{-4} =$		$2^3 \cdot 2^5 =$	
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$		$-4^{-4} =$		$(3^{-1})^{-4} =$	
$(11)^0 =$		$(-1)^{-9} =$		$(5^3 \cdot 5^2)^4 =$	
$2^{17} \cdot 2^{-2} =$		$(-2)^4 \cdot (5)^4 =$		$-9^3 \cdot (-9)^4 =$	

5. $\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \right)^{\frac{1}{2}}$ işleminin sonucu kaçtır? (2002-ÖSS)

6. Derin, bilgisayarına her bir 2^8 MB olan fotoğraflardan 16 adet yüklemiştir. Daha sonra bu fotoğrafları 8 GB'lık boş bir belleğe aktarmıştır. Bellekte boş kalan alana kaç adet daha fotoğraf yükleyebilir? (1 GB = 2^{10} MB)
7. 10 sayısının kuvvetlerini aşağıdaki tablo yardımı ile doldurunuz. Tabloda aşağı doğru giderken her basamakta 10'a böldüğünüzü düşünerek bir örüntü oluşturunuz.

10'un Tam Sayı Kuvvetleri	Değeri	Adı
10^4		
10^3		
10^2		
10^1		
10^0		
10^{-1}		
10^{-2}		
10^{-3}		
10^{-4}		



8. Bülent Öğretmen bir sınıfa eşit sayıda bitter çikolatalı ve beyaz çikolatalı gofret getirip tahtaya bu gofretlerin birer tanesinde bulunan gram cinsinden yağ miktarlarını yazmıştır.

Bitter Çikolatalı Gofrette Bulunan Yağ Miktarı (gram)	Beyaz Çikolatalı Gofrette Bulunan Yağ Miktarı (gram)
2,043	2,702

Bülent Öğretmen öğrencilerine;

“Hangi gofretten almak istiyorsanız o gofrette bulunan gram cinsinden yağ miktarını çözümleyerek bir kâğıda yazıp bana verin. Herkese, çözümlemesini doğru olarak yazdıkları gofretlerden birer tane vereceğim.” der.

Aşağıda öğrencilerin verdiği cevaplar ile ilgili bilgiler verilmiştir.

- 9 öğrenci: $2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$
- 8 öğrenci: $2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$
- 6 öğrenci: $2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$
- 7 öğrenci: $2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-3}$

Bu cevaplara göre gofretleri dağıtan Bülent Öğretmen’de 13 tane bitter çikolatalı gofret kalmıştır. Buna göre Bülent Öğretmen’de kaç tane beyaz çikolatalı gofret kalmıştır? (2020-LGS Örnek Soru)

9. $4^{17} \cdot 125^9$ sayısı kaç basamaklıdır?
10. $A = 999.999.999$ ise A^2 sayısının rakamları toplamı kaçtır?
11. n bir doğal sayı olmak üzere, $\frac{10^n - 22}{3}$ doğal sayısının rakamları toplamı 44’tür. Buna göre n kaçtır? (2021-TYT)
12. $(0,027) = (0,3)^{1-x}$ olduğuna göre x kaçtır?
13. $3 \cdot 10^{-23} = 300 \cdot 10^x = 0,03 \cdot 10^y = 0,0003 \cdot 10^z = 30000 \cdot 10^t$ ifadesindeki x, y, z, t ’yi bulunuz.

14.

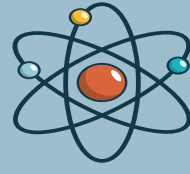
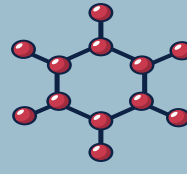
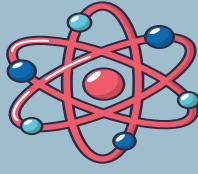
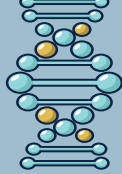
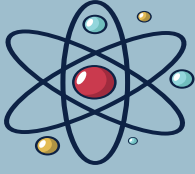


Gezegen Adı	Güneş'e Uzaklık (AB) (1 AB= 1.5×10^{11} m)	Bilimsel Gösterimi (m)
Merkür		
Venüs		
Dünya		
Mars		
Jüpiter		
Satürn		
Uranüs		
Neptün		



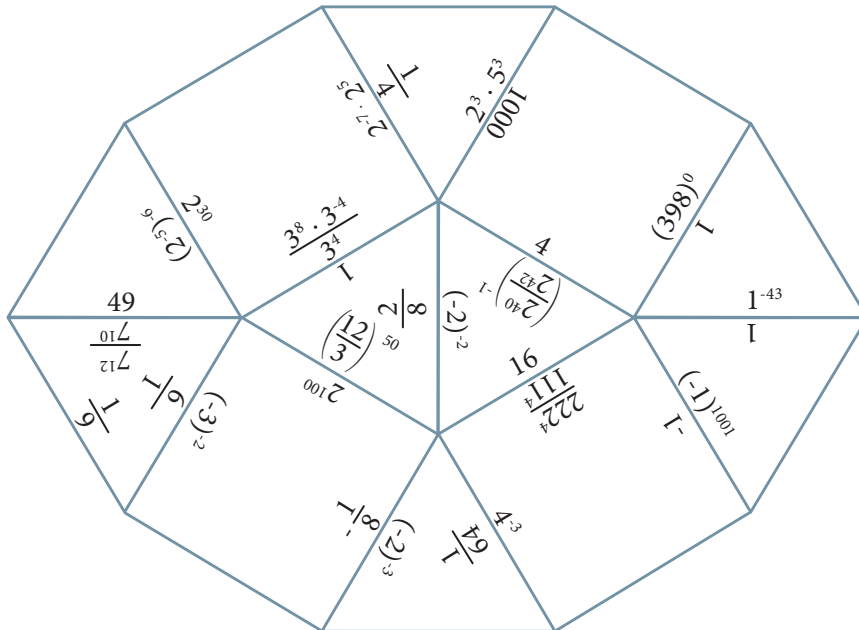
15.

Atomlar Takımı



Atom Adı	Kütlesi (akb) (1 akb = 1.67×10^{-24} g)	Bilimsel Gösterimi (g)
Hidrojen		
Oksijen		
Karbon		
Alüminyum		
Demir		
Çinko		
Magnezyum		
Bor		

Üslü Sayılar Yapbozu





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: KÖKLÜ SAYILAR
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Üslü ve Köklü Sayılar
KAZANIMLAR	: Bir gerçekte sayının rasyonel kuvvetini açıklar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

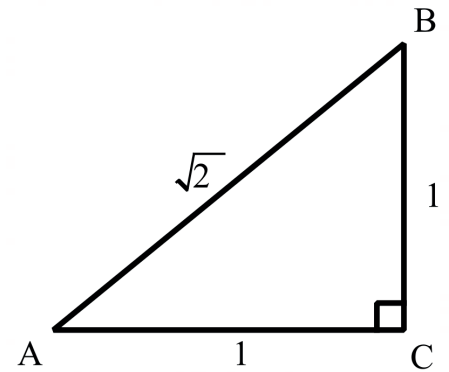
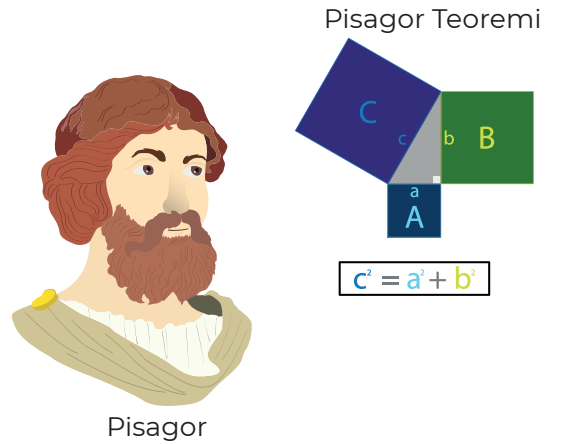
Etkinliğin Amacı

Öğrencilerin üslü sayılar ile köklü sayılar arasındaki ilişkiyi fark etmesi amaçlanmıştır. Karekök alma işleminin yapılması hedeflenmektedir. İrrasyonel sayıların yaklaşık değerini bulma ile ilgili algoritma oluşturma çalışmalarına yer verilir.

Başlarken...

Geometri tarihsel olarak yeni sayılar için bir kaynak olmuştur. Pisagor tüm dik açılı üçgenlerdeki “Hipotenüsün karesinin diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşit olduğu” ilkesini bularak evrensel bir gerçeği ortaya koymuştur ve bu buluş Pisagorcular tarafından ilahi bir güç olarak görülmüştür. Bir dik açılı üçgenin dik kenarları 3 ve 4 olduğunda $3^2 + 4^2 = 5^2$ eşitliği sağlandığından hipotenüs 5 olur. Tüm sayıların bu şekilde rasyonel olduğunu güçlü bir şekilde savunan Pisagor’a bir gün öğrencisi Hippasus dik kenarları 1 olan bir dik üçgenin hipotenüsünün kaç olacağını sormuş.

Bu sorunun cevabını rasyonel sayılarda bulamayan Pisagor’dan öğrencileri şüphe duymaya başlamış ve rasyonel olmayan sayıların varlığını bir türlü kabul etmek istemeyen Pisagor, Hippasus’u cezalandırmış. Ancak bu çözüm irrasyonel sayıların varlığının yayılmasını engelleyememiş. Pisagor teoremi uygulandığında kenarları 1 olan dik üçgenin hipotenüsü kaçtır?



**Etkinlik Formu Soru 1**

Aşağıda alanları verilen kare şeklindeki arsaların bir kenar uzunluklarını bulunuz.

Alanı	Üslü İfadesi	Bir Kenar	Alanı	Üslü İfadesi	Bir Kenar
49	7^2	7	0,25	$(0,5)^2$	0,5
64	8^2	8	0,36	$(0,6)^2$	0,6
81	9^2	9	1,21	$(1,1)^2$	1,1

Alanı verilen karenin bir kenarını bulurken alanın hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemi yapılır. Bu işlem karekök alma işlemidir ve $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$ şeklinde bulunur.

TANIM

Negatif olmayan bir sayının hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemine **karekök alma** denir. Karekök “ $\sqrt{\quad}$ ” sembolü ile gösterilir.

Tam kare ifadelerin kareköklerini bulmaya yönelik örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 2).

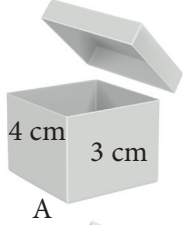
İrrasyonel Sayılar Kümesi**TANIM**

a ve b tam sayılar ve b sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir. İrrasyonel sayılar kümesi “ Q ” simgesi ile gösterilir.

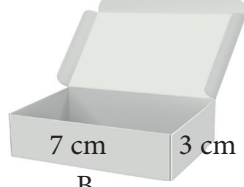
Örnek olarak $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$ sayıları verilebilir. $Q \cap Q' = \emptyset$ ’dir.

Tam Kare Olmayan Kareköklü Sayıların Yaklaşık Değerini Belirleme**Etkinlik Formu Soru 3**

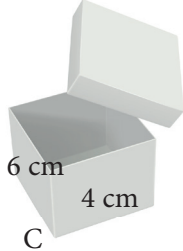
Aşağıdaki kutuların içerisine yatay olarak sığabilecek en büyük boydaki kalem kaç cm olur? Önce tahmin ediniz daha sonra hesap makinası kullanarak hesaplayınız.



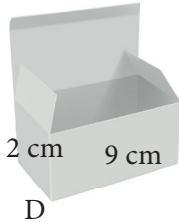
A



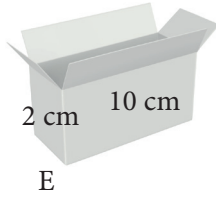
B



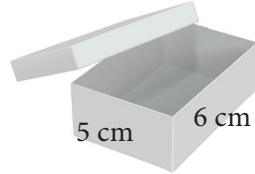
C



D



E



F

$$A: \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm olur.}$$

$$B: \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58} \approx 7,6 \text{ cm olur.}$$

$$C: \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \approx 7,2 \text{ cm olur.}$$

$$D: \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85} \approx 9,2 \text{ cm olur.}$$

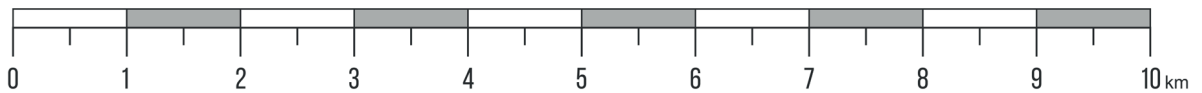
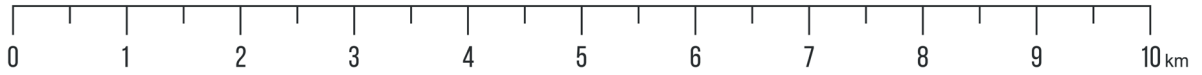
$$E: \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} \approx 10,1 \text{ cm olur.}$$

$$F: \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \approx 7,8 \text{ cm olur.}$$



Aşağıdaki sayıların sayı doğrusu üzerindeki yerlerini tahmin etmeye çalışın. Virgülden sonraki 1 basamağı bulmaya çalışın.

$$A = \sqrt{18}, B = \sqrt{38}, C = \sqrt{15}$$





Sayıların en yakınındaki tam kare ifadelere bakılmalıdır.

- $A = \sqrt{18}$ sayısı $\sqrt{16}$ ile $\sqrt{25}$ arasındadır. Bu yüzden $4 < \sqrt{18} < 5$ şeklinde yazılır ve $18 - 16 < 25 - 18$ olduğundan 4 ile 5 arasında ve 4'e daha yakın bir yeredir. O hâlde, $4,2^2 = 17,64$ ve $4,3^2 = 18,49$ 'dur. $4,2 < \sqrt{18} < 4,3$ olduğundan $\sqrt{18} \approx 4,2$ olarak bulunur.
- $B = \sqrt{38}$ sayısı $\sqrt{36}$ ile $\sqrt{49}$ arasındadır. Bu yüzden $6 < \sqrt{38} < 7$ şeklinde yazılır ve $38 - 36 < 49 - 38$ olduğundan 6 ile 7 arasında ve 6'ya daha yakın bir yeredir. O hâlde, $6,1^2 = 37,21$ ve $6,2^2 = 38,44$ 'tür. $6,1 < \sqrt{38} < 6,2$ olduğundan $\sqrt{38} \approx 6,1$ olarak bulunur.
- $C = \sqrt{15}$ sayısı $\sqrt{9}$ ile $\sqrt{16}$ arasındadır. Bu yüzden $3 < \sqrt{15} < 4$ şeklinde yazılır ve $16 - 15 < 15 - 9$ olduğundan 3 ile 4 arasında ve 4'e daha yakın bir yeredir. O hâlde, $3,8^2 = 14,44$ ve $3,9^2 = 15,21$ 'dir. $3,8 < \sqrt{15} < 3,9$ olduğundan $\sqrt{15} \approx 3,8$ olarak bulunur.

Tam kare olmayan kareköklü sayıların yaklaşık değerini belirleme ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 4, 5).

Tam kare olmayan kareköklü sayıların yaklaşık değerini belirlemek için tarih boyunca farklı çalışmalar yapılmıştır. Babillerin MÖ 1800-1600 yılları arasındaki kil tabletinde birim karenin köşegeninin uzunluğunu $1^{\circ}24'51''10'''$ olarak hesaplamışlardır. 60'lık taban kullanan Babillerin bu hesabı onluk tabanda;

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,4142129629629...$$

olarak bulunur ve bu değer $\sqrt{2}$ 'nin yaklaşık değeridir.

“Sizce hesap makinaları karekökleri hesaplamak için nasıl bir algoritma kullanmaktadırlar?” “Tüm sayıların kareköklerinin hafızalarında kayıtlı olabileceğini düşünüyor musunuz?” soruları ile öğrencilerin karekök hesaplama algoritmaları üzerinde düşünmeleri sağlanır.

Kareköklü sayıları hesaplamada hesap makinalarının da kullandığı tekraralama algoritmasının temeli yaklaşık 4000 yıl önce Babiller tarafından atılmıştır.



Görsel 1: Babil kil tableti (M.Ö. 1800-1600).

Karekök Hesaplama Algoritmaları

1. Yöntem

Karekök hesaplamada kullanılan bu yöntemde $x_0 > 0$ başlangıç değeri için;

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tekrarlama algoritmasında $x_1, x_2, x_3, \dots$ sayı dizisinin yaklaştığı sabit sayı, a sayısının karekökünü verir.

Bu yöntemi $\sqrt{7}$ sayısının değerini virgülden sonraki 6 basamağa kadar hesaplayarak açıklayalım.

1. Adım: x_0 başlangıç değerinin tahmini ile başlayalım. $x_0 = 1$ olsun.

(Burada çeşitli başlangıç değerleri belirlenebilir ancak işlem kolaylığı için 1'i seçtik.)

$$\text{2. Adım: } x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{7}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{7}{1} \right) = 4$$

$$\text{3. Adım: } x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{7}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{7}{4} \right) = 2,875$$

$$\text{4. Adım: } x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{7}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2,875 + \frac{7}{2,875} \right) = 2,654891$$

(Bu aşamada virgülden sonraki 6 basamağı alıyoruz.)

$$\text{5. Adım: } x_4 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{7}{x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(2,654891 + \frac{7}{2,654891} \right) = 2,645767$$

$$\text{6. Adım: } x_5 = \frac{1}{2} \left(x_4 + \frac{7}{x_4} \right) = \frac{1}{2} \left(2,645767 + \frac{7}{2,645767} \right) = 2,645751$$

$$\text{7. Adım: } x_6 = \frac{1}{2} \left(x_5 + \frac{7}{x_5} \right) = \frac{1}{2} \left(2,645751 + \frac{7}{2,645751} \right) = 2,645751$$

Görüldüğü üzere 6. adımdan sonra sabit bir sayı elde edilmiştir. Bulunan değerin doğruluğunu kontrol etmek için karesini alalım; $2,645751^2 = 6,999998 \approx 7$ elde edilir. Bu yöntemle virgülden sonraki 6 basamağa kadar çok yakın bir değer elde edilmiştir.

Tam kare olmayan kareköklü sayıların yaklaşık değerini belirleme ile ilgili örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 6).



2. Yöntem

Karekökün yaklaşık değerini bulan algoritmalarından bir diğerinde de uzun bölme işlemi yapılır ve karekök değerleri bu şekilde elle dört işlem yaparak hesaplanabilir. Bu yöntem ile 30.423 sayısının karekökünü bulalım.

1. Adım: Sayıyı karekök içerisine alalım ve sağdan başlayarak ikiyeşerli gruplar hâlinde ayıralım.

($\sqrt{3.04.23}$) Daha sonra en soldan başlayarak işlem yapılır.

2. Adım: 3'ün içerisinde 3'e en yakın tam kare ifadeyi veren sayı (1) kökün üzerine, 1'in karesi de 3'ün altına yazılarak çıkartma işlemi yapılır. Daha sonra yukarıdaki sayılar (04) alta indirilir.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \sqrt{3.04.23} \\ -1 \\ \hline 204 \end{array}$$

3. Adım: Yukarıdaki sayının 2 katı alınır ($1 \times 2 = 2$). Daha sonra bir sayı tahmin edilmelidir. Bu sayıyı elde ettiğimiz sayının (2) yanına yazdığımızda yine kendisiyle çarpımı 204'ten küçük bir sayı olmalıdır. Cebirsel olarak ifade edersek $d \cdot (20 + d) \leq 204$ olacak şekilde bir d bulunmalıdır. $27 \cdot 7 = 189$ olacak şekilde bir sayı (7) bulunur ve yukarı karekökün üzerine 1'in yanına yazılır.

$$\begin{array}{r|l} 17 & \\ \sqrt{3.04.23} & 1 \times 2 = 2 \\ -1 & 27 \\ \hline 204 & \times 7 \\ -189 & 189 \\ \hline 15 & \end{array}$$

4. Adım: 15'in yanına yukarıdan 23 indirilerek yazılır. Yukarıdaki sayının 2 katı alınır ($17 \times 2 = 34$). Daha sonra aynı şekilde bir sayı tahmin edilir 34'ün yanına yazdığımızda ve kendisiyle çarptığımızda 1523'ten küçük olacak şekilde bir sayı bulunur ($344 \times 4 = 1376$). 1523'ten çıkarılır ve 4 yukarı karekökün üzerine 17'nin yanına yazılır.

$$\begin{array}{r|ll} 174 & & \\ \sqrt{3.04.23} & 1 \times 2 = 2 & 17 \times 2 = 34 \\ -1 & 27 & 344 \\ \hline 204 & \times 7 & \times 4 \\ -189 & 189 & 1376 \\ \hline 1523 & & \\ - 1376 & & \\ \hline 147 & & \end{array}$$

5. Adım: Yukarıdan indirecek sayı kalmadığı için bölme işleminde olduğu gibi 147'nin yanına 00 ve yukarıdaki 174'ün yanına virgöl konularak işleme devam edilir. $174 \times 2 = 348$ bulunur ve 348'in yanına bir sayı tahmin edilir. $3484 \times 4 = 13936$ bulunur ve 14700'den çıkartılır. Tahmin edilen 4 sayısı da yukarı yazılır.

$$\begin{array}{r|lll} 174,4 & & & \\ \sqrt{3.04.23} & 1 \times 2 = 2 & 17 \times 2 = 34 & 174 \times 2 = 348 \\ -1 & 27 & 344 & 3484 \\ \hline 204 & \times 7 & \times 4 & \times 4 \\ -189 & 189 & 1376 & 13936 \\ \hline 1523 & & & \\ - 1376 & & & \\ \hline 14700 & & & \\ - 13936 & & & \\ \hline 764 & & & \end{array}$$

Algoritma virgülden sonra kaç basamağa kadar karekök değeri bulunmak isteniyorsa o basamağa kadar devam ettirilebilir. Bu işlemin sonunda $\sqrt{30.423} \approx 174,4$ olarak bulunur.

Tam kare olmayan kareköklü sayıların yaklaşık değerini belirleme ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 7).

Kareköklü ifadelerin sıralaması işlemleri yapılırken karelerinin alınması işlem kolaylığı sağlamaktadır.

Kareköklü ifadelerin sıralaması ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 8).

Kareköklü Sayılarda İşlemler

$\sqrt{75}$ sayısını düşünelim; 75 sayısının çarpanları arasında tam kare bir sayı var mıdır? İçerisinde bulunan tam kare ifadeyi kökün dışına çıkarmak için çarpanlarına ayıralım.

$$\sqrt{75} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$5\sqrt{3}$ sayısındaki 5'i karekökün içine almak için karesini alalım ve içerdeki sayıyla çarpalım.

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

TANIM

Karekök içindeki çarpımı oluşturan sayılardan biri tam kare sayı yapılarak iki sayının çarpımı şeklinde yazılır. Tam kare olan sayının karekökü, karekök sembolünün başına katsayı olarak yazılır. Diğer çarpan da karekök içinde kalır. Cebirsel olarak $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$ şeklinde ifade edilir.

Tersine, $a\sqrt{b}$ sayısında a sayısını karekök içine almak için a sayısının karesi alınır, karekök içindeki sayı ile çarpılır. Cebirsel olarak $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$ şeklinde ifade edilir.

Kareköklü ifadeleri kökten çıkartma ve kökün içine alma ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 9).

TANIM

Kareköklü ifadelerde **toplama ve çıkarma işlemi** yapılırken karekök içleri aynı olan terimlerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır. Kareköklü ifadeler ortak karekök olarak aynen yazılır.

Toplama ya da çıkarma işlemi yapılırken karekök içindeki sayılar eşit değilse karekök içleri eşitlenir. Karekök içlerinin eşitlenemediği durumlarda herhangi bir işlem yapılmaz. Cebirsel olarak $a\sqrt{b} \mp c\sqrt{b} = (a \mp c)\sqrt{b}$ şeklinde ifade edilir.

**Örnek:**

Bir üçgenin çevresi $18\sqrt{3}$ birimdir. İki kenarının uzunluğu $6\sqrt{3}$ birim ve $4\sqrt{3}$ birim olduğuna diğer kenarı kaç birimdir?

Çözüm:

$$6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3}, 18\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ birimdir.}$$

TANIM

Kareköklü ifadelerde **çarpma işlemi** yapılırken karekök önündeki katsayılar kendi arasında çarpılıp katsayı kısmına yazılır. Karekök içindeki sayılar ise kendi arasında çarpılıp karekök içine yazılır. Çarpım sonucunda karekök içinde tam kare sayı varsa karekök dışına çıkarılır. Cebirsel olarak $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = a \cdot c \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{d} = a \cdot c \cdot \sqrt{b \cdot d}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek:

Bir kenarı $2\sqrt{5}$ m ve diğer kenarı $3\sqrt{5}$ m olan dikdörtgen şeklindeki arsanın alanı kaç m^2 'dir?

Çözüm:

$$2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 6 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 6 \cdot \sqrt{5 \cdot 5} = 6 \cdot 5 = 30m^2 \text{ olarak bulunur.}$$

TANIM

Kareköklü ifadelerde **bölme işlemi** yapılırken karekök dışındaki katsayılar kendi arasında bölünerek katsayı kısmına yazılır, karekök içindeki sayılar ise kendi arasında bölünerek karekök içine yazılır. Karekök içinde tam kare çarpan varsa karekök dışına çıkarılır. Cebirsel olarak $\frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek:

Alanı $20\sqrt{30}$ m^2 olan dikdörtgen şeklindeki bir arsanın bir kenarı $5\sqrt{5}$ m olduğuna göre diğer kenarı kaç m'dir?

Çözüm:

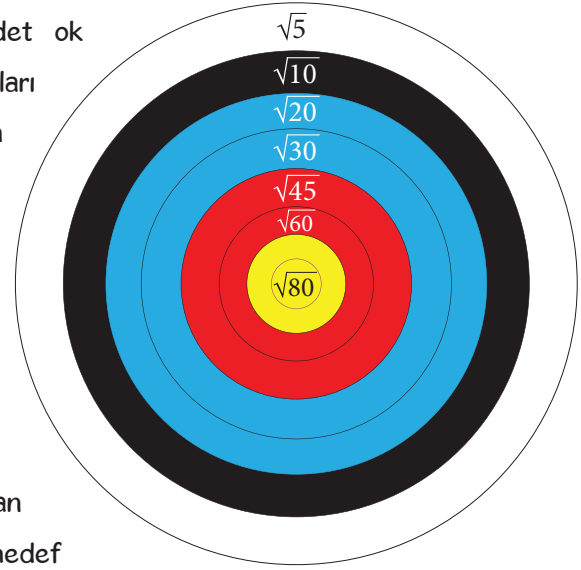
$$\frac{20\sqrt{30}}{5\sqrt{5}} = \frac{20}{5} \cdot \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{6}m \text{ olarak bulunur.}$$

Kareköklü ifadelerde çarpma ve bölme işlemleri ile ilgili örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 10,11).

Kareköklü Bir İfade ile Çarpıldığında Sonucu Bir Rasyonel Sayı Yapan Çarpanlar



Bir dart oyununda, üzerinde $\sqrt{5}$ yazan 4 adet ok bulunmaktadır. Yandaki gibi bir dart tahtasına okları attığınızda okun geldiği bölgedeki sayı ile okun üzerindeki sayının çarpımı bir doğal sayı ise çarpım kadar puan alıyorsunuz. Bu dart oyununda her okun farklı renkte bir bölgeye geldiği bilindiğine göre alınabilecek en yüksek puan kaçtır?



$\sqrt{5}$ ile çarpıldığında bir tam kare elde edilen sayılara atış yapıldığında puan alınabileceğinin fark edilmesi sağlanır. O hâlde $\sqrt{80}, \sqrt{45}, \sqrt{20}, \sqrt{5}$ sayılarından puan alınabileceği görülmüş olur. Tahtaya farklı hedef tahtaları çizilerek benzer etkinlikler yapılabilir.

$$\sqrt{80} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$\sqrt{45} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 5 = 15,$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 5 = 10,$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 \text{ olduğundan alınabilecek en yüksek puan } 20 + 15 + 10 + 5 = 50 \text{ 'dir.}$$

Örnek:

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ sayısını rasyonel bir sayı yapmak için hangi sayı ile çarpmalıyız?

Çözüm:

Öncelikle $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ sayısını $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ile çarpalım ve sonucu gözlemleyelim.

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3 - \sqrt{6} + \sqrt{6} - 2 = 3 - 2 = 1$$

olur. Bir rasyonel sayı elde edilmiştir.



TANIM

Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayıdan her birine, diğerinin **eşleniği** denir. Eşlenik iki terimin çarpımı, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ eşitliğinden yola çıkarak birinci terimin karesi ile ikinci terimin karesinin farkına eşittir.

$a, b \in \mathbb{R}^+$ için, $\sqrt{a}$ 'nın eşleniği, $\sqrt{a}$ 'dır. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 'nin eşleniği, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 'dir.

Karaköklü bir sayıyı eşleniği ile çarpınca, elde edilen değer, daima rasyonel bir sayıdır.

Kareköklü ifadelerde eşlenik ile çarpma işlemleri ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 12, 13).

n. Kuvvetten Köklü Sayılar

$x^3 = 8$ ifadesinde x değerinin 2 olduğu kolaylıkla görülebilir. Ancak $x^3 = 7$ ise x değerini ifade etmek için yine köklü sayılar kullanılır. Burada x'in derecesi 3 olduğu için 3. dereceden kökü alınmalıdır ve $x = \sqrt[3]{7}$ olarak yazılır.

TANIM

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve $a, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^n = a$ eşitliğini sağlayan x değerlerine **a'nın n. dereceden kökü** denir ve " $\sqrt[n]{a}$ " ile gösterilir.

$n = 2$ ise $\sqrt[2]{a}$ ya da $\sqrt{a}$ yazılır ve *ikinci dereceden kök a* ya da *kare kök a* olarak okunur. Derece 2 ise yazılabılır.

$n = 3$ ise $\sqrt[3]{a}$ yazılır ve *üçüncü dereceden kök a* ya da *küp kök a* olarak okunur.

$x^3 = -27$ olduğunda hangi sayının küpü -27'dir diye düşünülerek x değerini bulmak için küp kökü alınır ve $\sqrt[3]{-27} = -3$ bulunur. O hâlde "3. dereceden bir kökün içi negatif olabilir mi?" sorusu öğrencilere yöneltilir. "Hangi durumlarda negatif olabilir ve hangi durumlarda pozitif olmalıdır?" tartışması yapılır.

TANIM

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$\sqrt[n]{a}$ ifadesinin bir gerçek sayı olması için $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır.

$\sqrt[n]{a}$ ifadesinin bir gerçek sayı olması için $a \geq 0$ olmalıdır.

Örnek:

$\sqrt{3}, \sqrt{-3}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[10]{-2}, \sqrt{-1}, \sqrt[7]{-1}$ sayılarından hangileri gerçekte sayıdır?

Çözüm:

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[7]{-1} \in \mathbb{R}$$

TANIM

$x \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, köklü sayılar üslü sayı olarak $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ şeklinde yazılabilir.

- $\sqrt[7]{2} = 2^{\frac{1}{7}}$
- $\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^3}$
- $(-2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-2}$ şeklinde yazılabilir.

Köklü sayılarla ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 14).

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- $\sqrt{-1}$ sayısı Babil metodu ile hesaplanabilir mi? Araştırınız.
- İrrasyonel sayıların sürekli kesirler ile gösterimlerini araştırınız.
- Diğer karekök hesaplama algoritmalarını (2'lik sayı sistemi yöntemi, Bakhshâli yöntemi vb.) araştırınız.
- Köklü ifadelerin üslü ifade olarak yazıldığında çarpma ve bölme işlemlerinin nasıl yapıldığını araştırınız.
- n. dereceden köklü sayıların eşleniklerinin nasıl bulunacağını araştırınız.
- $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ durumundaki köklü ifadelerde $a = m + n, b = m \cdot n$ ve $m > n$ olmak üzere $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ şeklinde yazılabildiğini gösteriniz.



KAYNAKLAR

- Akıllı R., Böge H. (2020) *Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 8. Sınıf Ders Kitabı* Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Black P.E. (2019), *Square Root*, Dictionary of Algorithms and Data Structures <https://www.nist.gov/dads/HTML/squareRoot.html> (Erişim Tarihi: 08.07.2021).
- Conway J. H., Guy R.K. (2013). *Sayılar Kitabı*. Alfa Bilim Yayınları.
- Karadağ N. (2005). *Uçsuz Bucaksız Sayılar Kümesine Değişik Bir Sınıflandırma: Cebirsel ve Aşkın Sayılar*. Bilim ve Teknik 84. <http://www.biyologjiegitim.yyu.edu.tr/mk/cas/a.htm> (Erişim Tarihi: 06.07.2021).
- Karakuş, F. (2009). Matematik Tarihinin Matematik Öğretiminde Kullanılması: Karekök Hesaplamada Babil Metodu. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 3(1), 195-206.
- MEB (2020). *2019-2020 Öğretim Yılı Sınavla Öğrenci Alacak Ortaöğretim Kurumlarına İlişkin Merkezi Sınav Yönelik Örnek Sorular*. <https://odsgm.meb.gov.tr/kurslar/pdf/ekitaplar/8LGSSAY/8lgssay.html#p=330> (Erişim Tarihi: 06.07.2021).
- ÖSYM (2021). *Temel Yeterlilik Testi (Tyt) Soru ve Cevapları*. https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2021/YKS/TSK/tyt_yks_2021.pdf (Erişim Tarihi: 14.07.2021).
- TÜBİTAK, (2004). *Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı Soru ve Cevapları*.
- TÜBİTAK, (2006). *Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı Soru ve Cevapları*.
- TÜBİTAK, (2011). *Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı Soru ve Cevapları*.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

2. 10

3. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

4. $\sqrt{8} \approx 2,8$, $\sqrt{51} \approx 7,1$, $\sqrt{69} \approx 8,3$

5. 25 cm

6. 3,316624

7. 22,62

8. C

9.

$$\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{3} = \sqrt{27}$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{50}$$

$$\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{20}$$

$$2\sqrt{7} = \sqrt{28}$$

10.

$$5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{6}$$

$$4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

$$\frac{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 30$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt{45} = 6\sqrt{15}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{6\sqrt{30}}{3\sqrt{5}} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4}} = 3$$

11. $x^3 \sqrt{x}$

12.

Sayı	Eşleniği	Çarpımı	Sayı	Eşleniği	Çarpımı
$\sqrt{5} - \sqrt{3}$	$\sqrt{5} + \sqrt{3}$	2	$2\sqrt{3} - 3$	$2\sqrt{3} + 3$	3
$2\sqrt{3} - \sqrt{5}$	$2\sqrt{3} + \sqrt{5}$	7	$7 - \sqrt{3}$	$7 + \sqrt{3}$	46
$\sqrt{11} - 3$	$\sqrt{11} + 3$	2	$5 - 2\sqrt{3}$	$5 + 2\sqrt{3}$	13

13. $\sqrt{15}$

14. E

15. -2

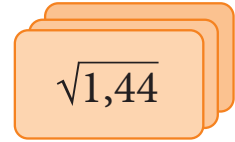
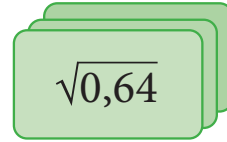
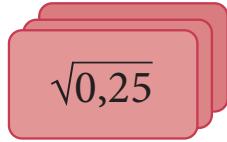
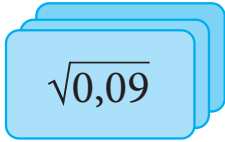


Etkinlik Formu

1. Aşağıda alanları verilen kare şeklindeki arsaların bir kenar uzunluklarını bulunuz.

Alanı	Üslü İfadesi	Bir Kenar	Alanı	Üslü İfadesi	Bir Kenar
49			0,25		
64			0,36		
81			1,21		

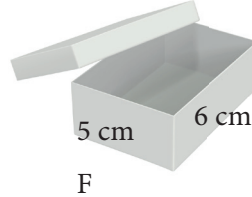
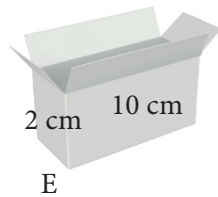
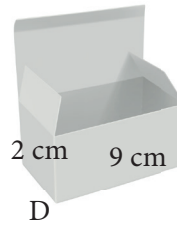
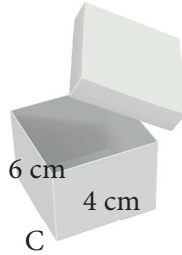
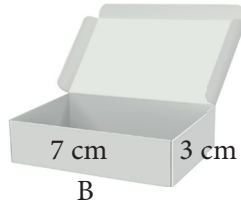
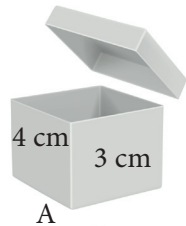
2. Aşağıda dört farklı renkteki kartların her birinden üçer adet verilmiştir. Aynı renkteki kartların üzerinde aynı kareköklü ifade yazmaktadır.



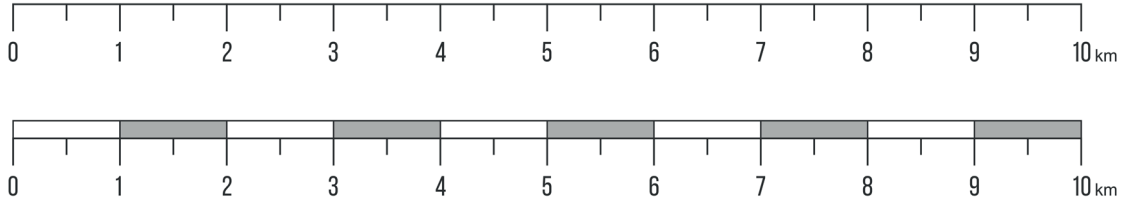
Eymen, bu kartlardan seçerek üstlerinde yazan kareköklü ifadeleri topladığında bir doğal sayı elde etmektedir.

Buna göre Eymen en fazla kaç kart seçmiştir? (2020-LGS Örnek Soru)

3. Aşağıdaki kutuların içersine sığabilecek en büyük boydaki kalem kaç cm olur? Önce tahmin ediniz daha sonra hesap makinası kullanarak hesaplayınız.



4. $D = \sqrt{8}$, $E = \sqrt{51}$, $F = \sqrt{69}$ sayılarının sayı doğrusundaki yerlerini tahmin etmeye çalışın.



5. Alanı 670 cm^2 olan kare şeklinde bir çerçevenin içine bir kenarı en fazla kaç cm olan kare şeklinde bir fotoğraf konulabilir?

6. $\sqrt{11}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

7. $\sqrt{512}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

8. Aşağıdaki sayıların en küçüğü hangisidir? (UİMO-2011)

A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{11}$ C) $\sqrt{5} - 2$ D) $\frac{1}{4}$ E) $3\sqrt{2} - 4$

9. Aşağıdaki kareköklü ifadelerde kökten çıkartma ve kök içine alma işlemleri yapınız.

$\sqrt{80} =$	$\sqrt{72} =$	$3\sqrt{3} =$	$5\sqrt{2} =$
$\sqrt{200} =$	$\sqrt{8} =$	$2\sqrt{5} =$	$2\sqrt{7} =$

10. Aşağıdaki kareköklü ifadelerde çarpma ve bölme işlemleri yapınız.

$5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} =$	$4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{3} =$	$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} =$	$\frac{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$
$\sqrt{12} \cdot \sqrt{45} =$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} =$	$\frac{6\sqrt{30}}{3\sqrt{5}} =$	$\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4}} =$

11. Her $x \geq 0$ gerçel sayısı için, $\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)^4$ sayısının eşit olduğu ifadeyi bulunuz. (UİMO-2004)



12. Aşağıdaki ifadelerin eşleniklerini bularak her ifadenin eşleniği ile çarpımlarını yazınız.

Sayı	Eşleniği	Çarpımı	Sayı	Eşleniği	Çarpımı
$\sqrt{5} - \sqrt{3}$			$2\sqrt{3} - 3$		
$2\sqrt{3} - \sqrt{5}$			$7 - \sqrt{3}$		
$\sqrt{11} - 3$			$5 - 2\sqrt{3}$		

13. Köklü sayılarla işlem yapan Mert, $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ sayısını eşleniği olan $\sqrt{10} - \sqrt{6}$ ile çarpmak yerine yanlışlıkla bölmüştür. Buna göre, Mert'in bulduğu sayı bulması gereken sayıdan kaç fazladır? (TYT-2021)

14. Aşağıdaki sayıların en küçüğü hangisidir? (UİMO-2006)

- A) $\sqrt{10} - 2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$ C) $3 - \sqrt{7}$ D) $2\sqrt{10} - 6$ E) $2\sqrt{3} - \sqrt{10}$

15. $\sqrt[3]{23 + \sqrt{16}} - \sqrt{27 - \sqrt[3]{8}}$ işleminin sonucu kaçtır?



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: ASAL SAYILAR
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Asal Sayılar
KAZANIMLAR	: 1. Bir sayının asallığına farklı yöntemlerle karar verir. 2. Asal sayıların sonsuzluğunu farklı yöntemlerle ispatlar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, amacımız bir sayının asal sayı olması için kareköküne kadar olan asal sayılara tam bölünmesinin yeterli olduğu sonucunu keşfettirmeye yönelik çalışmalar yapmaktır. Ayrıca, 2 dışındaki tüm asal sayıların $4n + 1$ veya $4n - 1$ formunda yazılabileceğini ve 3'ten büyük asal sayıların $6n + 1$ veya $6n - 1$ formunda olduğunu keşfettirmeye yönelik çalışmalara yer verilecektir. Mersenne asalları, ikiz asallar gibi özel asal sayıların incelendiği çalışmalar da yapılarak öğrencilere bu şekildeki sayıları keşfettirmek de amaçlanmaktadır.

Başlarken...

Asal sayılar ile ilgili bilinen en eski çalışma Öklid'in yaklaşık olarak MÖ 300'lü yıllarında yaptığı çalışmalarıdır. Bu çalışmalar aynı zamanda aritmetiğin temel esaslarını içermektedir. Yunan matematikçiler tarafından keşfedilmiş olan Eratosthenes (Eratosten) Kalburu da asal sayıları bulmaya yarayan bir yöntem olmasına rağmen, çok büyük asal sayıların bulunması oldukça zordur. Daha sonra 17. yüzyılda Fermat ve Euler asal sayıların özellikleri ile ilgili yeni çalışmalar yaptılar. Günümüzde de Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) projesi kapsamında en büyük asal sayıyı bulmak için çalışmalar yapılmaktadır.

Matematikte, Eratosthenes (Eratosten) Kalburu belirli bir tam sayıya kadar yer alan asal sayıların bulunması için kullanılan bir yöntemdir.





- 1'den 100'e kadar olan doğal sayıları bir tablo şeklinde yazınız.
- 1; asal sayı olmadığı için 1'e çarpı işareti koyunuz.
- 2; bir asal sayı olduğu için 2'yi daire içine alınız, daha sonra 2'nin tüm katlarına çarpı işareti koyunuz.
- 3; bir asal sayı olduğu için 3'ü de daire içine alınız ve 3'ün katlarına da çarpı işareti koyunuz.
- 5; bir asal sayı olduğu için 5'i de daire içine alınız ve 5'in katlarına da çarpı işareti koyunuz.
- 100'e kadar olan tüm sayılara bu işlemi uygularsanız, 100'e kadar olan asal sayıları bulursunuz.

Eratosthenes (Eratosten) Kalburu uygulamasına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru-1)

TANIM

Asal Sayılar: 1 ve kendisinden başka böleni olmayan 1'den büyük sayma sayılarına asal sayılar denir. Asal sayıları, pozitif bölenlerinin kümesi iki elemanlı olan doğal sayılar olarak da tanımlayabiliriz.

En az iki asal sayının çarpımı olarak yazılabilen 1'den büyük tam sayılara bileşik sayılar denir.

Bir sayının asal sayı olması için, o sayının karekökünden büyük olmayan sayılara tam bölünmesinin yeterli olduğuna yönelik çalışmalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru-2)

Teorem:

$n \geq 1$ bileşik tam sayısının $p \leq \sqrt{n}$ olacak şekilde bir asal böleni vardır.

İspat:

$n \geq 1$ bir bileşik tam sayı olsun. O hâlde, n sayısı bazı asal sayıların çarpımı şeklindedir. n 'nin en küçük asal böleni p olsun. Bu durumda,

$$n = p \cdot n_1$$

olacak şekilde bir $n_1 \geq 1$ tam sayısı vardır. n 'nin en küçük asal böleni p olduğundan, $p \leq n_1$ 'dir. Dolayısı ile,

$$n = p \cdot n_1 \geq p \cdot p = p^2$$

olup karekök alınırsa, $p \leq \sqrt{n}$ elde edilir. Yani, $n \geq 1$ bileşik tam sayısının $p \leq \sqrt{n}$ olacak şekilde bir asal böleni vardır.

Sonuç:

Asallık Testi: Verilen bir sayının asal olup olmadığını anlamak için sayının karekökünden büyük olmayan asal sayılara bölünüp bölünmediğine bakılır. Eğer bölünmüyorsa sayı asaldır. Örneğin; 197 sayısı asal mıdır, sorusuna cevap arayalım. 197 sayısının karekökü yaklaşık olarak 14 olduğundan, $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ sayılarına bölünüp bölünmediğine bakılır. 197 sayısının bu asal sayılara bölünmediği görülür. O hâlde 197 asaldır.

TANIM

İkiz Asallar: Aralarındaki fark 2 olan asal sayılara ikiz asallar denir. Örneğin; (3,5), (5,7), (11,13), ... şeklindeki sayı ikilileri ikiz asallardır.

Örnek:

Her ikisi de en fazla iki basamaklı olan kaç tane ikiz asal sayı çifti vardır?

Çözüm:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73) olup 8 tanedir.

TANIM

Üçüz Asallar: Aralarındaki fark 2 olan 3 asal sayıya üçüz asallar denir.

Örnek:

Kaç tane üçüz asal sayı üçlüsü vardır?

Çözüm:

p bir asal sayı olmak üzere, üçüz asal sayılar, $(p, p + 2, p + 4)$ şeklindedir. $p = 2$ için üçüz asal oluşmaz. $p = 3$ için, (3, 5, 7) üçüz asal sayıdır. $p > 3$ olsun.

Bu durumda, $p, p + 2, p + 4$ sayılarından birinin 3 ile bölüneceği açıktır. Bu nedenle üçüz asal elde edilemez. O hâlde, 1 tane üçüz asal sayı üçlüsü vardır.

Mersenne asalları, Fermat asalları, ikiz asallar gibi özel asal sayıların incelendiği örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3-5)



TANIM

Mersenne Sayıları: a bir pozitif tam sayı olmak üzere, $2^a - 1$ şeklinde yazılan sayılara Mersenne sayıları denir. Verilen bir Mersenne sayısı asal olmak zorunda değildir.

Örneğin; $a = 11$ için $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ olup asal değildir.

Fermat Sayıları: Her $n \geq 0$ tam sayısı için, $F_n = 2^{2^n} + 1$ tam sayısına bir Fermat sayısı ve F_n asal ise F_n 'ye bir Fermat asal sayısı denir.

Örnek:

Her $n \geq 0$ tam sayısı için, $F_n = 2^{2^n} + 1$ tam sayısına bir Fermat sayısı ve F_n asal ise F_n ye bir Fermat asal sayısı denir. Buna göre, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri için F_n değerlerini hesaplayıp asal olup olmadığını kontrol ediniz.

Çözüm:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \text{ asal}, F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5 \text{ asal},$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17 \text{ asal},$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257 \text{ asaldır.}$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537 \text{ asaldır.}$$

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417 \text{ olup } F_5 \text{ sayısı } 641 \text{ ile bölüneceğinden asal değildir.}$$

Örnek:

$3n - 4$, $4n - 7$ ve $5n - 13$ sayılarının üçü de asal sayı olacak şekilde kaç tane n pozitif tam sayısı vardır?

Çözüm:

$(3n - 4) + (4n - 7) + (5n - 13) = 12n - 24 = 12(n - 2)$ olup çifttir. O hâlde bu sayılardan biri 2 olmalıdır.

$$3n - 4 = 2 \Rightarrow n = 2 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda; $4 \cdot 2 - 7 = 1$ olup asal değildir. O hâlde $n = 2$ olamaz.

$$4n - 7 = 2 \text{ olacak şekilde } n \text{ pozitif tam sayısı yoktur.}$$

$$5n - 13 = 2 \Rightarrow n = 3 \text{ olur.}$$

Bu durumda; $3 \cdot 3 - 4 = 5$ asal ve $4 \cdot 3 - 7 = 5$ asaldır.

O hâlde, şartı sağlayan pozitif tam sayı yalnızca $n = 3$ 'tür.

2 dışındaki tüm asal sayıların $4n + 1$ veya $4n - 1$ formunda yazılabileceğini ve 3'ten büyük asal sayıların da $6n + 1$ veya $6n - 1$ formunda olduğunu keşfettirmeye yönelik örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 6)

Örnek:

n pozitif bir tam sayı olmak üzere, 2'den büyük her asal sayının, $4n+1$ veya $4n-1$ şeklinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Herhangi bir asal sayının $4n$ ve $4n+2$ şeklinde yazılamayacağını gösterelim.

$$4n = 2 \cdot 2n \text{ olup asal değildir.}$$

$$4n+2 = 2 \cdot (2n+1) \text{ olup asal değildir.}$$

$4n+1$ ve $4n+3$ için asal değildir, denilemez. Ayrıca, $4n+3$ sayı kümesi ile $4n-1$ sayı kümesi aynı sayılardan oluşmaktadır. Bu nedenle $4n+3$ yerine $4n-1$ alabiliriz.

O hâlde, 2'den büyük her asal sayı $4n+1$ veya $4n-1$ şeklindedir.

Örnek:

n pozitif bir tam sayı olmak üzere, 3'ten büyük her asal sayının $6n+1$ veya $6n-1$ şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm:

Bir asal sayı $6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$ veya $6n+5$ şeklinde olmalıdır. Eğer bir asal sayının $6n$, $6n+2$, $6n+3$ veya $6n+4$ şeklinde yazılamayacağını gösterirsek bu asal sayının $6n+1$ veya $6n+5$ şeklinde olmak zorunda olduğunu göstermiş oluruz.

$$6n = 2 \cdot 3n \text{ olup asal değildir.}$$

$$6n+2 = 2 \cdot (3n+1) \text{ olup asal değildir.}$$

$$6n+3 = 3 \cdot (2n+1) \text{ olup asal değildir.}$$

$$6n+4 = 2 \cdot (3n+2) \text{ olup asal değildir.}$$

$6n+1$ ve $6n+5$ için asal değildir, denilemez. Ayrıca, $6n+5$ sayı kümesi ile $6n-1$ sayı kümesi aynı sayılardan oluşmaktadır. Bu nedenle $6n+5$ yerine $6n-1$ alabiliriz.

O hâlde, 3'ten büyük her asal sayı $6n+1$ veya $6n-1$ şeklindedir.

Teorem:

Sonsuz sayıda asal sayı olduğunu gösteriniz.

İspat:

Asal sayıların sonlu sayıda ve n tane olduğunu kabul edelim. Bu asal sayılar da $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ olsun.



$A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$ sayısını inceleyelim.

A sayısı asal olsaydı $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ asallarından farklı olurdu çünkü A sayısı $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ asal sayılarının her birinden büyüktür. Bu ise asal sayıların n 'den fazla olduğunu gösterir.

Diğer yandan A sayısı asal olmasaydı elimizdeki n tane asaldan en az birisine bölünmesi gerekirdi. Bunlardan biri p_m olsun. p_m asalı, hem $A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$ hem de $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$ çarpımını, bölmesi gerekirdi. Yani p_m asalı 1 sayısını da bölmeli ama böyle bir şey mümkün değil. Çelişki elde ettik. Demek ki asal sayılar kümesi sonlu değildir.



1000'e kadar olan asal sayıları elde eden programı asallık testini kullanarak metin tabanlı programlama dili ile oluşturunuz.

```
def asal_mi(sayı):
    if (sayı == 1):
        return False
    elif (sayı == 2):
        return True
    else:
        for i in range(2,int(sayı**0.5)+1):
            if (sayı % i == 0):
                return False
        return True
for i in range(1,1000):
    if asal_mi(i):
        print(i,end=",")
```

Program çıktısı

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199,211,223,227,229,233,239,241,251,257,263,269,271,277,281,283,293,307,311,313,317,331,337,347,349,353,359,367,373,379,383,389,397,401,409,419,421,431,433,439,443,449,457,461,463,467,479,487,491,499,503,509,521,523,541,547,557,563,569,571,577,587,593,599,601,607,613,617,619,631,641,643,647,653,659,661,673,677,683,691,701,709,719,727,733,739,743,751,757,761,769,773,787,797,809,811,821,823,827,829,839,853,857,859,863,877,881,883,887,897,907,911,919,929,937,941,947,953,967,971,977,983,991,997,

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- 1 sayısının neden asal sayı olmadığı, asal sayı olarak kabul edilirse matematikte hangi teoremler ile çözüleceği araştırılabilir.
- Goldbach Sanısı, “2’den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir.” şeklinde ifade edilir. Çözülemedi en eski matematik problemlerinden biridir. Bilgisayarlarda yapılan denemelerle çok büyük sayılara kadar doğruluğu gösterilmiştir. Ancak bilinen bir ispatı yoktur. Öğrencilerin matematikte çözülemedi problemler üzerine ve Goldbach Sanısı hakkında araştırma yapmaları önerilir.
- Olası Asallık Testlerini (OAT) geçen sayının yüksek olasılıkla asal olduğu söylenebilir. En çok kullanılan olası asallık testleri Fermat testi, Lehmann testi, Solovay Strassen testi, Miller&Rabin testi araştırma konusu olarak verilebilir.
- Bilinen en büyük asal sayı kaçtır? Hesaplanmış en büyük Mersenne asalı kaçtır? Kaç tane Mersenne asalı hesaplanmıştır?

KAYNAKLAR

- Hendy, M. D. (2001). Euclid and the fundamental theorem of arithmetic. *Historia Mathematica*, 2, 189-191.
- McGregor, D & Zachary S. (1999). Methods of primality testing. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, 1, 133-141.
- Turan, M. & Acar, M. A. (2016). Asal sayıların Eratosten kalburu algoritması kullanılarak bulunmasında GPU ve CPU başarımlarının analizi. *Adıyaman Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 5, 71-76.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Derecelendirme Ölçeği Değerlendirme Formuna etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlik Formu Cevapları

1. Uygulama
2. 101 asal, 159 asal değil; 197 asal, 239 asal; 476 asal değil.
3. 2311
4. 31, 127
5. 3, 5, 17, 257
6. Çözüm etkinlik içerisinde verilmiştir.
7. 15 ($(p+1)(q+1) = p \cdot q + p + q + 1$ eşitliğinden yararlanılır).
8. 424
9. 83

Etkinlik Formu

1. Asude aşağıdaki gibi 1'den 100'e kadar olan doğal sayıları bir tablo şeklinde yazıyor. Daha sonra sıra ile aşağıdaki adımları uyguluyor.

1. Adım: 2'yi bir çember içine alıp 2'nin diğer katlarının üzerini çiziyor.

2. Adım: 3'ü bir çember içine alıp 3'ün diğer katlarının üzerini çiziyor.

3. Adım: Çember içinde olmayan ve üzeri çizilmeyen ilk sayıyı çember içine alıp bu sayının katlarının üzerini çiziyor.

Asude'nin çember içine aldığı sayılar hangileridir? Bu sayıların ortak özelliklerini gözlemleyiniz.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. 101, 159, 197, 239, 476 sayılarının asal olup olmadığını bulunuz.



3. 2'den başlayarak küçükten büyüğe doğru sıra ile yazılmış bazı asal sayıların çarpımının 1 fazlasına “Öklid Asalları” denir. Örneğin; $2 \cdot 3 + 1 = 7$, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$

Buna göre, dört basamaklı Öklid asalı kaçtır?

4. Bir p asal sayısı için, $2^p - 1$ biçimindeki asal sayıya Mersenne asalı denir. Buna göre, 15, 31, 63, 127 sayılarından hangileri Mersenne asalıdır?

5. Her $n \geq 0$ tam sayısı için, $F_n = 2^{2^n} + 1$ tam sayısına bir Fermat sayısı ve F_n asal ise F_n ye bir Fermat asal sayısı denir. İlk dört Fermat asalını bulunuz.

6. Aşağıdaki tabloda yer alan asal sayıların 4 ve 6 ile bölümünden kalanları ilgili hücreye yazınız.

Asallar	11	13	17	19	23	29	31	37	41
4 ile bölümünden kalan									
6 ile bölümünden kalan									

a. 4 ile bölümünden kalanları inceleyiniz. Bu kalanlar arasında bir ilişki bulabildiniz mi?

b. 6 ile bölümünden kalanları inceleyiniz. Bu kalanlar arasında bir ilişki bulabildiniz mi?

7. p ve q asal sayılardır. $p \cdot q + p + q = 41$ olduğuna göre, $p + q$ toplamının en büyük değeri kaçtır?

8. Hem kendisi hem rakamları toplamı hem de rakamları çarpımı asal sayı olan bir pozitif tam sayıya asil sayı diyelim. Üç basamaklı en küçük asil sayı ile üç basamaklı en büyük asil sayının toplamı kaçtır?

(2020 TÜBİTAK Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı)

9. 30'dan küçük asal sayılar kümesi $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{10}\}$ olmak üzere bir $p \in P$ için en küçük asal böleni p olan 100'den küçük pozitif tam sayıların sayısı s_p ile gösteriliyor. Buna göre $s_{p_1} + s_{p_2} + \dots + s_{p_{10}}$ kaçtır?

(2019 TÜBİTAK Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı)



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

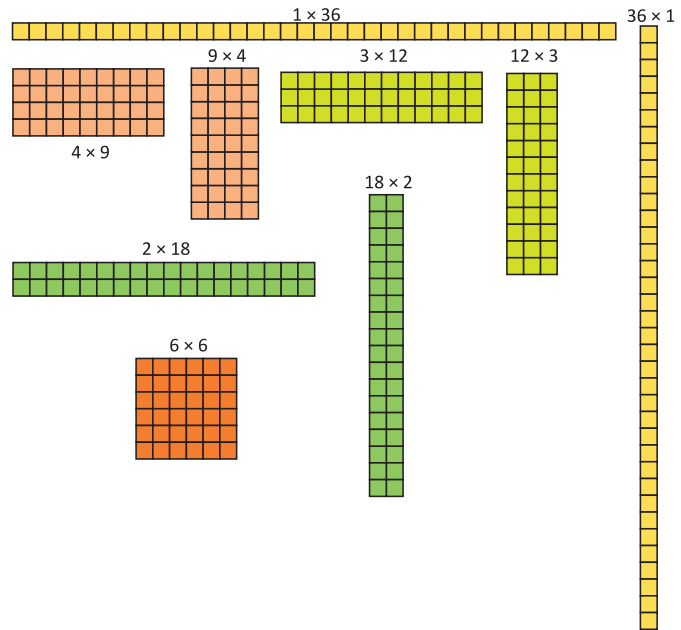
ETKİNLİK ADI	: ARİTMETİĞİN TEMEL TEOREMİ
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Asal Sayılar
KAZANIMLAR	: Aritmetiğin temel teoreminin farklı sonuçlarını tartışır.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, asal sayılar ve doğal sayıları ilişkilendirerek asal sayıların doğal sayılar içindeki önemini keşfettirmek amaçlanmıştır. Bileşik sayı ve asal sayı kavramlarının ilişkisi üzerinden aritmetiğin temel teoreminin anlamlandırılması hedeflenmiştir. Ayrıca, aritmetiğin temel teoreminin farklı sonuçları tartışılacak, bir sayının asal çarpanları ile bölen sayısı arasında ilişkiyi kurmaya ve özelliklerini incelemeye yönelik çalışmalara yer verilecektir.

Başlarken...

Asal sayılar, matematiğin en gizemli alanlarından biridir. Tarih boyu matematikçiler asal sayılar üzerinde çalışmış, çeşitli teoremler sunmuşlar ancak asal sayıları üretebilen bir yöntem bulamamışlardır. p ve q , 2'den farklı asal sayılar olmak üzere verilen bir $A=p \cdot q$ sayısını, p ve q asalları bilinmediği durumlarda çarpanlara ayrılması problemi çok basit olarak görünmesine rağmen çok zor bir problemdir. Problemin çözümünde, A sayısını sırasıyla kendisinden küçük tüm asallara bölme yöntemi kullanılır. A sayısı 50 basamaklı olsa tüm denemelerin sayısı birden çok bilgisayarla bile aylar sürebilir. Asal sayıların kriptolojide kullanılmasının en önemli sebeplerinden biri budur. Çok büyük iki asal sayının çarpımını çarpanlarına ayırmak ne kadar mümkündür? Örneğin, 323 ve 10379 sayılarının hangi iki asal sayının çarpımı olduğunu tahmin etmeye çalışın. $323=17 \times 19$ olduğunu tahmin etmek zor olmasa da, $10379=97 \times 107$ olduğunu bulmak oldukça zordur. Bu durum asal çarpanlarına ayırma problemi olarak tanımlanmıştır.





Ayşe Öğretmen ile öğrencileri arasında şu şekilde bir diyalog geçer:

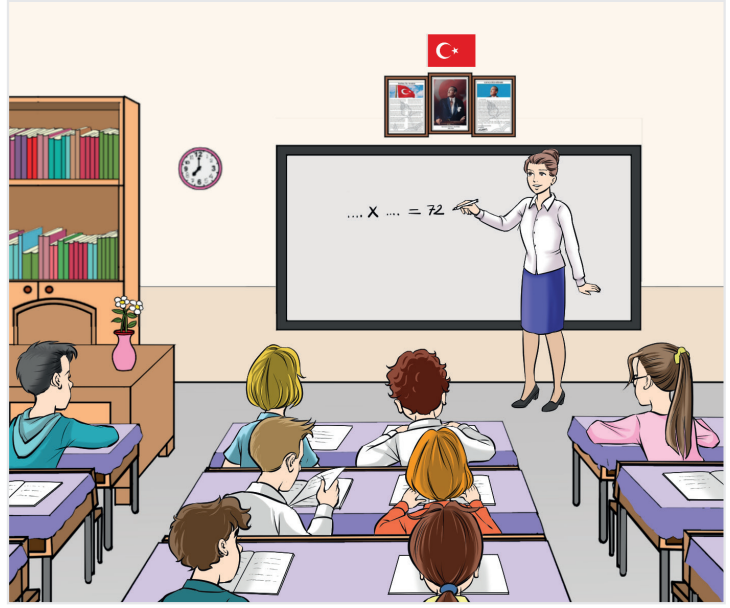
Ayşe Öğretmen: 72 sayısını öyle iki sayının çarpımı olarak yazın ki çarpanlardan biri asal olsun.

Berna: Buldum öğretmenim: $72 = 2 \times 36$

Ayşe Öğretmen: Başka olamaz mı?

Ceyda: Olur öğretmenim: $72 = 3 \times 24$

Ayşe Öğretmen: Şimdi bulduğunuz çarpanlardan asal olmayanı da yine biri asal olacak şekilde iki sayının çarpımı olarak yazın ve bu işlemlere tüm çarpanlar asal oluncaya kadar devam edin.



Yukarıdaki diyalogu farklı sayılarla uygulayarak tüm öğrencilerin aynı sonucu bulduğunu fark ettirmeye yönelik çalışmalar yapılır.

Teorem: (Aritmetiğin Temel Teoremi)

1'den büyük her tam sayı asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türdür.

Diğer bir ifadeyle, $n > 1$ bir tam sayı olsun. O zaman, öyle bir $r \geq 1$ tam sayısı için,

$p_1, p_2, \dots, p_r$ asal sayıları vardır ki

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$$

şeklinde yazılabilir ve bu yazılış tek türdür.

İspat:

$n > 1$ bir tam sayı ve $p_1, p_2, \dots, p_r$ asal sayılar olsun. p_1 asal sayısı n tam sayısının bir böleni olsun.

- i. $n = p_1$ ise, n sayısı bir tane asal sayının çarpımı şeklinde yazılmıştır.
- ii. $n > p_1$ ise $r_1 > 1$ olmak üzere, $n = p_1 \cdot r_1$ şeklinde yazılabilir. Eğer r_1 asal ise n sayısı $n = p_1 \cdot r_1$ şeklinde iki tane asal sayının çarpımı şeklinde yazılmıştır. $r_1 = p_2$ alınırsa, $n = p_1 \cdot p_2$ şeklinde iki tane asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilir.

r_1 asal değil ise, $r_2 > 1$ olmak üzere, $r_1 = p_2 \cdot r_2$ şeklinde yazılabilir. Eğer r_2 asal ise n sayısı $n = p_1 \cdot p_2 \cdot r_2$ şeklinde üç tane asal sayının çarpımı şeklinde yazılmıştır. $r_1 = p_3$ alınırsa, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ şeklinde üç tane asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde devam edilirse, $r_1 > r_2 > r_3 > \dots > 1$ elde edilir. Sonlu adım sonrasında,

$r_{k+1} = 1$ için $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_k$ şeklinde k tane tane asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilir.

TANIM

$n > 1$ bir tam sayı olsun. $p_1, p_2, \dots, p_k$ farklı asal sayılar ve $r_1, r_2, \dots, r_k$ pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazılışa n sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hâli denir.

Bir sayının asal çarpanlara ayrılması ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 1-2).

Örnek:

p ve $p^2 + 2$ asal sayılar ise, $p^3 + 3$ sayısının en çok kaç asal böleni olabilir? (UMO-2006)

Çözüm:

p ve $p^2 + 2$ asal sayılar ise, $p = 2$ olamaz.

$p = 3$ olsun. 3 ve $3^2 + 2 = 11$ asal sayılardır. Bu durumda, $3^3 + 3 = 30$ olup, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ 'tir.

$p > 3$ olsun. Bu durumda tüm asal sayılar, $6k + 1$ veya $6k - 1$ şeklindedir.

$p = 6k + 1$ ise: $p^2 + 2 = (6k + 1)^2 + 2 = 36k^2 + 12k + 3 = 3(12k^2 + 4k + 1)$

$p = 6k - 1$ ise: $p^2 + 2 = (6k - 1)^2 + 2 = 36k^2 - 12k + 3 = 3(12k^2 - 4k + 1)$

olup, $p^2 + 2$ sayısı asal olamaz. Yani, $p > 3$ olamaz.

O hâlde, $p = 3$ olmak zorundadır. Buradan, $p^3 + 3 = 3^3 + 3 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ olup en çok 3 asal böleni vardır.

Etkinlik Formu Soru 3

Sayı	Asal Çarpanlara Ayrılmış Şekli	Pozitif Bölenleri	Pozitif Bölenlerin Sayısı
8	2^3	1, 2, 4, 8	4
10	$2 \cdot 5$	1, 2, 5, 10	4
12	$2^2 \cdot 3$	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 240, 360	24

Verilen sayının pozitif bölenlerinin sayısı ile asal çarpanlara ayrılmış hâli gözlemlendiğinde, pozitif bölen sayısının asal çarpanların kuvvetlerinin 1 fazlasının çarpımından oluştuğu fark ettirilir.



TANIM

Pozitif Bölen Sayısı: $n > 1$ bir tam sayı olsun. $p_1, p_2, \dots, p_k$ farklı asal sayılar ve $r_1, r_2, \dots, r_k$ pozitif tam sayılar olmak üzere, n sayısının asal çarpanlara ayrılmış hâli

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$$

olsun. n 'nin pozitif bölenlerinin sayısı $\tau(n)$ şeklinde gösterilir.

$$\tau(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (r_k + 1) \text{ şeklinde}$$

bulunur. (τ sembolü “Tau” şeklinde okunur.)

Bir tam sayının pozitif bölen sayısı ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 4-6).



120 sayısının tüm pozitif bölenlerini ve pozitif bölen sayısını bulan bir programı metin tabanlı yazılım dili kullanarak oluşturunuz.

```
def tambolenleribulma(sayı):
    tam_bolenler = []
    pozitif_bölen_sayısı = 0
    for i in range(1, sayı + 1):
        if (sayı % i == 0):
            tam_bolenler.append(i)
            pozitif_bölen_sayısı += 1
    return tam_bolenler,pozitif_bölen_sayısı
print(tambolenleribulma(120))
```

Program Çıktısı

([1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120], 16)

Örnek:

600'den küçük kaç sayının pozitif bölenlerinin sayısı tek sayıdır?

Çözüm:

Pozitif bölenlerinin sayısı tek sayı olan sayılar tamkare sayılardır. O hâlde 600'den küçük tamkare sayılar, $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 24^2$ olup 600'den küçük pozitif bölenlerinin sayısı tek sayı olan 24 tane sayı vardır.

Örnek:

Yeni açılan bir bilim ve sanat merkezinde kurulacak olan bilişim atölyesinde, öğrencilerin malzemelelerini koyabilmeleri için dijital kilitleri olan 1'den 100'e kadar numaralandırılmış dolaplar verilmiştir. Ancak yazılımsal bir hata sonucu, dolaplardan birinin şifresi girildiğinde (yani dolap açıldığında ya da kapandığında), o dolabın numarasının katı olan dolapların da kilidi açıksa kapanıyor, kapalıysa açılıyor. Örneğin 5 numaralı dolap açıldığında ya da kapandığında, 10, 15, 20, 25, ... numaralı dolaplar da açıksa kapanıyor kapalıysa açılıyor.



Bu bilişim atölyesinde tüm dolaplar kapatıldıktan sonra şifreleri öğrencilere verilmiştir. Öğrenciler 1 numaralı dolaptan başlamak üzere sırasıyla şifrelerini girdiklerinde hangi dolaplar açık kalır?

Çözüm:

Burada önemli olan her dolabın kaç defa açılıp kapandığıdır. Eğer dolabın açılıp kapanma sayısı bir tek sayı ise dolap açık kalacaktır. Eğer dolabın açılıp kapanma sayısı bir çift sayı ise dolap kapalı kalacaktır. Yani bir dolabın numarası kaç tane sayıya bölünüyor, buna bakılmalıdır. Bu ise pozitif bölen sayısıdır.

Örneğin 24 numaralı dolap, $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ numaralı dolaplar açılıp kapandığında yani 8 defa açılıp kapanacaktır. Öyleyse 24 numaralı dolap kapalı kalacaktır.

Örneğin 36 numaralı dolap, $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ numaralı dolaplar açılıp kapandığında yani 9 defa açılıp kapanacaktır. Yani 36 numaralı dolap açık kalacaktır.

Yalnızca tamkare sayıların pozitif bölen sayısı tek sayıdır. Böylece dolap numarası yalnızca tamkare olan dolapların açık kalacağı sonucuna ulaşırız. Yani sonuç olarak 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 numaralı dolaplar açık kalacaktır.

Örnek:

Pozitif tam bölenlerinden tam olarak 4 tanesi tamkare olan bir pozitif tam sayısının pozitif tam bölen sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz? (2020-TÜBİTAK Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı 1. Aşama)

a) 48

b) 56

c) 64

d) 72

e) 80

**Çözüm:**

Pozitif tam bölenlerinden tam olarak 4 tanesi tamkare olan sayı A olsun. Bu durumda, A sayısının çarpanlarına ayrılmış şekli aşağıdaki durumlardan biri olabilir.

$$A = p_1^2 \cdot p_2^3 \cdot p_3 \dots p_k \text{ ise } \tau(A) = 3 \cdot 4 \cdot 2^{k-2} \text{ olmalı.}$$

$$\text{a) } 48 = 3 \cdot 4 \cdot 2^2 \text{ bu şartı sağlar.}$$

$$A = p_1^6 \cdot p_2 \dots p_k \text{ ise } \tau(A) = 7 \cdot 2^{k-1} \text{ olmalı.}$$

$$\text{b) } 56 = 7 \cdot 2^3 \text{ bu şartı sağlar.}$$

$$A = p_1^7 \cdot p_2 \dots p_k \text{ ise } \tau(A) = 8 \cdot 2^{k-1} \text{ olmalı.}$$

$$\text{c) } 64 = 8 \cdot 2^3 \text{ bu şartı sağlar.}$$

$$A = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \dots p_k \text{ ise } \tau(A) = 3 \cdot 3 \cdot 2^{k-2} \text{ olmalı.}$$

$$\text{d) } 72 = 3 \cdot 3 \cdot 2^3 \text{ bu şartı sağlar.}$$

$$A = p_1^3 \cdot p_2^3 \cdot p_3 \dots p_k \text{ ise } \tau(A) = 4 \cdot 4 \cdot 2^{k-2} \text{ olmalı.}$$

80 yukarıdaki durumlardan hiçbirini sağlamaz. Doğru yanıt **e) 80** seçeneğidir.

Örnek:

Pozitif tam bölen sayısı 15 olan en küçük pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır?

(2019-TÜBİTAK Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı 1. Aşama)

Çözüm:

Pozitif tam bölen sayısı 15 olan sayı A olsun. Bu durumda, A sayısı

$$A = p^2 \cdot q^4 \text{ veya } A = p^{14} \text{ şeklinde olmalıdır.}$$

Bu şartlardaki en küçük A pozitif tam sayısı ise, $A = 3^2 \cdot 2^4 = 144$ olup rakamları toplamı $1 + 4 + 4 = 9$ 'dur.

Örnek:

Verilen bir sayının karesini bölüp kendisinden küçük olan kaç sayı vardır?

Çözüm:

Verilen sayıya A diyelim. $p_1, p_2, \dots, p_k$ farklı asal sayılar ve $a_1, a_2, \dots, a_k$ pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \text{ olsun. } A^2 = p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \dots p_k^{2a_k} \text{ olur. } A^2 \text{ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı,}$$

$\tau(A^2) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_k + 1)$ olup bu pozitif bölenlerden biri A'dır. A^2 sayısının A dışındaki pozitif bölenlerinden yarısı A'dan küçük ve diğer yarısı da A'dan büyük olacaktır. Örneğin $A = 6$ olsun. Bu durumda A^2 sayısı 36 olacak ve 36'nın pozitif bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 olup bu sayılardan 4 tanesi 6'dan küçük ve yine 4 tanesi de 6'dan büyüktür.

O hâlde, A^2 sayısının A'dan küçük pozitif bölenlerinin sayısı,

$$\frac{(2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_k + 1) - 1}{2} = \frac{\tau(A^2) - 1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek:

2016² sayısını bölüp 2016'yı bölmeyen 2016'dan küçük kaç pozitif tam sayı vardır?

(2016-TÜBİTAK Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı 1. Aşama)

Çözüm:

Öncelikle 2016² sayısının pozitif bölenlerinin sayısını bulalım.

$$\begin{aligned} 2016^2 &= (2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1)^2 \\ &= 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2 \end{aligned}$$

şeklinde asal çarpanlarına ayrılır. Şu hâlde 2016² sayısının pozitif bölenlerinin sayısı

$$\begin{aligned} \tau(2016^2) &= (10 + 1)(4 + 1)(2 + 1) \\ &= 11 \cdot 5 \cdot 3 \\ &= 165 \end{aligned}$$

bulunur. Bu pozitif bölenlerden biri 2016'dır. 2016² sayısının 2016 dışındaki pozitif bölenlerinden yarısı 2016'dan küçük ve diğer yarısı da 2016'dan büyük olacaktır. Yani

$$2016^2 \text{ sayısının } 2016 \text{ 'dan küçük pozitif bölenlerinin sayısı: } \frac{165 - 1}{2} = 82 \text{ tanedir.}$$

Şimdi, 2016 sayısının pozitif bölenlerinin sayısını hesaplayalım.

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

biçiminde asal çarpanlarına ayırdığımızda, 2016 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı

$$\begin{aligned} \tau(2016) &= (5 + 1)(2 + 1)(1 + 1) \\ &= 6 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu 36 tane bölen içerisinde biri sayısının kendisidir. Öyleyse 2016 sayısının 2016'dan küçük pozitif bölenlerinin sayısı: 36 - 1 = 35 tane olur.

O hâlde sonuç olarak 2016² sayısını bölüp 2016'yı bölmeyen 2016'dan küçük pozitif tam sayıların sayısı, 82 - 35 = 47 olarak bulunur.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- “1’den büyük her tam sayı, asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türdür.” Bu yazılışın tek türlü olduğunu gösteriniz.
- Bir sayının pozitif bölenlerinin toplamı nasıl bulunur?



- Bir sayının pozitif bölenlerinin çarpımı nasıl bulunur?
- $1/2$ ve $1/5$ 'in ondalık açılımları bir adım sonra biter. Çünkü bu iki kesir devirsiz ondalık sayı olarak yazılabilir. Diğer bütün p asal sayılar için $1/p$ 'nin ondalık açılımı asla sona ermediği aritmetiğin temel teoremi kullanılarak göstermeye yönelik çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Asar, A. O. ve Arıkan, A. (2012). *Sayılar Teorisi*. Ankara. Gazi Kitabevi.

Hendy, M. D. (2001), Euclid and the fundamental theorem of arithmetic. *Historia Mathematica*, 2,189-191.

McGregor-Dorsey, Z. S. (1999). Methods of primality testing. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, 1, 133-141.

Turan, M., & NACAR, M. A. (2016). Asal sayıların Eratosten kalburu algoritması kullanılarak bulunmasında GPU ve CPU başarımlarının analizi. *Adıyaman Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 3(5), 71-76.

TÜBİTAK. 21. *Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı - 2016 Birinci Aşama Sınavı*.

TÜBİTAK. 24. *Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı - 2019 Birinci Aşama Sınavı*.

TÜBİTAK. 25. *Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı - 2020 Birinci Aşama Sınavı*.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, $450 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $1500 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3$

2. $15! = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^3$

3. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

4. 24

5. 9

6. 36

7. 18

8. 1210

9. 5

**Etkinlik Formu**

- 72, 120, 450, 1500 sayılarını asal çarpanlarına ayırınız.
- 15! sayısını asal çarpanlarına ayırınız.
- Aşağıdaki tabloda verilen sayılar ile ilgili aşağıdaki adımlar uygulanacaktır.
 - Adım:** Her sayının asal çarpanlara ayrılmış şeklini ilgili sütuna yazınız.
 - Adım:** Her sayının pozitif bölenlerini ilgili sütuna yazınız.
 - Adım:** Her sayının pozitif bölenlerinin sayısını ilgili sütuna yazınız.

Sayı	Asal Çarpanlara Ayrılmış Şekli	Pozitif Bölenleri	Pozitif Bölenlerinin Sayısı
8			
10			
12			
360			

Verilen sayının pozitif bölenlerinin sayısı ile asal çarpanlara ayrılmış hâli arasındaki ilişkiyi gözlemleyiniz. Pozitif bölen sayısını kısaca bulabileceğimiz bir yol görebildiniz mi?

- 1368 sayısının kaç tane pozitif böleni vardır?
- 3600 sayısının pozitif bölenlerinden kaç tanesi tek sayıdır?
- 9000 sayısının pozitif bölenlerinden kaç tanesi çift sayıdır?
- 3600 sayısının pozitif bölenlerinden kaç tanesi 12'nin katıdır?
- İki sayı birbirinin kendisi hariç pozitif bölenleri toplamına eşitse bu sayılara arkadaş sayılar denir. Buna göre 1184 ile arkadaş olan sayıyı bulunuz.
- 2400...0 sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı 108 olduğuna göre, sondan kaç basamağı sıfırdır?



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: ÖKLİD ALGORİTMASI VE EBOB-EKOK

- : Cebir ve Sayılar Teorisi/Bölünebilme ve EBOB-EKOK
- : 1. Tam bölünebilme ile ilgili çıkarımlarda bulunur.
2. Bölmenin algoritma olarak adlandırmasının sebebini açıklar.
3. Öklid algoritması ile iki sayının EBOB'unu ilişkilendirir.
4. EBOB ile ilgili çıkarımlarda bulunur.
5. Tam sayılarda EBOB ve EKOK ile ilgili uygulamalar yapar.

SÜRE

: 4 ders saati

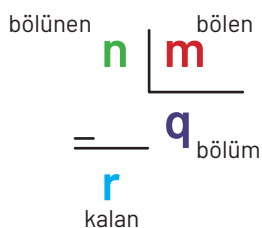
KULLANILACAK
MATERYALLER

: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Tam bölünebilme cebirsel olarak ifade edilerek öğrencilerin tam bölünebilme özelliklerini doğrulaması hedeflenmektedir. Bölme işleminin sonlu bir işlem dizisi olmasından hareketle farklı örnekler üzerinden algoritmik yapı olarak adlandırıldığını keşfettirmek amaçlanmaktadır. Çarpanlara ayırmanın zor olduğu büyük sayılar için öğrencilerin Öklid algoritmasının kullanışlılığını fark etmesi hedeflenmektedir. "Ardışık iki tam sayının EBOB'u 1'dir.", "m ile n aralarında asal ise m + n ile m·n de aralarında asaldır" gibi çıkarımları elde etmeye yönelik çalışmalara yer verilir. $ax + by = c$ şeklinde yazılan iki bilinmeyenli birinci dereceden denklemlerin tam sayı çözümlerinin varlığı ile katsayıların ortak böleni arasındaki ilişkinin keşfettirilmesi amaçlanmaktadır. Tam sayılarda EBOB ve EKOK ile ilgili gerçek hayat problemleri çözülmesi hedeflenmektedir. Elektronik tablolarda bulunan EBOB ve EKOK fonksiyonlarından yararlanmasına yönelik uygulamalara yer verilir.

Başlarken...



Soldaki resimde bir bölme işlemi görülmektedir. Bölünen ve bölenin **tam sayı** olduğu bir bölme işleminde bölünen negatif olabilir mi? Tabii olabilir, peki bölen negatif olabilir mi? Bölen de negatif olabilir. Peki bölünenle ilgili başka ne söylenebilir? Bölünenle ilgili şartımız 0 olamayacağıdır. Peki bölümle ilgili ne söylenebilir? Bölüm de negatif olabilir. Ancak en önemli şartımız kalanla ilgilidir. Kalanlı bölme yaparken n sayısının m sayısına böldüğümüzde kalanın m'nin



mutlak değerinden küçük bir doğal sayı olmasını istiyoruz. O hâlde bu şartlara uyarak aşağıdaki bölme işlemlerini kalanlı olarak yapınız.

- 29'u 6'ya kalanlı bölün.
- 29'u -6'ya kalanlı bölün.
- -29'u 6'ya kalanlı bölün.
- -29'u -6'ya kalanlı bölün.

- $29 = 6 \cdot 4 + 5$ şeklinde yazılabilir. Kalan $0 \leq 5 < |6|$ şartını sağlamaktadır.
- $29 = (-6) \cdot (-4) + 5$ şeklinde yazılabilir. Kalan $0 \leq 5 < |-6|$ şartını sağlamaktadır.
- $-29 = 6 \cdot (-5) + 1$ şeklinde yazılabilir. Kalan $0 \leq 1 < |6|$ şartını sağlamaktadır.
- $-29 = (-6) \cdot 5 + 1$ şeklinde yazılabilir. Kalan $0 \leq 1 < |-6|$ şartını sağlamaktadır.

Görüldüğü üzere bölünen, bölen ve bölüm tam sayı olurken kalan bölenin mutlak değerinden küçük bir doğal sayıdır.

Teorem: (Bölme Algoritması): $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $m \neq 0$ olsun. O zaman

$$0 \leq r < |m| \text{ ve } n = qm + r$$

koşullarını sağlayan $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır ve bu koşulları sağlayan q ve r tam sayıları tektir.

Tam sayılarda bölme işlemi yapmaya yönelik örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 1).

Örnek:

Etkinlik Formu Soru 2

Tek sayıların genel formunu bölme algoritmasını kullanarak gösteriniz.

Çözüm:

Tek sayı 2 ile kalansız bölünemeyen sayılardır. Diğer bir ifade ile 2 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sayılara tek sayılar denir. O hâlde bölme algoritmasına göre n bir tek tam sayı ise her m tam sayısı için $n = 2m + 1$ şeklinde gösterilir. Tek tam sayılar $n = 2m - 1$ olarak da ifade edilebilir.

Örnek:**Etkinlik Formu Soru 3**

Bir tam sayının karesinin 5 ile bölümünden hangi kalanlar elde edilemez?

Çözüm:

$$n = 5k \text{ ise } (5k)^2 = 25k^2$$

$$n = 5k + 1 \text{ ise } (5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1$$

$$n = 5k + 2 \text{ ise } (5k + 2)^2 = 25k^2 + 20k + 4$$

$$n = 5k + 3 \text{ ise } (5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9$$

$$n = 5k + 4 \text{ ise } (5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16$$

olduğuna göre 5 ile bölümünden kalanlar $\{0,1,4,9,16\}$ yani $\{0,1,4\}$ 'tür. O hâlde 2 ve 3 kalanları elde edilemez.

Tam sayılarda bölme işlemi yapmaya yönelik örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 4).

Tam Bölünebilme

Eğer bir tam sayı, herhangi bir tam sayıyı kalansız bölüyorsa buna tam bölünme denir. Dolayısıyla $n = qm + r$ eşitliğindeki $r = 0$ olur ve $n = mq$ olarak yazılabilir.

TANIM

Herhangi n ve $m \neq 0$ tam sayıları için $n = qm$ olacak şekilde bir $q \in \mathbb{Z}$ varsa, m, n 'yi böler denir ve $m|n$ şeklinde gösterilir. Aksi hâlde m, n 'yi bölmeyiz denir ve $m \nmid n$ ile gösterilir.

Örneğin; $4|16, -4|20, -4|-24$ iken $4 \nmid 17$ 'dir.

Etkinlik Formu Soru 5

Aşağıdaki tam bölme ile ilgili verilen özellikleri inceleyiniz. Farklı $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ için örnekler vererek doğruluklarını keşfediniz.

1. $m|0, 1|n$
2. $n|n$ (Yansıma Özelliği)
3. $a|1$ olması için gerek ve yeter şart $a = \pm 1$ olmasıdır.



4. Eğer $m|n$ ve $k|l$ ise $mk|nl$ 'dir.
5. Eğer $mk|nk$ ve $k \neq 0$ ise $m|n$ 'dir.
6. Eğer $m|n$ ve $n|k$ ise $m|k$ 'dir. (Geçişme Özelliği)
7. $m|n$ ve $n|m$ olması için gerek ve yeter şart $m = \mp n$ olmasıdır.
8. Eğer $m|n$ ve $n \neq 0$ ise $|m| \leq |n|$ 'dir.
9. Eğer $m|n$ ve $m|k$ ise $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $m|nx \mp ky$ 'dir.
10. Eğer $m|n$ ve $m|k \mp n$ ise $m|k$
11. Eğer $m|n$ ise, $a \in \mathbb{Z}$ için, $m^a|n^a$ olur.

İspat:

9. $m|n$ ise $n = rm$ ve $m|k$ ise, $k = sm$ olacak şekilde r ve s tam sayıları vardır. Buna göre $nx \mp ky = rmx \mp smy = m(rx \mp sy)$ olduğundan $m|nx \mp ky$ olur.
10. $m|n$ ise $n = rm$ ve $m|k \mp n$ ise $k \mp n = sm$ olacak şekilde r ve s tam sayıları vardır. Buna göre, $k = sm \mp n = sm \mp rm = m(s \mp r)$ olduğundan, $m|k$ olur.

Örnek:

$7|2x+3y \Leftrightarrow 7|x+5y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$7|2x+3y \Rightarrow 7|11(2x+3y) \Rightarrow 7|22x+33y \Rightarrow 7|x+5y \text{ olur.}$$

Diğer taraftan, $7|x+5y \Rightarrow 7|2(x+5y) \Rightarrow 7|2x+10y \Rightarrow 7|2x+3y$ olur.

Örnek:

Kaç farklı n tam sayısı için, $\frac{5n-17}{3n-5}$ bir tam sayı olur? (UİMO-2007)

Çözüm:

$$3n-5|5n-17 \text{ ise } 3n-5|3(5n-17)-5(3n-5)=-26 \text{ olur.}$$

$3n-5 \in \{-1, 1, -2, 2, -13, 13, -26, 26\}$ olur. n tam sayısı olduğuna göre $n \in \{1, 2, 6, -7\}$ elde edilir.

Tam sayılarda tam bölme işleminin özellikleri ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 6).

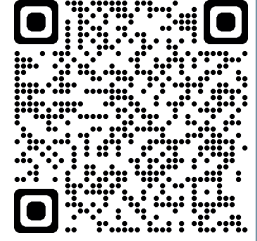
En Büyük Ortak Bölen



Kenar uzunlukları 12 br ve 16 br olan dikdörtgen şeklindeki bir banyonun zemini eş kareler şeklindeki fayanslarla kaplanacaktır. En az sayıda fayans kullanılması için her bir karenin kenar uzunluğu kaç br olmalıdır?

Bu sorunun çözümü için öğrencilerin etkinlik karekodu içerisindeki EBOB etkinliğini açarak dinamik matematik yazılımı ile denemeler yapması istenir. n sürgüsü hareket ettirilerek eş karelerin bir kenarının uzunluğunun en büyük olmasını sağlayacak durum keşfettirilir.

$n=4$ olduğunda zeminin hiç boşluk kalmadan kaplandığı gözlenir. O hâlde 12 ve 16'yı bölen en büyük sayının 4 olduğu görülür.



TANIM

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların **en büyük ortak böleni** denir. Kısaca “EBOB” ile ifade edilir.

Etkinlikte n sürgüsünün 1 ve 2'ye getirildiğinde de fayansların tüm zemini kapladığı gözlemlenir. Ancak bu şartları sağlayan en büyük fayans boyu istendiğinden cevap 4'tür. Dolayısıyla $EBOB(12,16) = 4$ 'tür.

Öğrencilere 12 ve 16 sayılarını bölen en büyük sayıyı bulabilecekleri farklı yöntemler düşünmeleri istenir.

Birinci yöntem olarak sayıların bölenleri bulunur ve aralarından en büyüğü seçilir;

$$12 \rightarrow 12, 6, 4, 3, 2, 1$$

$$16 \rightarrow 16, 8, 4, 2, 1 \text{ olduğundan } EBOB(12,16) = 4 \text{ olarak bulunur.}$$



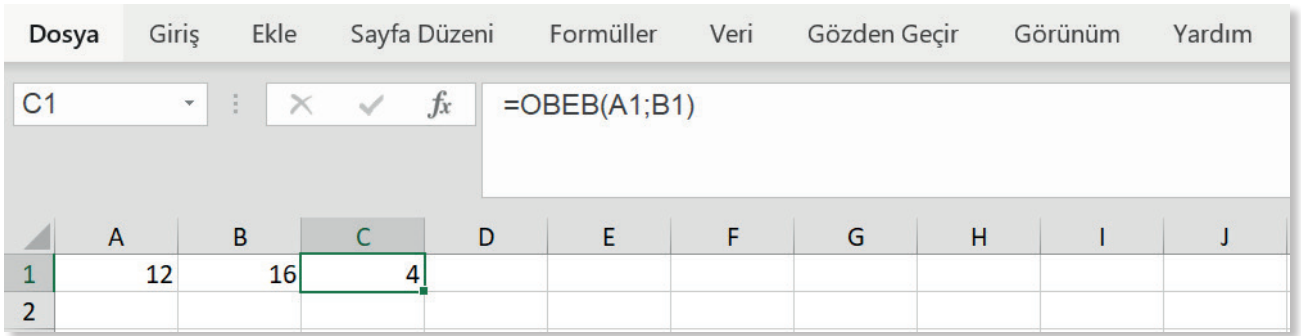
İkinci yöntem olarak iki sayı asal çarpanlarına ayrılır.

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$16 = 2^4$$

Her iki sayıyı oluşturan ortak asal çarpanlardan kuvveti küçük olanlar çarpılır ve EBOB bulunur. $2^2 = 4$ olduğundan $EBOB(12,16) = 4$ olarak bulunur.

Üçüncü yöntem olarak Excel programı açılarak A1 ve B1 hücrelerine sayılar girilir ve C1 hücresi seçilerek f_x kısmına $=OBE(B1;A1)$ yazılır. Program seçilen hücrelerdeki sayıların EBOB'unu otomatik olarak bulmaktadır.



En Büyük Ortak Bölen ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 7, 8).

Dördüncü yöntem Öklid Algoritmasını kullanmaktır. Bu yöntemin çalışma prensibini anlamak için aşağıdaki etkinliğe yer verilir.

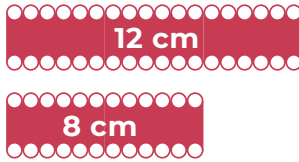
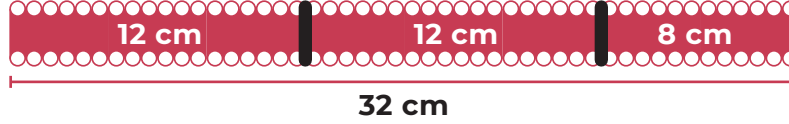
Öklid Algoritması



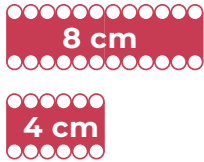
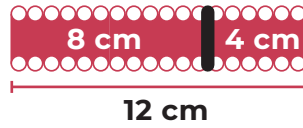
Öğrencilerin kâğıttan 32 cm'lik bir şerit kesmeleri istenir. Daha sonra 12 cm'lik bir şerit daha kesmeleri istenir. Problem cümlesini şu şekilde ifade ediyoruz: "Uç uca eklendiğinde 32 cm'lik ve 12 cm'lik bu iki şeridi de oluşturabilecek en uzun şerit uzunluğu kaçtır?" O hâlde bir sayı belirlenmesi gerekiyor ki bu sayı her iki sayıyı da bölecek en büyük sayı olmalı.



Herhangi bir işlem yapmadan ilk önce şu sorunun cevabını düşünelim. “12cm’lik şeridi oluşturabileceğimiz en uzun şeridin boyu kaç cm’dir?” Bu sorunun ilk akla gelen cevabı 12’dir. O hâlde yeterince şanslıysak 12 cm’lik şeritlerle her ikisini de oluşturabiliriz. Eğer oluşturabilirsek sorun çözülmüş demektir. O zaman 12 cm’lik çubuğu 32 cm’lik çubuğun üzerine kaç adet ihtiyacımız varsa o kadar yerleştirelim. Ancak amacımıza ulaşamadık çünkü 8 cm’lik bir şerit arttı.

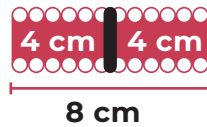


Şimdi şu şekilde düşünelim. 32 cm’lik çubuğun 24 cm’lik kısmını zaten 12 cm’lik şeritlerle kapladım. Sorun olan kısım 8 cm’lik parça. O hâlde problemimizi şu şekilde güncelleyelim: “Uç uca ekleyerek 12 cm ile 8 cm’lik bu iki şeridi de oluşturabilecek en uzun şerit uzunluğu kaçtır?” O zaman yukarıda yapmış olduğumuz işlemleri bu sefer 12 cm ve 8 cm’lik şeritler için tekrarlayalım.



8 cm’lik şeridi 12 cm’lik şeridin üzerine koyalım ve kaç adet ihtiyacımız varsa o kadar yerleştirelim. Ancak yine amacımıza ulaşamadık ve 4 cm şerit arttı. 12 cm’lik şeridin 8 cm’lik kısmı zaten kapladık. Sorun olan kısım geri kalan 4 cm’lik parça. O hâlde problemimizi şu şekilde güncelleyelim: “8 cm ile 4 cm’lik bu iki şeridi de oluşturabilecek en uzun şerit uzunluğu kaçtır?” O zaman yukarıda yapmış olduğumuz işlemleri bu sefer 8 cm ve 4 cm’lik şeritler için tekrarlayalım.

4 cm’lik şeridi 8 cm’lik şeridin üzerine koyalım ve kaç adet ihtiyacımız varsa o kadar yerleştirelim. Bu sefer amacımıza ulaştık ve 4 cm’lik şeritlerle 8 cm’lik şeridi tam olarak oluşturduk.



O hâlde problemimizi şu şekilde çözmüş olduk: 4 cm’lik şeritler 12 cm ve 32 cm uzunluktaki şeritlerin her ikisini de oluşturabilecek en uzun boydaki şeritlerdir.

**TANIM****Öklid Algoritması ile EBOB'un Bulunması**

Bölme algoritmasının art arda uygulanmasıyla;

$$n = mq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < m$$

$$m = r_1q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, 0 \leq r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1}, 0 = r_{k+1}$$

elde edilecektir. Bu algoritmaya Öklid Algoritması denir. Burada, kalanlar, görüldüğü gibi $r_1, r_2, \dots, r_k, 0$ olmaktadır. 0 kalanından önce elde edilen son kalan olan r_k sayısı $EBOB(n, m)$ i vermektedir.



Şimdi yukarıdaki şerit etkinliğini Öklid algoritmasını kullanarak tekrar yapalım. Problemimiz; “32 ve 12’yi bölen en büyük sayı kaçtır?” şeklindedir. Diğer bir ifade ile $EBOB(32, 12)$ kaçtır?

$$32 = 12 \cdot 2 + 8, 0 \leq 8 < 12$$

$$12 = 8 \cdot 1 + 4, 0 \leq 4 < 8$$

$8 = 4 \cdot 2 + 0$ elde edilir. 0 kalanından önceki son kalan olan 4; 12 ve 32’nin EBOB’unu vermektedir. $EBOB(32, 12) = 4$ ’tür.

Teorem:

Herhangi x ve y tam sayıları için $EBOB(a, b) = EBOB(a, ax + by)$ eşitliği vardır.

İspat:

$EBOB(a, b) = d$ ve $EBOB(a, ax + by) = k$ olsun. $d|a$ ve $d|b$ olduğundan, $d|ax + by$ olacaktır. O hâlde, $d|k$ olur. Diğer taraftan, $k|a$ ve $k|ax + by$ olduğundan, k sayısı bu iki sayının farklarını da bölecektir. Böylece, $k|ax - (ax + by) = -by$ ise $k|b$ olur. Bu durumda, $k|d$ olur. Böylece $d|k$ ve $k|d$ olduğundan $k = d$ olur.

Örnek:**Etkinlik Formu Soru 9**

$$EBOB(60,105) = ?$$

$$EBOB(60,105) = EBOB(60,105 - 60) = EBOB(60,45) = EBOB(60 - 45,45) = EBOB(15,45) = 15$$

Öklid Algoritması ile ilgili örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 10).

Örnek:

$EBOB(15,64)$ ifadesinin değerini Öklid algoritması kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$$64 = 15 \cdot 4 + 4$$

$$15 = 4 \cdot 3 + 3$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

$3 = 1 \cdot 3 + 0$; 0 kalanından önceki son kalan olan 1; 15 ve 64'ün EBOB'unu vermektedir.

$$EBOB(15,64) = 1 \text{ 'dir.}$$

“15 ve 64 sayılarının arasında nasıl bir ilişki vardır?” sorusu ile öğrencilerin aralarında asal sayıların en büyük ortak böleninin 1 olduğunu keşfetmeleri beklenir.

Öklid Algoritması ile aralarında asal sayıların EBOB'unun 1 bulunacağı örneklerle yer verilir (Etkinlik Formu Soru 11).

Etkinlik Formu Soru 11'in çözümünden sonra ardışık sayıların aralarında asal olduğu bilgisinden ardışık sayıların EBOB'unun 1 olduğu fark ettirilir.

Örnek:**Etkinlik Formu Soru 12**

$\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 4n + 3}$ ifadesinin sadeleştirilemez olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$EBOB(n^2 + 4n + 3, n^2 + 3n + 1) = 1 \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$

$$n^2 + 4n + 3 = 1 \cdot (n^2 + 3n + 1) + (n + 2)$$

$$n^2 + 3n + 1 = n \cdot (n + 2) + (n + 1)$$



$$n + 2 = 1 \cdot (n + 1) + 1$$

$n + 1 = 1 \cdot n + 1 + 0$ olarak yazılabilir. 0'dan önceki son kalan 1 olduğuna göre

$EBOB(n^2 + 4n + 3, n^2 + 3n + 1) = 1$ 'dir. Dolayısıyla verilen ifade sadeleşmez.

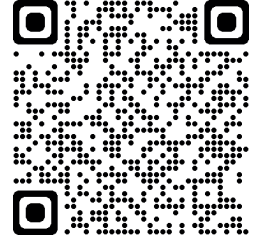
En Küçük Ortak Kat



Kenar uzunlukları 3 br ve 4 br olan dikdörtgen şeklindeki fayanslar ile kare şeklindeki bir banyo zemini kaplanacaktır. Fayansların yerleştirilebilmesi için banyonun zemininin bir kenar uzunluğu en az kaç br olmalıdır?

Bu sorunun çözümü için öğrencilerin etkinlik karekodu içerisindeki EKOK etkinliği için dinamik matematik yazılımı ile denemeler yapması istenir. n ve m sürgüleri hareket ettirilerek kaç adet fayans ile kare şeklinde bir banyonun kaplanabileceği keşfedilir.

$n=3$ ve $m=4$ için bir kare yapılabildiği görülür ve karenin bir kenarının 12 br olduğu fark edilir. 12 br; 3 br ve 4 br'in en küçük ortak katı olarak bulunur.



TANIM

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların **en küçük ortak katı** denir. Kısaca "EKOK" ile ifade edilir.

Etkinlikte n sürgüsü 6'ya ve m sürgüsü 8'e getirildiğinde bir kenarı 24 br olan bir kare oluşturulabilir. Ancak bu şartları sağlayan en küçük kare banyo boyunun kenarı istendiğinden cevap 12 br'dir. Dolayısıyla $EKOK(4, 6) = 12$ 'dir.

Öğrencilere 4 ve 6 sayılarının en küçük ortak katını bulabilecekleri farklı yöntemler düşünmeleri istenir.

Birinci yöntem olarak sayıları katları bulunur ve aralarından en küçüğü seçilebilir;

$$4 \rightarrow 4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots$$

$$6 \rightarrow 6, 12, 18, 24, 30, \dots \text{ olduğundan } EKOK(4, 6) = 12 \text{ olarak bulunur.}$$

İkinci yöntem olarak iki sayı asal çarpanlarına ayrılır.

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

Her iki sayıyı oluşturan asal çarpanlardan kuvveti büyük olanlar çarpılır ve EKOK bulunur. $2^2 \cdot 3 = 12$ olduğundan $EKOK(4,6) = 12$ olarak bulunur.

Üçüncü yöntem olarak elektronik tablo yazılımı açılarak A1 ve B1 hücrelerine sayılar girilir ve C1 hücresi seçilerek f_x kısmına $=OKEK(A1;B1)$ yazılır. Program seçilen hücrelerdeki sayıların EKOK'unu otomatik olarak bulmaktadır.

	A	B	C	D	E	F
1	4	6	12			
2						

En Küçük Ortak Kat ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 13, 14).

EBOB ve EKOK Özellikleri

a ve b en az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayı; $EBOB(a,b) = d$ ve $EKOK(a,b) = r$ olmak üzere;

1. $d|a$ ve $d|b$.
2. $EBOB(a,b) = EBOB(-a,b) = EBOB(a,-b) = EBOB(-a,-b)$
3. $a = dx$ ve $b = dy$ olacak şekilde aralarında asal x ve y tam sayıları vardır.
4. $c|a$ ve $c|b$ ise $c|d$ olur.
5. $a|c$, $b|c$ ve $EBOB(a,b) = 1$ ise $a \cdot b|c$ olur.
6. $a|r$ ve $b|r$ olur.
7. a veya b 'den herhangi biri sıfır ise, $EBOB(a,0) = |a|$ 'dir.
8. $EBOB(a,b) \cdot EKOK(a,b) = a \cdot b$ 'dir.

EBOB ve EKOK ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 15-18).



Metin tabanlı yazılım programı kullanılarak EBOB fonksiyonunu yazınız.

```
def ebob(a,b):  
    if(b==0):  
        return a  
    else:  
        return ebob(b,a%b)  
a=12  
b=16  
print("{} ile {}'nin EBOB'u {}".format(a,b,ebob(a,b)))
```

Program Çıktısı

12 ile 16'nin EBOB'u 4



Metin tabanlı yazılım programı kullanılarak EKOK fonksiyonunu yazınız.

```
def ebob(a,b):  
    if(b==0):  
        return a  
    else:  
        return ebob(b,a%b)  
def ekok(a, b):  
    return (a / ebob(a, b)) * b  
a = 4  
b = 6  
print("{} ile {}'nin EKOK'u {}".format(a,b,ekok(a,b)))
```

Program Çıktısı

4 ile 6'nin EKOK'u 12.0

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Tam sayılarda tam bölme işleminin özelliklerini ispatlayınız.
- Bölme algoritmasının ispatını araştırınız.
- EBOB ve EKOK ile ilgili özellikleri ve teoremi ispatlayınız.

KAYNAKLAR

- Akıllı R., Böge H. (2020) *Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 8. Sınıf Ders Kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Gürlü Ö. (2013). *Olimpik Matematik Serisi Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık İçin Meraklısına Sayılar Teorisine Giriş*. Altın Nokta Yayınevi.
- Nesin A. (2019). *Fen Liseleri için Matematik 3 Tam sayılar Yapısı*. Nesin Yayıncılık.
- ÖSYM (2021). *Alan Yeterlilik Testi (Ayt) Soru ve Cevapları*. https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2021/YKS/TSK/ayt_yks_2021.pdf (Erişim Tarihi: 14.07.2021).
- Özdemir M. (2020). *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık-3 Sayılar Teorisi*. Altın Nokta Yayınevi.
- TÜBİTAK, (2007). *Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı Soru ve Cevapları*.
- TÜBİTAK, (2020). *Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı Soru ve Cevapları*.
- TÜBİTAK, (2021). *Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı Soru ve Cevapları*.
- Yelkenkaya N. *Sayılar Teorisi Ders Notları*. İstanbul Kültür Üniversitesi .

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlik Formu Cevapları

1.

Bölünen	Bölen	Bölüm	Kalan
44	3	14	2
44	-3	-14	2
-44	3	-15	1
-44	-3	15	1

2. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

3. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

4. 1

5. Uygulama

6. $\{\mp 1, \mp 2, \mp 4, \mp 5, \mp 10, \mp 20\}$ olmak üzere 12'dir.

7. 15

8. 105

9. 15

10. 113

11. 1

12. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

13. 1350

14. 5

15. 7

16. $EBOB(50^{60}, 60^{50}) = 2^{60} \cdot 5^{50}$

$$EKOK(50^{60}, 60^{50}) = 2^{100} \cdot 3^{50} \cdot 5^{120}$$

17. 41

18. 41

Etkinlik Formu

1. Aşağıda verilen bölme işlemlerini yapınız.

Bölünen	Bölen	Bölüm	Kalan
44	3		
44	-3		
-44	3		
-44	-3		

2. Tek sayıların genel formunu bölme algoritmasını kullanarak gösteriniz.
3. Bir tam sayının karesinin 5 ile bölümünden hangi kalanlar elde edilemez?
4. x , 3'e bölünmeyen bir tek sayı ise x^2 'nin 3'e bölümünden kalan kaçtır?
5. Aşağıdaki tam bölme ile ilgili verilen özellikleri inceleyiniz. Farklı $m, n \in \mathbb{Z}$ için örnekler vererek doğruluklarını keşfediniz.

1. $m|0, 1|n$

2. $n|n$ (Yansıma Özelliği)

3. $a|1$ olması için gerek ve yeter şart $a = \pm 1$ olmasıdır.

4. Eğer $m|n$ ve $k|l$ ise $mk|nl$ 'dir.

5. Eğer $mk|nk$ ve $k \neq 0$ ise $m|n$ 'dir.

6. Eğer $m|n$ ve $n|k$ ise $m|k$ 'dir. (Geçişme Özelliği)

7. $m|n$ ve $n|m$ olması için gerek ve yeter şart $m = \pm n$ olmasıdır.

8. Eğer $m|n$ ve $n \neq 0$ ise $|m| \leq |n|$ dir.

9. Eğer $m|n$ ve $m|k$ ise $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $m|nx \mp ky$ 'dir.

10. Eğer $m|n$ ve $m|k \mp n$ ise $m|k$

11. Eğer $m|n$ ise, $a \in \mathbb{Z}$ için, $m^a|n^a$ olur.

6. n bir tam sayı olmak üzere $\frac{3n-8}{n+4}$ koşulunu sağlayan kaç farklı n değeri vardır?



7. Bir firma boyutları 72 m ve 120 m olan dikdörtgen şeklindeki salonun zeminini halı ile kaplayacaktır. Bu iş için eş ölçülü olacak şekilde en az kaç adet kare şeklinde halı parçası kullanılacağını bulunuz.
8. Bir sayının 20 ile EBOB'u 5 ve 28 ile EBOB'u 7'ye eşitse, bu şartı sağlayan 100'den büyük en küçük sayı kaçtır?
9. $EBOB(60,105) = ?$
10. $EBOB(791,12543) = ?$
11. $EBOB(89,90) = ?$
12. $\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 4n + 3}$ ifadesinin sadeleştirilemez olduğunu gösterin.
13. Boyutları 12 cm, 18 cm ve 20 cm olan tuğlaların en az kaç tanesiyle bir küp oluşturulabilir?
14. Hızları dakikada 20 m, 30 m, 50 m olan üç koşucu 600 m'lik dairesel bir pistte aynı anda aynı noktadan aynı yöne koşmaya başlıyorlar. Tekrar üçü yan yana geldiği ana kadar hızlı olan kaç tur atmıştır?
15. $a > b$ ve $EKOK(a,b) - EBOB(a,b) = 28$ koşullarını sağlayan kaç farklı (a,b) pozitif tam sayı ikilisi vardır? (Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı -2020)
16. 60^{50} sayısı ile 50^{60} sayısının EBOB'unu ve EKOK'unu bulunuz.
17. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,
 $EBOB(m,n) + EKOK(m,n) = 289$ ve $m + n \neq 289$ olduğunu biliniyor. Buna göre $m+n$ toplamı kaçtır? (AYT-2021)
18. n , 10^{10} ve 16^{10} sayılarının en küçük ortak katı 20^{20} olacak şekilde kaç farklı n pozitif tam sayısı vardır? (Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı -2021)



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: BÖLÜNEBİLME KURALLARI
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Bölünebilme ve Ebob-Ekok
KAZANIMLAR	: Bölünebilme kurallarını ispat eder.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 gibi sayılara bölünebilme kurallarının modüler aritmetik özellikleriyle ispatlanması amaçlanmaktadır. Bölünebilme kurallarını sınıflandırma (3 ve 9 ile bölünebilme için rakamlar toplamı 2, 4, 5, 8, 10, 16 ile bölünebilme için son basamaklarını inceleme vb.) çalışmalarının ve farklı bölünebilme kurallarının uygulamalarının yapılması hedeflenmektedir.

Başlarken...

İskoç bilim insanı ve matematikçisi olan John Napier (1550 – 1617) matematik işlemlerini basitleştirmek için yaptığı çalışmalar sonucunda “Napier Kemikleri” adı verilen bir hesaplama sistemi geliştirmiştir. “Napier Çubukları” olarak da adlandırılan sistem sayesinde insanların zorlandığı çarpma, bölme ve karekök alma gibi işlemleri kolayca yapılabilir hâle getirmiş ve o zamanki ticarete sıkça kullanılmıştır. Özellikle uzun sayıların bölme işleminde sağladığı kolaylık sayesinde, kullandığı sistem günümüze kadar gelmiştir.



Matematik dersi sırasında Özhan, öğretmeninin “Sıfır hariç bütün rakamlara bölünen en küçük doğal sayı nedir?” sorusuna hemen parmak kaldırarak “Sıfırdır öğretmenim, çünkü bir gün televizyon izlerken cep telefonu ekranında arama sırasında görülen bütün sayıların çarpımı sorulmuştu ben de bilmiştim. Çünkü içinde bir tane sıfır bile olsa çarpım sıfır olur.” demiştir.



Öğretmen soruyu “Sıfır hariç bütün rakamlara bölünen en küçük pozitif doğal sayı olarak değiştirirsek sonuç kaç olur?” diye sınıfa tekrar sormuştur. Öğrencilere bu soruyu rakamların çarpımı olarak düşünelim ipucunu verdikten sonra cevabı bulan olup olmadığını sorar, Özhan cevabın 2520 olduğunu söyler.

Özhan, soruyu çözerken $2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3$ sayılarını çarptığını söylemiştir.

Öğretmen, diğer öğrencilere neden Özhan’ın sorunun çözümünü yaparken 4, 6, 8 ve 9 sayılarını kullanmadığını sorar. Sizce neden kullanmamıştır?



TANIM

Bölünebilme kavramı, herhangi iki a , b doğal sayıları için, eğer $a \cdot n = b$ eşitliğini sağlayan bir n doğal sayısı varsa a , b ’yi böler (veya a böler b) denir; $a \mid b$ olarak yazılır.

Bölünebilme Kuralları



Öğrencilere aşağıdaki sorular sorularak 2 ile bölünebilme kuralı keşfettirilmeye çalışılır.

- 2020 adet bilyeyi Ferhat ile Ahmet eşit olarak paylaşabilir mi?
- 2021 adet bilyeyi Ferhat ile Ahmet eşit olarak paylaşabilir mi?

2 ile Bölünebilme Kuralı:

Bölmek istediğiniz sayının birler basamağında 0, 2, 4, 6, 8 varsa bu sayı 2 ile kalansız bölünebilir. Kısaca çift sayılar 2 ile kalansız bölünür.

İspat:

Bir pozitif tam sayının onluk sistemde çözümlenmesinde onlar ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerlerinde 10 çarpanı olmasından dolayı 2'nin tam katıdır, dolayısıyla 2 ile tam bölünür. Bu sayının 2 ile tam bölünmesi birler basamağındaki rakama bağlıdır. Yani; birler basamağındaki rakam 2'nin tam katı ise bu sayı 2 ile tam bölünür, 1'ler basamağındaki rakam 2'nin tam katı değil ise bu sayı 2 ile tam bölünmez. Örneğin:

ABCDE beş basamaklı bir sayı olsun.

$$\begin{aligned}
 ABCDE &= 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E \\
 &= 2 \cdot (5000 \cdot A + 500 \cdot B + 50 \cdot C + 5 \cdot D) + E \\
 &= 2 \cdot \text{Kat} + E
 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda E sayısı 2 ile bölünürse ABCDE sayısı da 2 ile tam bölünür.



Öğrencilere aşağıdaki sorular sorularak 3 ile bölünebilme kuralı keşfettirilmeye çalışılır.

3'ten 99'a kadar üçer ritmik sayarken oluşan sayılardan herhangi beş sayının rakamları toplamını bir kâğıda yazın. Acaba ortak bir özellikleri var mı?

3 ile Bölünebilme Kuralı:

Bölmek istediğiniz sayının tüm rakamlarının toplamı 3'ün katlarını oluşturuyorsa bu sayı 3'e kalansız bölünebiliyor denir.

Bunu örnekle gösterelim. 5367 sayısı için $5+3+6+7=21$ bulunur ki 21 sayısı 3'ün katı olduğundan bu sayı 3'e kalansız bölünebilir.

Örneğin; Beş basamaklı bir sayıda kuralın doğruluğunu onluk sistemde çözümleme yaparak gösterelim. Daha fazla basamaklı sayılar için de benzer çözümler yapılarak 3 ile bölünebilme kuralı ispatlanabilir.



ABCDE beş basamaklı bir sayı olsun.

ABCDE	$= 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D$
	$= 9999 \cdot A + A + 999 \cdot B + B + 99 \cdot C + C + 9 \cdot D + D + E$
	$= 3 \cdot (3333 \cdot A + 333 \cdot B + 33 \cdot C + 3 \cdot D) + A + B + C + D + E$
	$= 3 \cdot \text{Kat} + A + B + C + D + E \text{ olur.}$

Bu durumda ABCDE sayısının 3 ile bölünebilmesi için $A+B+C+D+E$ toplamının 3'ün katı olması gerekir.

4 ile Bölünebilme Kuralı:

Bölmek istediğiniz sayının son iki basamağı 00 veya 4'ün katıysa bu sayı 4 ile kalansız bölünebilir. Örneğin; 5400, 6804, 7808, 8812, 9416 sayılarının son iki basamakları 4'ün katları olduğu için bu sayılar 4 ile kalansız bölünebilirler.

ABCDE sayısının 4 ile bölünebilme kuralını bulmaya yönelik uygulamara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1)

9 ile Bölünebilme Kuralı:

Bölmek istediğiniz sayının tüm rakamlarının toplamı 9'un katlarını oluşturuyorsa, bu sayı 9'a kalansız bölünabiliyor denir.

3 ile bölünebilme kuralının ispatının aslında 9 ile bölünebilme kuralından elde edildiği vurgulanır.

11 ile Bölünebilme Kuralı:

Bölmek istediğiniz sayının tüm rakamlarını birler basamağından başlayarak sırayla +, -, +, -, +, -, ile işaretlendirilerek (çarpılarak) toplanır. Oluşan toplam 11'in katlarını oluşturuyorsa bu sayı 11'e kalansız bölünabiliyor denir.

İspat:

ABCDE beş basamaklı sayı olsun. Çözümleme yaparken 10 ve katlarına en yakın 11 sayısının katları olan sayıları bularak başlayalım. Örneğin 10.D yerine 11.D-D yazalım. 11, 99, 1001, 9999 sayıları 11'in katlarıdır.

ABCDE	$= 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D$
	$= 9999 \cdot A + A + 1001 \cdot B - B + 99 \cdot C + C + 11 \cdot D - D + E$
	$= (9999 \cdot A + 1001 \cdot B + 99 \cdot C + 11 \cdot D) + A - B + C - D + E$
	$= 11 \cdot \text{Kat} + A - B + C - D + E \text{ olur.}$

Bu durumda ABCDE sayısının 11 ile tam bölünebilmesi için $A - B + C - D + E$ sayısının 11 ile tam bölünmesi yeterlidir. Benzer şekilde genelleştirme yapılabilir.

ABCDEFG altı basamaklı sayısının çözümleme yöntemi ile 11 ile tam bölünebilme kuralını bulunuz. (Etkinlik Formu Soru 2)

7 ile Bölünebilme Kuralı:

Bölmek istediğiniz sayının tüm rakamlarını birler basamağından başlayarak üçerli gruplara ayıralım. Üçerli her grubun rakamlarını sağdan başlayarak sırasıyla 1, 3, 2 ile çarpalım; ilk üçlü grubun başına artı, sonraki grubun başına eksi sıralamasıyla bütün gruplardan çıkan sonuçları toplayalım. Çıkan sonuç 7'nin bir katı ise sayı 7 ile tam bölünür.

Örneğin 16275 sayısının 7 ile bölümünden kalanı bulalım.

Soruda verilen sayıyı sağdan başlayarak üçerli ayırırsak (16) ve (275) grupları oluşur.

$$\underbrace{-(16)}_{31} + \underbrace{(275)}_{231} = -(1 \times 3 + 6 \times 1) + (2 \times 2 + 7 \times 3 + 5 \times 1) = -9 + 30 = 21 \text{ sayısı } 7\text{'nin katı olduğundan } 16275$$

sayısı 7 ile tam bölünür.

İspat:

ABCDE beş basamaklı sayı olsun. Çözümleme yaparken 10 ve katlarına en yakın 7 sayısının katları olan sayıları bularak başlayalım. Örneğin 10.D yerine 7.D+3.D yazalım. 98, 1001, 1001, 10003 sayıları 7'nin katlarıdır.

ABCDE	= 10000 . A + 1000 . B + 100 . C + 10 . D + E
	= 10003 . A - 3 . A + 1001 . B - B + 98 . C + 2 . C + 7 . D + 3.D + E
	= (10003 . A + 1001 . B + 98 . C + 7 . D) + (-3 . A - 1 . B) + (2 . C + 3 . D + 1 . E)
	= 7. Kat + (-3 . A - 1 . B) + (2 . C + 3 . D + 1 . E) olur.

Bu durumda ABCDE sayısının 7 ile tam bölünebilmesi için $(-3 . A - 1 . B) + (2 . C + 3 . D + 1 . E)$ sayısının 7 ile tam bölünmesi yeterlidir. Benzer şekilde genelleştirme yapılabilir.

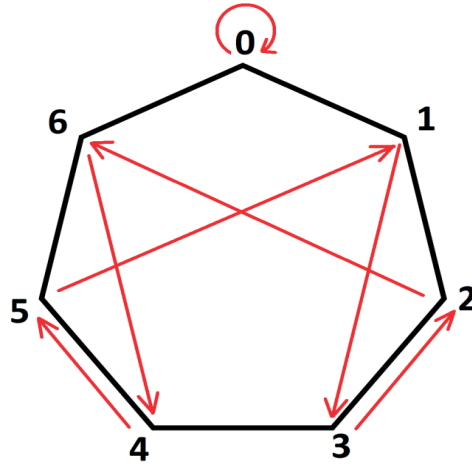
ABCDEFG altı basamaklı sayısının çözümleme yöntemi ile 7 ile tam bölünebilme kuralını bulunuz. (Etkinlik Formu Soru 3)



Ayrıca bu kuralı daha da kolaylaştıran bir şekil oluşturalım.

$$ABCDEFGH = \frac{(H \cdot 1 + G \cdot 10 + F \cdot 100)}{\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{matrix}} + \frac{(E \cdot 1000 + D \cdot 10000 + C \cdot 100000)}{\begin{matrix} 6 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \end{matrix}} + \frac{(B \cdot 10000000 + A \cdot 100000000)}{\begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix}}$$

Basamak değerlerinin 7 ile bölümünden kalanlar sıra ile 1, 3, 2, 6, 4, 5 sayılarıdır. Bu sıra hep tekrar eder. Bu sayıları bir yedigen üzerine çizip çıkan sayıları sıra ile birbirine ok ile gösterirsek ortaya aşağıdaki grafik çıkar.



Bir sayının 7 ile bölümünden kalanı bulmak için 0 düğümünden başlamalısınız. Her basamak için basamağın değeri kadar yedigen etrafında sayarak ilerliyoruz. Daha sonra basamak değiştirdiğimiz için kaldığımız sayıdan kırmızı ok ile gösterilen sayıya gidiyoruz. Eğer sayımız 0 ise olduğumuz yerde kalıyoruz. Bu işlemi sayıdaki her basamak için yapıyoruz, sadece birler basamağında kırmızı ok ile ilerlemiyoruz.

Örneğin sayımız 346 olsun. 0'dan başlayalım ve 3'e gelelim. Daha sonra basamak değiştirdiğimiz için 3'ten 3'ün taşıdığı kırmızı ok yönünde 2'ye gelelim. 2'den 4 basamak yedigen etrafında ilerleyelim. 6 sayısına geliriz. 6'dan kırmızı ok yönünde 6'nın taşıdığı sayı olan 4'e ulaşırız. 4'ten de 6 basamak yedigen etrafında ilerlediğimizde 346 sayısının 7 ile bölümünden kalanı olan 3'e ulaşmış oluruz.

Herhangi bir sayının 13 ile bölünebilme kuralını çözümleme yoluyla bulmaya yönelik uygulamalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 4)

$x = a.b$ ve a ile b aralarında asal sayılar olmak üzere bir doğal sayının x ile bölünebilmesi için hem a 'ya hem de b 'ye bölünebilmesi gerekir.

6 ile bölünebilmesi için hem 2 hem de 3 ile bölünmelidir.

12 ile bölünebilmesi için hem 4 hem de 3 ile bölünmelidir.

15 ile bölünebilmesi için hem 5 hem de 3 ile bölünmelidir.

36 ile bölünebilmesi için hem 4 hem de 9 ile bölünmelidir.

18 ile bölünebilmesi için hem 2 hem de 9 ile bölünmelidir.

45 ile bölünebilmesi için hem 5 hem de 9 ile bölünmelidir.

Bölünebilme kurallarının kullanıldığı sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5-12)

Farklı Bölünebilme Kuralları:

Bölünebilme kuralları için başka kurallar da vardır. 7 ile bölünebilme kuralı için farklı bir yöntem geliştirelim.

Kuralı kısaca açıklayalım: üç basamaklı sayımız (abc) olsun. Burada, birler basamağındaki (c) rakamını ayıralım ve yeni oluşan (ab) iki basamaklı sayısından $2.(c)$ yi çıkaralım. İddiamız $(ab)-2.(c)$ sayısı 7 ile tam bölünürse (abc) sayısı da yedi ile tam bölünür. Örneğin 154 sayısı 7 ile tam bölünür mü? 154 sayısından 4 ayrılp iki katı ayrılmamış kısımdan çıkartılır. $15-2.4=7$ sayısı 7'nin bir katı olduğundan 154 sayısı 7 ile tam bölünür.

Şimdi 7 ile bölünme kuralını ifade edelim ve ispatlayalım. 11, 13, 17 ve 19 içinde benzer kurallar geliştirelim.

7 ile bölünebilme kuralı:

Üç basamaklı sayımız (abc) olsun.

$(ab)-2.(c)$ sayısı 7 ile tam bölünüyorsa (abc) sayısı da 7 ile tam bölünür.

Kural basamak sayısı fazla olan sayılar için de tekrarlı işlemlerle uygulanabilir.

İspat:

Elde ettiğimiz sayı ile ilk verilen (abc) üç basamaklı sayısının 7 ile bölümünden kalanların aynı olacağını ispat ederek kuralın geçerliliğini kanıtlayabiliriz.

$7 \mid (ab)-2.(c)$ olsun. $(x \mid y)$ ifadesi x sayısı y sayısını tam böler anlamındadır.)

$$\Rightarrow 7 \mid 10.(ab)-20.(c)$$

$$\Rightarrow 7 \mid 10.(ab)-20.(c) \quad (\text{bu ifadeye } 7\text{'nin bir katı olan } 21.c \text{ eklemek tam bölünmeyi etkilemeyeceğinden})$$

$$\Rightarrow 7 \mid 10.(ab)-20.(c)+21.(c)=10.(ab)+c=(abc)$$

$$\Rightarrow 7 \mid (abc)$$



Bulunur ki bu durumda iddiamız ispatlanmış olur.

Örnek:

2261 sayısı 7 ile tam bölünür mü?

$226 - 2 \cdot 1 = 224$ işlem tekrar edilirse $22 - 2 \cdot 4 = 14$ sayısı 7'nin bir katı olduğundan 2261 sayısı 7 ile tam bölünür.

11 ile bölünebilme kuralı:

Üç basamaklı sayımız (abc) olsun.

$(ab) - (c)$ sayısı 11 ile tam bölünüyorsa (abc) sayısı da 11 ile tam bölünür.

İspat:

$11 \mid (ab) - (c)$ olsun. ($x \mid y$ ifadesi x sayısı y sayısını tam böler anlamındadır.)

$$\Rightarrow 11 \mid 10 \cdot \{ (ab) - (c) \}$$

$$\Rightarrow 11 \mid 10 \cdot (ab) - 10 \cdot (c) \text{ (bu ifadeye 11'in bir katı olan 11.c eklemek tam bölünmeyi etkilemeyeceğinden)}$$

$$\Rightarrow 11 \mid 10 \cdot (ab) - 10 \cdot (c) + 11 \cdot (c) = 10 \cdot (ab) + c = (abc)$$

$$\Rightarrow 11 \mid (abc)$$

Örnek:

1232 sayısı 11 ile tam bölünür mü?

$123 - 2 = 121$ işlem tekrar edilirse $12 - 1 = 11$ sayısı 11'in tam katı olduğundan 1232 sayısı 11 ile tam bölünür.

13 ile bölünebilme kuralı:

Üç basamaklı sayımız (abc) olsun.

$(ab) + 4 \cdot (c)$ sayısı 13 ile tam bölünüyorsa (abc) sayısı da 13 ile tam bölünür.

İspat:

$13 \mid (ab) + 4(c)$ olsun. ($x \mid y$ ifadesi x sayısı y sayısını tam böler anlamındadır.)

$$\Rightarrow 13 \mid 10 \cdot \{ (ab) + 4(c) \}$$

$$\Rightarrow 13 \mid 10 \cdot (ab) + 40 \cdot (c) \text{ (bu ifadeye 13'ün bir katı olan -39.c eklemek tam bölünmeyi etkilemeyeceğinden)}$$

$$\Rightarrow 13 \mid 10 \cdot (ab) + 40 \cdot (c) - 39 \cdot (c) = 10 \cdot (ab) + c = (abc)$$

$$\Rightarrow 13 \mid (abc)$$

Örnek:

1014 sayısı 13 ile tam bölünür mü?

$101+4.4=117$ işlem tekrar edilirse $11+4.7=39$ sayısı 13'ün tam katı olduğundan 1014 sayısı 13 ile tam bölünür.

Örnek:

1015 sayısı 13 ile tam bölünür mü?

$101+4.5=121$ işlem tekrar edilirse $12+4.1=16$ sayısı 13'ün tam katı olmadığından 1015 sayısı 13 ile tam bölünmez.

17 ile bölünebilme kuralı:

Üç basamaklı sayımız (abc) olsun.

$(ab)-5.(c)$ sayısı 17 ile tam bölünüyorsa ise (abc) sayısı da 17 ile tam bölünür.

İspat:

$17 \mid (ab)-5(c)$ olsun. ($x \mid y$ ifadesi x sayısı y sayısını tam böler anlamındadır.)

$$\Rightarrow 17 \mid 10.(ab)-50(c)$$

$$\Rightarrow 17 \mid 10.(ab)-50.(c) \text{ (bu ifadeye 17'nin bir katı olan 51.c eklemek tam bölünmeyi etkilemeyeceğinden)}$$

$$\Rightarrow 17 \mid 10.(ab)-50.(c)+51.(c)=10.(ab)+c=(abc)$$

$$\Rightarrow 17 \mid (abc)$$

19 ile bölünebilme kuralı:

Üç basamaklı sayımız (abc) olsun.

$(ab)+2.(c)$ sayısı 19 ile tam bölünüyorsa ise (abc) sayısı da 19 ile tam bölünür.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Çözümleme yöntemi ile 29, 23, 19, 17 gibi sayılar için bölünebilme kurallarını araştırınız.
- Napier'in Kemikleri araştırılıp materyal oluşturulması sağlanabilir.
- Bezout özdeşliğini araştırınız.
- Bir tek sayının karesinin 8 ile bölümünden kalanın 1 olduğunu gösteriniz.
- a, b, c tam sayılar olmak üzere $a.b + 9b + 81$ ve $b.c + 9c + 81$ sayıları 2005'e bölünüyorsa $c.a + 9a + 81$ sayısının da 2005'e bölündüğünü gösteriniz.



- Ardışık n tane tam sayıdan yalnızca birinin n ile bölündüğünü gösteriniz.
- a ile b tam sayılarının m doğal sayısı ile bölümünden kalan 1 ise $a.b$ 'nin de m ile bölümünden kalanın 1 olduğunu gösteriniz.
- a tam sayısının m doğal sayısı ile bölümünden kalan x ve b tam sayısının m doğal sayısı ile bölümünden kalan y ise $a.b$ 'nin m doğal sayısı ile bölümünden kalanın $x.y$ olduğunu gösteriniz.
- n tekse $10^{3n} + 1$, eğer n çiftse $10^{3n} - 1$ sayılarının sırasıyla 7'ye ve 13'e tam bölündüğünü gösteriniz.

KAYNAKLAR

Matematik Terimleri Sözlüğü (2010), Ankara Kültür, Dil ve Tarih Yüksek Kurumu, Türk Dil Kurumu Yayınları.

Nesin, A. (ty). http://www.alinesin.org/popular_math/O_6_bolunebilme.doc. Erişim tarihi:17.05.2021

Özdemir, M. (2010). *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık: Sayılar Teorisi-3*. Altın Nokta Yayınları.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Derecelendirme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. İspat

2. İspat

3. İspat

4. İspat

5.

	n ile bölümünden kalan					
Sayı	n=2	n=3	n=5	n=7	n=11	n=13
25654	0	1	4	6	2	5
123456	0	0	1	4	3	8
7856123	1	2	3	4	0	2
4005000	0	0	0	6	10	12

6. Uygulama

7. 3

8. a)16 b)44

9. {1,2,4,5,7,8}

10. 2

11. 7022

12. 20

13. 40

**Etkinlik Formu**

1. $ABCDE$ beş basamaklı sayısı için 4 ile bölünebilme kuralını çözümleme yoluyla ispatlayınız.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$

2. $ABCDEF$ altı basamaklı sayısı için 11 ile bölünebilme kuralını çözümleme yoluyla ispatlayınız.

$$ABCDEF = 100000 \cdot A + 10000 \cdot B + 1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$$

3. $ABCDEF$ altı basamaklı sayısı için 7 ile bölünebilme kuralını çözümleme yoluyla ispatlayınız.

$$ABCDEF = 100000 \cdot A + 10000 \cdot B + 1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$$

4. $ABCDEF$ altı basamaklı sayısı için 13 ile bölünebilme kuralını bulunuz.

$$ABCDEF = 100000 \cdot A + 10000 \cdot B + 1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$$

5. Aşağıda verilen tabloyu bölünebilme kurallarını kullanarak doldurunuz.

	n ile bölümünden kalan					
Sayı	n=2	n=3	n=5	n=7	n=11	n=13
25654						
123456						
7856123						
4005000						

6. 7 ile bölünebilme kuralı için yapılan grafik gibi 13 ile bölünebilme kuralının uygulanabileceği grafiği oluşturabilir misiniz?

7. Yaptığınız bu grafik ile 2486 sayısının 13 ile bölümünden kalanı bulabilir misiniz?

8. $a457b$ beş basamaklı sayısının 4'e bölümünden kalan 3, aynı sayının 3'e bölümünden kalan 2 ise

a. $a+b$ 'nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

b. $5a-b$ 'nin en büyük değeri kaçtır?

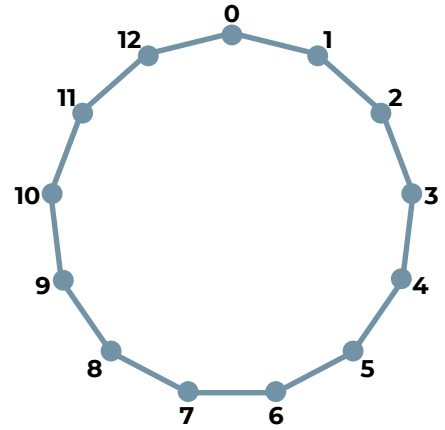
9. $5a03b$ beş basamaklı sayısının 12 ile tam bölünebilmesi için a 'nın alabileceği değerler kümesini bulunuz.

10. $18a3b$ beş basamaklı sayısını 10 ile tam bölünebilmekte , 9 ile bölümünden kalan 5'tir. Buna göre a kaçtır?

11. $7a2b$ dört basamaklı sayısının 12 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre bu durumu sağlayan en küçük dört basamaklı sayı kaçtır?

12. Dört basamaklı $ab8a$ doğal sayılarından kaç tanesi 4 ile bölünebilir?

13. Üç basamaklı abc sayısının 11 ile bölümünden kalan 7'dir. Bu sayının her rakamının sayısal değeri 4 arttırılır ve 11'e bölünürse bölüm ilk duruma göre kaç artar?





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: FARKLI TABANLARDA İŞLEMLER
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Taban Aritmetiği
KAZANIMLAR	: Bölme algoritması ile sayı tabanlarını ilişkilendirir.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, bölme algoritması kullanılarak 10'luk tabanda verilen bir sayının başka tabanlarda ve başka tabanlarda verilen sayıları onluk tabanda ifade edilebilmesi hedeflenmiştir. Ayrıca başka tabanlarda yazılan sayılar üzerinde dört işlemin nasıl yapılacağı ile taban aritmetiğinde verilen bir sayının tek veya çiftliğini belirleyen çalışmalar yapılacaktır. Öğrencilerin taban aritmetiğinin günlük hayattaki kullanımlarını fark etmesi, günlük hayatta kullandığımız 10'luk tabanla diğer tabanları kullanım açısından karşılaştırması ve farklı taban sistemleri oluşturması hedeflenmektedir.

Başlarken...

- Romen rakamlarını duydunuz mu?**

Tarihsel olarak, toplumlar farklı sayı sistemlerini kullanmışlardır. Herhangi bir taban sistemi olmayan Roma sistemi, belirli değerleri temsil etmek için belirli harfleri kullandı. LXV'yi MDII ile çarpmanın ne kadar zor olacağını bir düşünün!

- Günümüzde kullandığımız sayı sistemi ile ilgili neler söyleyebilirsiniz? Basamak değeri ne demektir?**

Kullandığımız sayı sistemi tüm işlemlerin 0,1, 2,..., 9 rakamlarından oluşturulan sayılarla yapıldığı bir sistemdir. Birler, onlar, yüzler, binler gibi basamaklardaki sayıların sayı değerleri ile basamak değerlerinin çarpımlarının birbirleriyle toplanması ile bulunur.

ROMEN RAKAMLARI

I = 1	I = 1	XI = 11
V = 5	II = 2	XII = 12
X = 10	III = 3	XIII = 13
L = 50	IV = 4	XIV = 14
C = 100	V = 5	XV = 15
D = 500	VI = 6	XVI = 16
M = 1000	VII = 7	XVII = 17
	VIII = 8	XVIII = 18
	IX = 9	XIX = 19
	X = 10	XX = 20

- Bir, on, yüz, bin gibi sayılar hangi sayının kuvvetleridir? Sizce neden bu sayı tercih edilmiştir? Bu sorunun cevabı için ellerinizdeki toplam parmak sayınızı düşünebilirsiniz.

Tarih boyunca sayıları göstermek için farklı simgeler kullanılmıştır. Matematikte sayıları yazma ve adlandırmaya sayıtlama denir. Sayma ve aritmetik işlemler yapma amacıyla insanlar uzun süreler çalışmıştır. Bu uzun sürecin sonunda, aritmetik işlemleri kolay yapmamızı sağlayan 10 tabanlı sayıtlama (Hint-Arap) sistemi kabul görmüştür. Günlük yaşamda çoğunlukla sayıları 10 tabanı ile temsil ederiz. İlk insanlar, parmak sayarak aritmetik yaptığı için, onlu (10 tabanlı) sayıtlama sistemini kullanmışlardır.

- Neden bir saat 60 dakikadır?

Babil kültüründe 60'lık sayı sisteminin kullanıldığı bilinmektedir; bu yüzden bir çemberde 360 derece olduğunu, bir saatte 60 dakika ve bir dakikada 60 saniye olduğunu söylüyoruz. O hâlde geçmişte kullanılmış farklı sayı sistemleri de vardır.

- Peki, 10 yerine 12 parmağımız olsaydı nasıl bir sayı sistemi geliştirmemiz gerekirdi?

Kullandığımız sayı sistemi 10'luk tabandır ve 10'luk tabanda verilen sayıları çözümlyerek sayıların basamak değerleri elde edilir.



TANIM

$A = a_i a_{i-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0$ için $a_i, a_{i-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ olmak üzere

$$A = a_i 10^i + a_{i-1} 10^{i-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

ifadesine A 'nın 10 tabanındaki çözümlemesi denir.

Örnek:

4738 sayısını düşünelim. Bu bir simgedir ve aşağıdaki toplamın 10 tabanına göre çözümlemesini temsil eder:

$$4738 = 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 = 4000 + 700 + 30 + 8 \text{ olur.}$$

Sayıların farklı gruplamaları üzerinden farklı tabanlar olabileceğini keşfettirmek için örnek soru yönlendirilir. (Etkinlik Formu Soru 1)

Örnek:

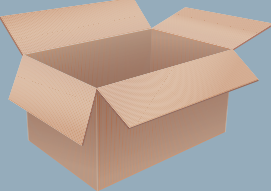
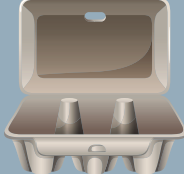
Etkinlik Formu Soru 1

Bir kümeşte bulunan yumurtalar toplanarak kutulara koyulacaktır. Yumurtaların kırılmaması için her kutuya sadece 6 yumurta sığmaktadır. Taşıma sırasında kolaylık olması için de her birine 6 kutu sığan koliler hazırlanacaktır. Kamyona yüklenirken hazırlanan koliler yine 6'şarlı olarak kasalara konulacaktır.



- Kümeste toplanan 25 yumurta için kasa, koli ve kutulardan kaç adet kullanılır? Kutulanmayan yumurta sayısı kaçtır?
- Kümeste toplanan 86 yumurta için kasa, koli ve kutulardan kaç adet kullanılır? Kutulanmayan yumurta sayısı kaçtır?
- Kümeste toplanan 100 yumurta için kasa, koli ve kutulardan kaç adet kullanılır? Kutulanmayan yumurta sayısı kaçtır?
- Kümeste toplanan 350 yumurta için kasa, koli ve kutulardan kaç adet kullanılır? Kutulanmayan yumurta sayısı kaçtır?

Çözüm:

Toplam Yumurta Sayısı	 Kasa	 Koli	 Kutu	 Yumurta
	6x6x6 = 216 Yumurta	6x6 = 36 Yumurta	6 Yumurta	1 Yumurta
25 Yumurta	0 Kasa	0 Koli	4 Kutu	1 Yumurta
86 Yumurta	0 Kasa	2 Koli	2 Kutu	2 Yumurta
100 Yumurta	0 Kasa	2 Koli	4 Kutu	4 Yumurta
350 Yumurta	1 Kasa	3 Koli	4 Kutu	2 Yumurta

O hâlde;

- $25 = 4 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 4 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0$
- $86 = 2 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$
- $100 = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0$
- $350 = 1 \cdot 216 + 3 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 1 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$ şeklinde yazılabilir.

Daha sonra bu yazım şeklinin bugünkü sayı sistemimizde bir sayının çözümlenmesine olan benzerliği tartışılır.

Yumurtaları paketlenme örneğinde yumurtaların 6 ve 6'nın kuvvetleri sayılarda gruplara bölünmesinin aslında 6'lık taban anlamına geldiği vurgulanır. Paketlenmeyen yumurtaların 6⁰'lar basamağını oluşturduğu fark ettirilir.

- $25 = 4 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 = (41)_6$
- $86 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0 = (222)_6$
- $100 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 = (244)_6$
- $350 = 1 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0 = (1342)_6$ olarak ifade edilir.

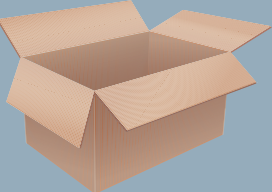
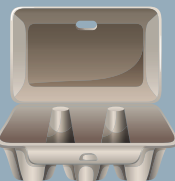
Sayıların farklı tabanlarda yazılması ve farklı tabanda yazılan sayıların 10'luk tabanda yazımını keşfettirmek için örnek soru yönlendirilir. (Etkinlik Formu Soru 2)

Örnek:

Etkinlik Formu Soru 2

Paketlenerek taşınan yumurtalar daha sonra açılarak tek tek satışa sunulacaktır.

- 5 adet kutu şeklinde paketlenmiş yumurtalara ek olarak paketlenmemiş 3 adet yumurta toplam kaç adettir?
- 2 adet kasa, 3 adet koli, 5 adet kutu şeklinde paketlenmiş yumurtalara ek olarak paketlenmemiş 3 adet yumurta toplam kaç adettir?
- 1 adet kasa, 4 adet koli şeklinde paketlenmiş yumurtalara ek olarak paketlenmemiş 1 adet yumurta toplam kaç adettir?
- 2 adet kasa, 5 adet koli, 2 adet kutu şeklinde paketlenmiş yumurtalara ek olarak paketlenmemiş 4 adet yumurta toplam kaç adettir?

 Kasa	 Koli	 Kutu	 Yumurta	Toplam Yumurta Sayısı
$6 \times 6 \times 6 = 216$ Yumurta	$6 \times 6 = 36$ Yumurta	6 Yumurta	1 Yumurta	
0 Kasa	0 Koli	5 Kutu	3 Yumurta	33 Yumurta
2 Kasa	3 Koli	5 Kutu	3 Yumurta	573 Yumurta
1 Kasa	4 Koli	0 Kutu	1 Yumurta	361 Yumurta
2 Kasa	5 Koli	2 Kutu	4 Yumurta	628 Yumurta



O hâlde;

- $(53)_6 = 5 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 5 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 33$
- $(2353)_6 = 2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 2 \cdot 216 + 3 \cdot 36 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 573$
- $(1401)_6 = 1 \cdot 216 + 4 \cdot 36 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 = 361$
- $(2524)_6 = 2 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 = 2 \cdot 216 + 5 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 628$ olarak ifade edilir.

Aynı şekilde farklı tabanda verilen sayıları çözümleyerek sayıların o tabandaki basamak değerleri elde edilir.

TANIM

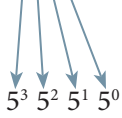
$A = (a_i a_{i-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0)_n$ için $n > a_i, a_{i-1}, \dots, a_1, a_0 \geq 0, n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$A = a_i n^i + a_{i-1} n^{i-1} + \dots + a_1 n^1 + a_0 n^0$$

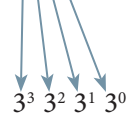
ifadesine A'nın n tabanındaki çözümlemesi denir.

Örnekler:

$$(2134)_5 = 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0$$



$$(1012)_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$



Farklı tabandaki sayıların 10'luk tabana çevrilmesi ve 10'luk tabanda çözümlemesi verilen sayıların istenilen tabanda yazılması ile ilgili örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3)

“Bir yumurta kutusuna 7 yumurta konulabilir mi? Konulamaz ise bir kutuya kaç adet yumurta konulabilir?” soruları ile öğrencinin 0, 1, 2, 3, 4, 5 adet yumurta konulabildiğini 6 yumurta konulduğunda buna 1 kutu ile ifade ettiğimizi bulması istenir. “O hâlde 6 tabanında hangi rakamlar kullanılabilir? 6 tabanında 7 sayısını kullanabilir miyim? 10 tabanında yani kullandığımız sayı sisteminde hangi rakamlar kullanılıyor? Bu rakamların 10'dan küçük olduğu dikkatinizi çekti mi? Peki, tabandan büyük bir sayıyı o tabanda yazmak için nasıl bir yöntem izlemeliyiz?” soruları ile öğrencinin tabandan büyük sayıları nasıl ifade edeceğine yönelik tartışmalar yapılır.

Örnek:

Bir yumurta kutusuna 7 yumurta konulamayacağı için $7=6+1$ şeklinde parçalanır. 1 tane kutu kullanılarak paketlenir ve 1 adet paketlenmemiş yumurta kalır. 6'lık tabanda düşünüldüğünde $7 = 1 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 = (11)_6$ olarak yazılır.

10'luk sayı sisteminde 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rakamları kullanılarak tüm sayılar ifade edilebilir. Buradan hareketle tanımda da belirtildiği gibi n tabanında bir sayı yazmak için kullanılan sayıların n 'den küçük olması gerekir.

Örnekler:

$$5 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2 = 3^3 + 2 \cdot 3^2 = (1200)_3$$

$$7 \cdot 2^3 = 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^3 = 2^5 + 2^4 + 2^3 = (111000)_2$$

Tabandan büyük sayıları istenilen tabanda yazabilmek için o sayının tabana uygun olarak parçalanması gerektiğine yönelik örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 4)

Örnek:

Yukarıdaki örnekte yumurtaları paketlerken nasıl bir yol izlediğimizi tekrar gözden geçirelim.

$100 = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0$ ifadesini bulmak için 100'ün içinde kaç tane 36 olduğuna baktık. Bu bölme anlamına gelmektedir. 2 adet 36 bulduktan sonra kalanı bulduk ve bu da bölmede kalan anlamına gelmektedir. Ancak daha büyük sayılar için bu yöntem kullanışlı mıdır? Yumurtaların paketlenmesi için daha sistematik bir yöntem bulunabilir mi? 100 sayısını 36'ya bölmek yerine iki defa 6'ya bölmek aynı anlama gelir mi?

Çözüm:

Amacımız yumurtaları 6 ve 6'nın katları olan sayılarda paketlemektir. Öncelikle yumurta sayısının 6'nın katı olup olmadığına bakalım. $100 = 6 \cdot 16 + 4$ olur. O hâlde 16 adet 6'lı kutu yapabiliriz ancak 4 adet yumurta tek kalır. Daha sonra elimizdeki 16 adet kutuyu kaç koliye koyabiliriz ona bakalım. $16=6 \cdot 2 + 4$ olur. O hâlde 2 adet koli elde edebiliriz ve 4 adet de kutu kalır. Sonuç olarak elimizde 2 koli, 4 kutu ve 4 yumurta vardır.

$$100 = (244)_6 \text{ elde ederiz.}$$

Bölme Algoritması ile Taban Değiştirme

10 tabanında verilen bir sayıyı farklı bir sayı tabanına çevirmek için bölme işlemini algoritmik bir şekilde yapabiliriz. Bu sistemin adı bölme algoritmasıdır ve bölme algoritması kullanılarak iki farklı gösterim ile onluk tabandaki bir sayıyı farklı bir tabana çevirme işlemi yapılabilir.

**Örnekler:**

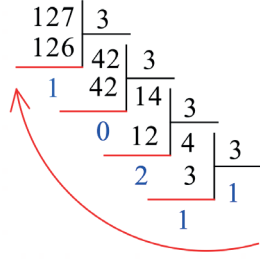
$$127 = 3 \cdot 42 + \underline{1}$$

$$42 = 3 \cdot 14 + \underline{0}$$

$$14 = 3 \cdot 4 + \underline{2}$$

$$4 = 3 \cdot \underline{1} + \underline{1}$$

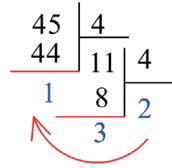
$$127 = (11201)_3$$



$$45 = 4 \cdot 11 + \underline{1}$$

$$11 = 4 \cdot \underline{2} + \underline{3}$$

$$45 = (231)_4$$



Bölme algoritması kullanılarak taban değiştirme ile ilgili farklı örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5)

Örnek:

Küme 1 adet kasa, 1 adet kutu şeklinde 6'nın kuvvetlerine göre paketlenilecek ve 2 adet paketlenmemiş yumurta kalacak sayıda yumurta bulunmaktadır. Ancak yumurtaların taşınması için yeni bir taşıma şirketi ile anlaşma yapılmıştır. Bu şirketin; her birine 4 yumurta sığan kutuları, her birine 4 kutu sığan kolileri ve her birine 4 koli sığan kasaları bulunmaktadır. Kaç kutu, koli ve kasa kullanılacağını hesaplayınız. Öncelikle yumurta sayısını bulmak gerekir mi?

Çözüm:

$$(1012)_6 = 1 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0 = 224 \text{ kümesteki yumurta sayısıdır.}$$

$$224 = 4 \cdot 56 + 0$$

$$56 = 4 \cdot 14 + 0$$

$$14 = 4 \cdot 3 + 2 \text{ olduğundan } 224 = (3200)_4 \text{ olur. 3 kasa ve 2 koli kullanılarak paketlenir.}$$

Sayı tabanlarını birbirine çevirirken ilk önce verilen tabandaki sayının 10'luk tabana çevrilmesi, daha sonra istenilen tabana çevrilmesinin işlem kolaylığı sağladığını keşfetmek için farklı sayı tabanlarının birbirine çevrilmesi ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 6)

Örnek:

$(101221012)_3$ sayısının 9 tabanındaki eşiti nedir?

Çözüm:

$(101221012)_3 = 1 \cdot 3^8 + 0 \cdot 3^7 + 1 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$ ifadesi $3^2 = 9$, $3^4 = 9^2$, $3^6 = 9^3$, $3^8 = 9^4$ eşitliklerinden yola çıkarak gruplandırılır.

$$\begin{aligned}
 (101221012)_3 &= 1 \cdot 3^8 + (0 \cdot 3^7 + 1 \cdot 3^6) + (2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4) + (1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2) + (1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0) \\
 &= 1 \cdot 9^4 + (0 \cdot 3 + 1) \cdot 9^3 + (2 \cdot 3 + 2) \cdot 9^2 + (1 \cdot 3 + 0) \cdot 9 + (1 \cdot 3 + 2) \\
 &= 1 \cdot 9^4 + 1 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 5 \\
 &= (11835)_9 \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

Farklı bir çözüm olarak $3^2=9$ eşitliğinden 9 tabanındaki sayıların 3'lük tabanda 2 basamaklı bir eşiti olacaktır. Verilen sayı 2'şerli gruplar hâlinde yazıldığında;

$$\begin{array}{ccccccccc}
 (1, & 01, & 22, & 10, & 12)_3 \\
 \downarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
 (1, & 0 \cdot 3 + 1, & 2 \cdot 3 + 2, & 1 \cdot 3 + 0, & 1 \cdot 3 + 2) \\
 \downarrow & \downarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
 (1, & 1, & 8, & 3, & 5) \\
 (11835)_9 \text{ bulunur.}
 \end{array}$$

Örnek:

$(2301)_4$ sayısının 2 tabanındaki eşiti nedir?

Çözüm:

$2^2 = 4$ eşitliğinden 4 tabanındaki bir sayının 2'lik tabanda 2 basamaklı bir eşiti olacaktır.

$$(2)_4 = (10)_2$$

$$(3)_4 = (11)_2$$

$$(0)_4 = (00)_2$$

$$(1)_4 = (01)_2 \text{ olduğundan}$$

$$(2301)_4 = (10110001)_2 \text{ olarak bulunur.}$$

Sayı tabanları birbirinin kuvveti olduğunda taban değiştirirken ilk önce 10'luk tabana çevirmeye gerek olmadığını keşfettirmek için birbirinin kuvveti olan farklı sayı tabanlarının birbirine çevrilmesi ile ilgili örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 7)



Basamak Sayısı

“ 10^3 sayısı kaç basamaklıdır?” sorusu yönlendirilir ve $10^3 = 1000$ olduğundan yola çıkılarak 4 basamaklı olduğu sonucuna varılır. a^n sayısının kaç basamaklı olabileceği ile ilgili tartışmalar yapılır.

“ a^n sayısı a tabanında $(n+1)$ basamaklı bir sayıdır.” sonucuna varılabilmesine yönelik örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 8)

Taban aritmetiği; tanımı üzerinden çok farklı örneklerinin hazırlanabileceği bir konudur. Bu konuyla ilgili farklı örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 9-11)

Ondalık Sayıların Çözümlemesi

10 tabanında yazılan ondalık sayıların çözümlemesinden hareketle diğer tabanlardaki sayılar da bulundukları tabana göre çözümlenebilir.

Örnekler:

$$284,93 = 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

$$(3,42)_5 = 3 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} = 3 + 4/5 + 2/25 = 97/25 = 3,88$$

$$(0,25)_3 = 2 \cdot 3^{-1} + 5 \cdot 3^{-2} = 2/3 + 5/9 = 11/9 = 1,2$$

Ondalık sayıların çözümlemesi ve 10'luk tabanda yazılması ile ilgili örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 12)

16'lık Sayı Tabanı

10 parmağımız yerine 16 parmağımız olsaydı nasıl bir sayı sistemi geliştirilebilirdi? 10 tabanında 0, 1, 2, ..., 9 olmak üzere 10 rakam kullanılan sayı sisteminin yerine 16'yı taban olarak aldığımızda kaç farklı sayı ya da sembol kullanılabilir?

Sayı tabanı 16 olan bir sistem oluşturmaları ve kullanmaları gereken sayı ve sembolleri belirlemeleri istenir. Farklı tabanlarda verilen sayıların 16'lık tabandaki eşitlerinden oluşan sayı sistemindeki sembollerle ifade edilebileceği örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 13)

10'dan büyük tabanlarda 10'a eşit ve 10'dan büyük değerler yerine özel semboller kullanılır. 16'lık tabanda genellikle 10 yerine A, 11 yerine B, 12 yerine C, 13 yerine D, 14 yerine E ve 15 yerine F kullanılır.

Örnekler:

$$234 = 14 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = (EA)_{16}$$

$$4685 = 1 \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = (124D)_{16}$$

Öğrencilerin 16'lık sayı tabanı için geliştirdikleri sistemdeki sayı ve sembollerle genel olarak kullanılan A, B, C, D, E, F harfleri arasındaki benzerlik ve farklılıklar tartışılır.

Taban Aritmetiğinde Dört İşlem

Örnek:

6'nın kuvvetlerine göre paketlenen birinci taşıma şirketinde 2 koli ve 3 kutu şeklinde paketlenmiş ve paketlenmemiş 3 yumurtanın bulunduğu yumurtalar ile 4'ün kuvvetlerine göre paketlenen ikinci taşıma şirketinde 3 koli ve 1 kutu şeklinde paketlenmiş ve paketlenmemiş 2 yumurtanın bulunduğu yumurtalar birleştirilmeye karar verilmiştir. Toplam kaç yumurta vardır?

Çözüm:

Birinci taşıma şirketinde; $(233)_6$ şeklinde ifade edilecek miktarda yumurta vardır. İkinci taşıma şirketinde $(312)_4$ şeklinde ifade edilecek miktarda yumurta vardır. Bu miktarların toplamını yumurta sayısını ayrı ayrı bulmadan hesaplamak mümkün müdür? Her paketteki yumurta sayısı farklı olduğu için mümkün değildir. Bu nedenle yumurta sayıları ayrı ayrı hesaplanarak toplanabilir. $(233)_6 + (312)_4 = 93 + 54 = 147$ yumurta vardır.

Farklı tabanlardaki sayılarda dört işlem yapmak için sayılar aynı tabanda yazılmalıdır. Sayılar öncelikle onluk tabanda yazılarak daha sonra dört işlem yapılır.

Örnekler:

$$(12)_3 + (24)_5 = (1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0) + (2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0) = 5 + 14 = 19$$

$$(25)_6 - (18)_9 = (2 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0) - (1 \cdot 9^1 + 8 \cdot 9^0) = 17 - 17 = 0$$

$$(13)_4 \times (11)_7 = (1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0) \times (1 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0) = 7 \times 8 = 56$$

$$(33)_5 : (20)_3 = (3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0) : (2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0) = 18 : 6 = 3$$

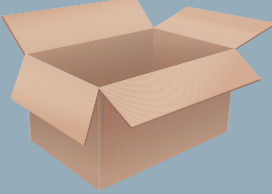
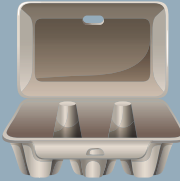
Farklı tabanda bulunan sayılarla dört işlem yapılması için kullanılan elde yöntemini keşfettirmeye yönelik çalışmalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 14)



Örnek:

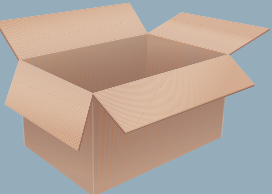
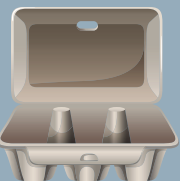
Etkinlik Formu Soru 14

6'nın kuvvetlerine göre 1 kasa, 4 koli ve 3 kutu şeklinde paketlenmiş ve 3 adet paketlenmemiş yumurta bulunan birinci kümesteki yumurtalar ile 2 kasa, 5 koli ve 2 kutu şeklinde paketlenmiş ve 4 adet paketlenmemiş yumurta bulunan ikinci kümesteki yumurtalar birleştirilecektir. Toplam kaç adet kasa, koli ve kutu kullanılır? Paketlenmemiş yumurta sayısı kaç olur?

	 Kasa	 Koli	 Kutu	 Yumurta	Toplam Yumurta Sayısı
	6 x 6 x 6 = 216 Yumurta	6 x 6 = 36 Yumurta	6 Yumurta	1 Yumurta	
	1 Kasa	4 Koli	3 Kutu	3 Yumurta	
	2 Kasa	5 Koli	2 Kutu	4 Yumurta	
Toplam					

Çözüm:

Öncelikle, paketlenmemiş yumurta sayısına bakalım. $3+4=7$ yumurta vardır. Bu yumurtalardan 6 tanesi bir kutuya konulabilir ve 1 yumurta paketlenmemiş olarak kalır. Elimizde 1 kutu yumurta ve 1 paketlenmemiş yumurta vardır. Daha sonra kutu sayısına bakalım. $3+2=5$ kutu yumurta ve elimizdeki 1 kutu ile toplam 6 kutu vardır. Bu 6 kutu bir koli oluşturur. O hâlde elimizde 1 koli ve 1 paketlenmemiş yumurta vardır. $4+5=9$ koli yumurta ve elimizdeki ile 10 koli yumurta vardır. Bunların 6 kolisi bir kasaya konulabilir. Elimizde 1 kasa, 4 koli ve 1 adet paketlenmemiş yumurta vardır. $1+2=3$ kasa yumurta ve elimizdeki ile 4 kasa yumurta vardır. Yapılan işlemi doğrulamak için toplam yumurta sayıları ile kontrol edilebilir.

	 Kasa	 Koli	 Kutu	 Yumurta	Toplam Yumurta Sayısı
	6 x 6 x 6 = 216 Yumurta	6 x 6 = 36 Yumurta	6 Yumurta	1 Yumurta	
	1 Kasa	4 Koli	3 Kutu	3 Yumurta	381
	2 Kasa	5 Koli	2 Kutu	4 Yumurta	628
Toplam					
	4 Kasa	4 Koli	0 Kutu	1 Yumurta	1009

Aynı tabandaki sayılarla dört işlem yapmak için tabanları onluk tabana çevirmeye gerek yoktur. Onluk tabanda yaptığımız dört işlemde kullanılan elde yöntemi diğer tabanlarda da uygulanabilir.

Örnekler:

$$\begin{array}{r}
 (231)_5 \\
 + (432)_5 \\
 \hline
 (1213)_5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (510)_8 \\
 - (341)_8 \\
 \hline
 (147)_8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (23)_5 \\
 \times (42)_5 \\
 \hline
 (101)_5 \\
 + (202)_5 \\
 \hline
 (2121)_5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (354)_6 \overline{) (23)_6} \\
 - (23)_6 \overline{) (13)_6} \\
 \hline
 (124)_6 \\
 - (113)_6 \\
 \hline
 (11)_6
 \end{array}$$

Farklı tabanda bulunan sayılarla dört işlem yapılması ile ilgili farklı örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 15)

Farklı Tabanlarda Tek/Çift Olma Şartı

Farklı tabanlarda yazılan sayıların teklik ve çiftliğine onluk tabana çevrilmeden farklı örnekler üzerinde incelemeler yapılarak genel bir ifade elde edilir.

Sayıların tek ya da çift olduğuna farklı örnekler üzerinden yapılan çalışmalarla karar verilir. (Etkinlik Formu Soru 16)

“Tabanı çift olan sayılar için birler basamağına bakılır. Birler basamağı tek ise sayı tektir, birler basamağı çift ise sayı çifttir. Eğer tabanı tek ise sayı değerleri toplamına bakılır. Eğer sayı değerleri toplamı tek ise sayı tek, sayı değerleri toplamı çift ise sayı çifttir.” şeklinde bir genelleme elde edilir.

Önerme:

$A = (a_i a_{i-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0)_n$ için eğer n çift ise a_0 değerine bakılır. a_0 çift ise sayı çifttir, tek ise sayı tektir. Ancak n tek ise $a_i + a_{i-1} + \dots + a_1 + a_0$ değerine bakılır. Eğer toplam çift ise sayı çifttir, tek ise sayı tektir.

Farklı Taban Çeşitleri

Taban aritmetiğinde yaygın olarak kullanılan sistemde; n taban olarak alındığında basamakların n 'nin kuvvetleri ($n^0, n^1, n^2, \dots$) olarak arttığı görülmektedir. Ancak farklı taban sistemleri de olabilir.

Farklı taban sistemlerinin de olabileceğini görmek için örnek soru incelenir. (Etkinlik Formu Soru 17)



EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Farklı tabanlarda tek/çift olma şartı için elde edilen önermeyi ispatlayınız.
- Farklı sayı taban sistemleri oluşturulabilir mi? Sayının kuvvetleri yerine sayı dizilerinin taban olarak alındığı çalışmalar yapınız. Faktöriyel, Fibonacci, Çokgensel vb.
- Farklı sayı tabanlarında dört işlem, sayının tek veya çift olması, bölme algoritması gibi özelliklerin kullanılabilirliğini araştırınız.
- 10'luk taban yerine 12'lik taban kullanılmasının daha avantajlı olduğu uzun yıllardır tartışılmakta. Avantajlarının neler olabileceğini araştırınız. Bir günün 24 saat olmasının ve bir analog saatin 12 saatten oluşmasının nasıl avantajları olabilir?
- Farklı tabanlarda verilen devirli ondalık sayıların (Örn. $4, 2\bar{3}_5$) vb. 10'luk tabandaki değerini bulmaya yönelik çalışmalar yapınız.

KAYNAKLAR

Nesin, A. (2017). *Fen Liseleri İçin Matematik 2, Doğal Sayılar Yapısı*. Nesin Yayıncılık.

ÖSYM, (2004). *2004 ÖSS Matematik Soru ve Cevapları*

ÖSYM, (2012). *LYS Matematik Soru ve Cevapları*

TÜBİTAK, (1996). *Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı Soru ve Cevapları*

Ülger A. (ty) *Matematiğin Kısa Tarihi*. Koç Üniversitesi. <http://home.ku.edu.tr/~aulger/histofmathematics.html>. Erişim tarihi: 18.05.2021

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Derecelendirme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. Etkinliğin içinde verilmiştir.

2. Etkinliğin içinde verilmiştir.

3. a. $2 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 5^0 = (203401)_5$

b. $2^7 = (100000000)_2$

c. $3^3 + 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 3^0 = (1121)_3$

d. $a^5 + 3 \cdot a^3 + 2 \cdot a^1 + 2 = (103022)_a$

e. $(1111)_2 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

f. $(231)_4 = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 4^0$

g. $(2000)_5 = 2 \cdot 5^3$

h. $(204012)_a = 2 \cdot a^5 + 4 \cdot a^3 + a^1 + 2$

4. a. $8 \cdot 5^2 = (1300)_5$

b. $7 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^2 = (20100)_4$

c. $(n^2 + n) \cdot n^3 = (110000)_n$

5. a. $238 = (3232)_4$

b. $3587 = (103322)_5$

c. $75 = (1001011)_2$

6. a. $(21)_3 = (12)_5$

b. $(42)_6 = (32)_8$

7. a. Etkinliğin içinde verilmiştir.

b. $(101011101001)_2 = (5351)_8$

c. Etkinliğin içinde verilmiştir.

d. $(15)_8 = (1101)_2$

8.

a^n	a tabanındaki değeri	Basamak sayısı
3^4	10000	5
2^5	100000	6
5^1	10	2

9. $(1a2)_5 + (231)_a = 92$

10. $(24)_x = (32)_y$ ise $x + y = 9$

11. D) İstenilen özelliğe sahip bir sayı yoktur.

12. a. $(2,3)_5 = 13/5 = 2,6$

b. $(1,02)_4 = 9/8 = 1,125$

13. a. $300 = (12C)_{16}$

b. $12303 = (300F)_{16}$

c. $(100111001110101)_2 = (4E75)_{16}$

14. Etkinliğin içinde verilmiştir.

15. a. $(34)_5 + (12)_5 = (101)_5$

b. $(100)_3 - (21)_3 = (2)_3$

c. $(42)_6 \times (23)_6 = (1450)_6$

d. $(204)_5 : (14)_5 = (11)_5$

16.

Sayı	Onluk tabandaki değeri	Tek/Çift olma durumu
$(10111)_2$	23	Tek
$(202)_4$	34	Çift
$(121)_9$	100	Çift
$(12)_5$	7	Tek
$(10000)_3$	81	Tek

17. Sayacın gösterdiği sayı: 1311

**Etkinlik Formu**

1. Bir kümeste bulunan yumurtalar toplanarak kutulara koyulacaktır. Yumurtaların kırılmaması için her kutuya sadece 6 yumurta sığmaktadır. Taşıma sırasında kolaylık olması için de her birine 6 kutu sığan koliler hazırlanacaktır. Kamyona yüklenirken hazırlanan koliler yine 6'şarlı olarak kasalara konulacaktır.

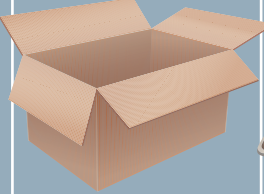
- Kümeste toplanan 25 yumurta için kasa, koli ve kutulardan kaç adet kullanılır? Kutulanmayan yumurta sayısı kaçtır?
- Kümeste toplanan 86 yumurta için kasa, koli ve kutulardan kaç adet kullanılır? Kutulanmayan yumurta sayısı kaçtır?
- Kümeste toplanan 100 yumurta için kasa, koli ve kutulardan kaç adet kullanılır? Kutulanmayan yumurta sayısı kaçtır?
- Kümeste toplanan 350 yumurta için kasa, koli ve kutulardan kaç adet kullanılır? Kutulanmayan yumurta sayısı kaçtır?

Toplam Yumurta Sayısı	 Kasa	 Koli	 Kutu	 Yumurta
	$6 \times 6 \times 6 = 216$ Yumurta	$6 \times 6 = 36$ Yumurta	6 Yumurta	1 Yumurta
25 Yumurta				
86 Yumurta				
100 Yumurta				
350 Yumurta				

2. Paketlenerek taşınan yumurtalar daha sonra açılarak tek tek satışa sunulacaktır.

- 5 adet kutu şeklinde paketlenmiş yumurtalara ek olarak paketlenmemiş 3 adet yumurta toplam kaç adettir?
- 2 adet kasa, 3 adet koli, 5 adet kutu şeklinde paketlenmiş yumurtalara ek olarak paketlenmemiş 3 adet yumurta toplam kaç adettir?

- 1 adet kasa, 4 adet koli şeklinde paketlenmiş yumurtalara ek olarak paketlenmemiş 1 adet yumurta toplam kaç adettir?
- 2 adet kasa, 5 adet koli, 2 adet kutu şeklinde paketlenmiş yumurtalara ek olarak paketlenmemiş 4 adet yumurta toplam kaç adettir?

				Toplam Yumurta Sayısı
Kasa	Koli	Kutu	Yumurta	
$6 \times 6 \times 6 = 216$ Yumurta	$6 \times 6 = 36$ Yumurta	6 Yumurta	1 Yumurta	

3. Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $2 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 5^0 = (\dots\dots\dots)_5$

b. $2^7 = (\dots\dots\dots)_2$

c. $3^3 + 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 3^0 = (\dots\dots\dots)_3$

d. $a^5 + 3 \cdot a^3 + 2 \cdot a^1 + 2 = (\dots\dots\dots)_a$

e. $(1111)_2 =$

f. $(231)_4 =$

g. $(2000)_5 =$

h. $(204012)_a =$



4. Aşağıda verilen ifadeleri uygun tabanda yazınız.

a. $8 \cdot 5^2 = (\dots\dots\dots)_5$

b. $7 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^2 = (\dots\dots\dots)_4$

c. $(n^2 + n) \cdot n^2 = (\dots\dots\dots)_n$

5. Aşağıda verilen ifadeleri istenilen tabanda yazınız.

a. $238 = (\dots\dots\dots)_4$

a. $3587 = (\dots\dots\dots)_5$

a. $75 = (\dots\dots\dots)_2$

6. Aşağıda verilen ifadeleri istenilen tabanda yazınız.

a. $(21)_3 = (\dots\dots\dots)_5$

b. $(42)_6 = (\dots\dots\dots)_8$

7. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. $(101221012)_3$ sayısının 9 tabanındaki eşiti nedir?

b. $(101011101001)_2$ sayısının 8 tabanındaki eşiti nedir?

c. $(2301)_4$ sayısının 2 tabanındaki eşiti nedir?

d. 8 tabanında verilen $(15)_8$ sayısı 2 sayı tabanında nasıl yazılır? (2012-LYS)

8. a^n sayısı a tabanında yazılırsa kaç basamaklı olur?

a^n	a tabanındaki değeri	Basamak sayısı
3^4		
2^5		
5^1		

9. $(1a2)_5 + (231)_a = ?$

10. $(24)_x = (32)_y$ ise x + y nin en küçük değeri kaçtır?

11. 8 tabanına göre yazılımları $(abc)_8$ ve $(cba)_8$ olan üç basamaklı sayılardan ikincisi ilkinin iki katı ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır? (UİMO-1996)

- A) $b=7$ B) $a \in \{1,2\}$ C) $c \in \{3,5\}$
D) İstenen özelliğe sahip bir sayı yoktur. E) Hiçbiri

12. 10 tabanında yazılan ondalık sayıların çözümlemesinden hareketle diğer tabanlardaki sayıları da bulundukları tabana göre çözümleyiniz ve en sade hâlinde ifade ediniz.

a. $(2,3)_5 =$

b. $(1,02)_4 =$

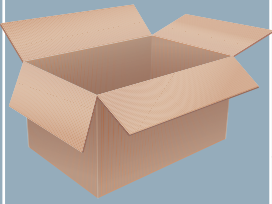
13. Sayı tabanı 16 olan bir sistem oluşturunuz. Kullanmanız gereken sayı ve sembolleri belirleyiniz ve aşağıda farklı tabanlarda verilen sayıların 16'lık tabandaki eşitini, oluşturduğunuz sayı sistemindeki sembollerle ifade ediniz.

a. $300 =$

b. $12303 =$

c. $(100111001110101)_2 =$

14. 1 kasa, 4 koli ve 3 kutu şeklinde paketlenmiş ve 3 adet paketlenmemiş yumurta bulunan birinci kümesteki yumurtalar ile 2 kasa, 5 koli ve 2 kutu şeklinde paketlenmiş ve 4 adet paketlenmemiş yumurta bulunan birinci kümesteki yumurtalar birleştirilecektir. Toplam kaç adet kasa, koli ve kutu kullanılır? Paketlenmemiş yumurta sayısı kaç olur?

					Toplam Yumurta Sayısı
	Kasa $6 \times 6 \times 6 = 216$ Yumurta	Koli $6 \times 6 = 36$ Yumurta	Kutu 6 Yumurta	Yumurta 1 Yumurta	
	1 Kasa	4 Koli	3 Kutu	3 Yumurta	
	2 Kasa	5 Koli	2 Kutu	4 Yumurta	
Topla					



15. Aşağıda verilen dört işlemleri verildikleri tabanı değiştirmeden yapınız.

a. $(34)_5 + (12)_5 =$

b. $(100)_3 - (21)_3 =$

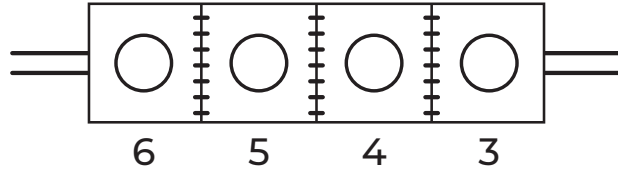
c. $(42)_6 \times (23)_6 =$

d. $(204)_5 : (14)_5 =$

16. Aşağıdaki tabloya göre sayıların bulundukları tabanda tek ya da çift olma durumlarıyla ilgili bir genellemeye ulaşınız.

Sayı	Onluk tabandaki değeri	Tek/Çift olma durumu
$(10111)_2$		
$(202)_4$		
$(121)_9$		
$(12)_5$		
$(10000)_3$		

17. Aşağıdaki şekil, özel amaçlı bir otomobile takılan ve dört bölümden oluşan bir kilometre sayacını göstermektedir.



Bu sayacın en sağdaki bölümü, otomobilin hareketiyle sıfırdan başlayarak her kilometrede 1 artan rakamlar göstermektedir. Bu bölümün 3'ü göstermesi gerektiğinde, bu bölüm sıfırlanıp soldaki bölümün rakamı 1 artmaktadır. Aynı işi ikinci bölüm 4 için, üçüncü bölüm 5 için, en soldaki bölüm de 6 için yapmaktadır. Örneğin, hareketten 10 km sonra sayaç 0031 gösterecektir.

Sıfırlanmış sayaçla harekete başlayan bu otomobilin sayacı 100 km sonra hangi sayıyı gösterir? (2004-ÖSS)



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

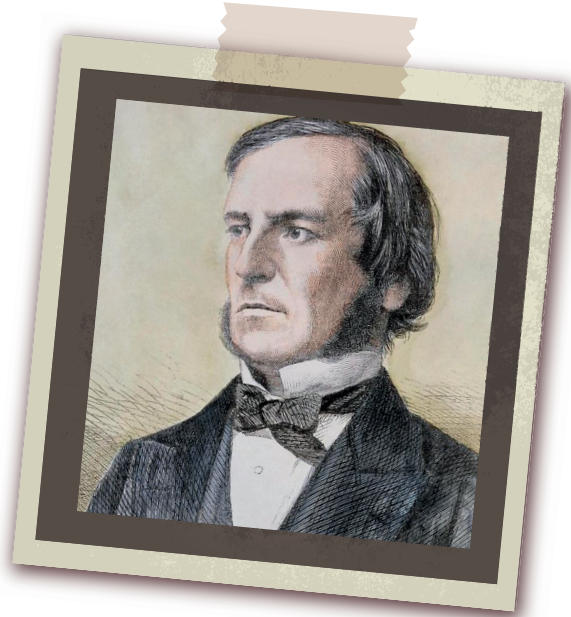
ETKİNLİK ADI	: BİLGİSAYARLARIN DİLİ
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Taban Aritmetiği
KAZANIMLAR	: Bilgisayar programlama dilleri ile taban aritmetiğini ilişkilendiren uygulamalar yapar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Blok ya da metin tabanlı program

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, bilgisayarların çalışma prensibini açıklayarak bilgisayarların 2'lik sayı sistemini neden ve nasıl kullandıklarının keşfettirilmesi amaçlanmaktadır. Bilgisayar programlama dilleri ve taban aritmetiğinin ilişkilendirilmesi hedeflenmektedir.

Başlarken...

George Boole (1815-1864); bir İngiliz matematikçisi, mantıkçısı, filozofu ve eğitimcisidir. Günümüzde Boole cebiri adıyla anılan mantık cebirini geliştirmiştir. Sayısal bilgisayar devreleri tasarımının matematiksel temelini oluşturan mantık cebiri ile Boole, 1847 yılında yayımladığı “Mantığın Matematik Analizi” ve 1854 yılında yayımladığı “Düşüncelerin Yasaları” ile devrim yaratmıştır. Boole cebiri, bir değişkenin değerinin doğruluk ya da yanlışlığının kullanıldığı bir alandır. Boole cebiri, doğruluk değeri 1 ya da yanlışlık değeri 0 olabilen önermelerle işlem yapılmasına olanak sağlar. Sayısal devrelerin tasarımı ve analizinde bu mantık kullanılır. Boole cebirinden yola çıkarak 1’ler ve 0’lardan oluşan bilgisayar sistemlerinin taban aritmetiğiyle ilişkisini yorumlayınız.





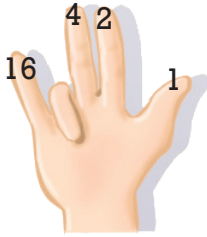
2'lik Sayı Sistemi

Bütün sayıların 2'nin kuvvetleri şeklinde yazılabileceğinin anlatılması için “İki elinizle 1000'e kadar nasıl sayarsınız?” sorusu yöneltilir. Burada her parmağın 1'i ifade etmeyebileceği ve farklı bir taban sistemi kullanılabileceği düşündürülür.

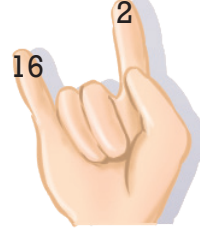
İlk olarak bir eldeki her parmağın 2'nin bir katını temsil ettiği düşünülür. Diğer bir deyişle açık olan her parmak 2 tabanında 1'i, kapalı olan her parmak 2 tabanında 0'ı temsil etmektedir. O hâlde açık bir el $1+2+4+8+16=31$ 'i göstermektedir.



Örnekler:

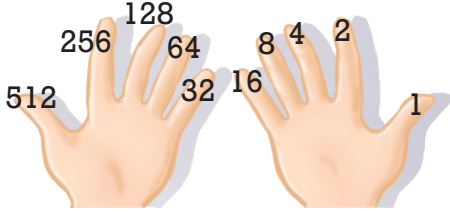


$$1 + 2 + 4 + 16 = 23$$



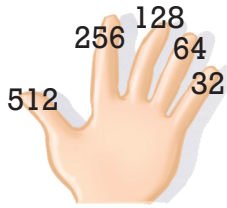
$$2 + 16 = 18$$

Aynı şekilde iki el kullanıldığında 2'nin kuvvetleri devam ettirilerek 1000'den büyük bir sayı yazılabilir.



İki el ile $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 1023$ 'e kadar olan bütün sayılar yazılabilir.

Örnekler:



$$8 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1000$$



$$1 + 8 + 64 + 128 + 256 + 512 = 969$$

Ellerin kullanılarak 2'lik tabanda farklı sayıların ifade edildiği örneklere yer verilir.

2'nin negatif kuvvetlerini kullanarak kesirli sayıların elde edildiği çalışmalar yapılır.

Bilgisayarların Dili ve ASCII Tablosu

Sayısal bilgisayarlar sadece 0 ve 1 sembollerinden oluşan iki tabanına göre olan sayı sistemini (Binary) kullanırlar. Bu sembolere bit adı verilir. Bilgisayarın elektronik devrelerinde 0 bit'i düşük voltajla, 1 bit'i ise yüksek voltajla ifade edilir. 8 bitlik bellek birimine 1 byte denir.

Bilgisayarda, metin türü verilerin girdi olarak kullanılabilmesi veya saklanabilmesi için büyük ve küçük harflerin, noktalama işaretlerinin ve klavyedeki farklı karakterlerin ikili kodlar ile ifade edilmesi gereklidir. ASCII (American Standard Code for Information Interchange) tablosu ile tüm bilgisayarların aynı kodlamayı kullanması sağlanmıştır. 1963 yılında ASCII tablosunda 7 bitlik kodlara sahip, $2^7=128$ farklı karakter oluşturulmuştur. Daha sonra 1 bit daha ilave edilerek $2^8=256$ elemanın bulunduğu “Genişletilmiş ASCII Tablosu” oluşturulmuştur. 1991 yılında yayınlanan Unicode (Universal Code: Evrensel Kod) ile tüm dillere ait karakterleri, matematiksel sembolleri içeren ve her elemanın 16-bit bir kod ile temsil edildiği 65.536 farklı eleman içerebilen ortak bir kod tablosu oluşturulmuştur.

Dec	Hex	Name	Char	Ctrl-Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char
0	0	Null char	NUL	CTRL-@	32	20	Space	64	40	@	96	60	`
1	1	Start of Heading	SOH	CTRL-A	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	2	Start of Text	STX	CTRL-B	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	3	End of Text	ETX	CTRL-C	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	4	End of Transmission	EOT	CTRL-D	36	24	\$	68	44	D	100	64	d
5	5	Enquiry	ENQ	CTRL-E	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	6	Acknowledgment	ACK	CTRL-F	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	7	Bell	BEL	CTRL-G	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	8	Back Space	BS	CTRL-H	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	9	Horizontal Tab	HT	CTRL-I	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	0A	Line Feed	LF	CTRL-J	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	0B	Vertical Tab	VT	CTRL-K	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	0C	Form Feed	FF	CTRL-L	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	0D	Carriage Return	CR	CTRL-M	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	0E	Shift Out / XOn	SO	CTRL-N	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	0F	Shift In / XOff	SI	CTRL-O	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	Data Line Escape	DLE	CTRL-P	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	Device Control 1 (oft. XON)	DC1	CTRL-Q	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	Device Control 2	DC2	CTRL-R	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	Device Control 3 (oft. XOFF)	DC3	CTRL-S	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	Device Control 4	DC4	CTRL-T	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	Neg. Acknowledgement	NAK	CTRL-U	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	Synchronous Idle	SYN	CTRL-V	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	End of Transmit Block	ETB	CTRL-W	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	Cancel	CAN	CTRL-X	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	End of Medium	EM	CTRL-Y	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	Substitute	SUB	CTRL-Z	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	Escape	ESC	CTRL-[	59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	File Separator	FS	CTRL-\	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	
29	1D	Group Separator	GS	CTRL-]	61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	Record Separator	RS	CTRL-^	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	Unit Separator	US	CTRL-_	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	Del



ASCII Tablosu kullanılarak seçilen karakterlerin 10'luk tabandaki değerlerini (dec) 2'lik tabanda yazma örneklerine yer verilir.

Taban Değiştirme Algoritması



10'luk tabanda verilen bir sayıyı istenilen farklı bir tabana çeviren bir algoritma oluşturalım. Aşağıda verilen algoritmalar örnek niteliğinde olup farklı çözüm yöntemleri bulunabilir.

```
def taban_degistirme(sayı, taban):
    kalanlar = []
    while True:
        kalan = str(sayı % taban)
        kalanlar.append(kalan)
        sayı = sayı // taban
        if sayı == 0:
            break
    return kalanlar[::-1]

sayı = int(input("Onluk tabanda bir sayı giriniz: "))
taban = int(input("Sayının çevrileceği tabanı giriniz: "))
print("10 tabanındaki {} sayısının {} tabanındaki değeri: {}".format(sayı, taban, ''.join(taban_degistirme(sayı, taban))))
```

Program çıktısı;

Onluk tabanda bir sayı giriniz: 127

Sayının çevrileceği tabanı giriniz: 3

10 tabanındaki 127 sayısının 3 tabanındaki değeri: 11201



Blok tabanlı programlama dili örnek koduna karekodu okutarak ulaşabilirsiniz.



Farklı bir tabanda verilen sayıyı 10'luk tabana çeviren bir algoritma oluşturalım. Aşağıda verilen algortimalar örnek niteliğinde olup farklı çözüm yöntemleri bulunabilir.

```
def onluk_tabana_çevirme(sayı , taban):
    onluk_taban = []
    üs = 0
    while True:
        basamak = sayı % 10
        onluk_taban.append(basamak * (taban ** üs))
        sayı = sayı // 10
        üs += 1
        if sayı == 0:
            break
    return sum(onluk_taban)

sayı = int(input("Onluk tabana çevrilecek bir sayı giriniz: "))
taban = int(input("Sayının tabanı giriniz: "))
print("{} tabanındaki {} sayısının onluk tabandaki değeri: {}".format(taban,sayı,onluk_tabana_çevirme(sayı,taban)))
```

Program çıktısı;

Onluk tabana çevrilecek bir sayı giriniz: 11201

Sayının tabanı giriniz: 3

3 tabanındaki 11201 sayısının onluk tabandaki değeri: 127



Blok tabanlı programlama dili örnek koduna karekodu okutarak ulaşabilirsiniz.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Eller kullanılarak farklı sayı tabanları için kendi sayma sisteminizi geliştiriniz.
- Bilgisayarların saklama alanlarını ve kullanılan birimleri (byte, kilobyte, gigabyte vb.) 2'lik sayı sistemi ile ilişkilendiriniz.



- Farklı tabanları birbirine çeviren bir algoritma yazınız.
- Algoritmaların karmaşıklığı ne demektir? Daha az karmaşıklıkta bir algoritma geliştirmek neden önemlidir?
- Bilgisayarlarda çarpma işlemi yapılırken verimliliği artırmak için kullanılan farklı algoritmaları (Karatsuba, Nikhilam vb.) araştırınız.

KAYNAKLAR

- Burris, S. (2019). George Boole, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* <https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/boole/> Erişim tarihi: 17.05.2021
- Dönmez, A. (2001). *Bilgisayarcı Matematikçiler*. Doğu Üniversitesi Dergisi 2001/4. <https://openaccess.dogus.edu.tr/xmlui/bitstream/handle/11376/670/d%C3%B6nmez2001.pdf?sequence=1> Erişim tarihi: 17.05.2021
- Eyüpoğlu, C., & Sertbaş, A. (2015). Karatsuba ve Nikhilam Çarpma İşlemi Algoritmalarının Farklı Bit Uzunlukları İçin Performanslarının Karşılaştırılması, *İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi* 14(27), 55-64
- Şenyay, L. *Sayı Sistemleri*. Dokuz Eylül Üniversitesi. https://kisi.deu.edu.tr/levent.senyay/bilgisayarprogramlama/2_%20Say%c4%b1%20Sistemleri.pdf. Erişim tarihi: 17.05.2021

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Öz Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: MODÜLER ARİTMETİK

: Cebir ve Sayılar Teorisi/Modüler Aritmetik

: 1. Kalan sınıflarını açıklar.

2. Denklik sınıflarını açıklar.

3. Denklikleri kullanılacağı gerçek yaşam problemleri kurar ve çözer.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, günlük hayat problemlerinden yola çıkarak mod kavramının açıklanması hedeflenmektedir. Bölme algoritmasını kullanarak kalanların sınıflandırılması amaçlanmaktadır. Kalan sınıfları üzerinde toplama ve çarpma işlemlerinin yapılması istenmektedir. Öğrencilerin kalan sınıflarının ayrışım kümeleri olduğunu kavraması ve sembollerle ifade etmesi beklenmektedir. Kalan sınıfları ile denklikleri ilişkilendirerek denkliklerin taraf tarafa toplanabildiğinin ve çarpılabildiğinin gösterilmesi amaçlanmaktadır.

Başlarken...

Taş Eksiltme Oyunu: İki kişi ile oynanan bir oyundur. Belli bir sayıda çakıl taşı ortaya koyulur. Her oyuncu sırası geldiğinde bu kümeden 1, 2 ya da 3 çakıl taşı alır. Son hamleyi yapan oyuncu yani ortada taş bırakmayan oyuncu oyunu kazanır. Örneğin, 4 taş koyulduğunda birinci oyuncu 1 taş alırsa ikinci oyuncu 3 taş alarak oyunu kazanır. 5 taş koyulduğunda birinci oyuncu 1 taş alırsa ikinci oyuncu 1, 2 ya da 3 taştan hangisini alırsa alsın oyunu kaybeder. Oyunu farklı sayıda taşla oynayarak hangi durumlarda birinci oyuncunun hangi durumlarda ikinci oyuncunun oyunu kazanacağını bulunuz.





Oyunda 4'ün katı olan bir sayıda taş bırakmak oyunun kazanma stratejisidir. Eğer 14 adet taş varsa birinci oyuncu 2 taş alarak ikinci oyuncuya 4'ün katı olan 12 taş bırakır ve ikinci oyuncunun aldığı taş sayısına göre aldığı taşla 4'ün katı olan miktarda taş bırakarak oyunu kazanabilir. Buradan hareketle $14-2$ sayısının 4'ün katı olduğu vurgulanır. Taş sayısı x olsun, birinci oyuncunun kazanmak için alması gereken taş miktarı y olsun. O hâlde; x ve y birer tam sayı ve $x-y = 4k$ olacak şekilde bir k sayısı vardır.

Taş eksiltme oyununda, başlangıçtaki taş miktarının 4 ile bölümünden kalanın taş miktarından çıkarıldığında elde edilen sayının 4'e tam bölüneceği vurgulanır. Burada taşları 4'lü gruplar hâlinde ayırdığımızda geriye kalan taşlar bize bölme işleminden kalanı verir. O hâlde başlangıçta bulunan 14 taşın 4 ile bölümünden kalan 2'dir. Burada 4 sayısı modülü ifade etmektedir. Yani 14 sayısının $\text{mod } 4$ 'teki dengi 2'dir.

Mod Kavramı

TANIM

x, y, m birer tam sayı ve $m > 0$ olmak üzere $x - y$ sayısı, m sayısına tam bölünebiliyorsa x ile y sayıları **m modülüne ($\text{mod } m$) göre birbirine denktir** denir. $x \equiv y \pmod{m}$ şeklinde gösterilir. O hâlde;

$$x \equiv y \pmod{m} \iff m \mid (x-y) \iff x = y + km \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{dir.}$$

Örneğin:

- $14 \equiv 2 \pmod{4} \iff 4 \mid (14-2) \iff 14=2+4k \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $28 \equiv 16 \equiv 4 \equiv -8 \equiv -20 \pmod{12}$
- $11 \equiv 29 \pmod{3}$

Örnek:

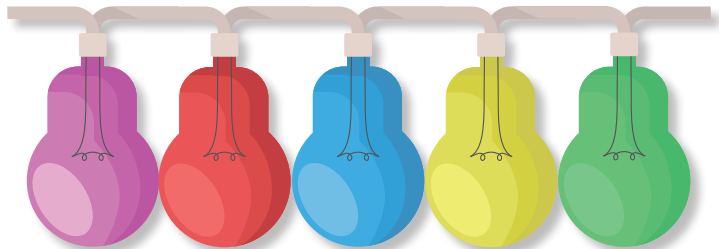
Bugün günlerden salı ise bugünden sonraki 100. gün hangi gündür?

Çözüm:

Bir hafta 7 gün olduğu için mod olarak 7 alınır. Bugünden sonraki 1. gün çarşamba, 2. gün perşembe, 3. gün cuma olarak bundan sonraki günler de $\text{mod } 7$ 'ye göre denk olacaktır. O hâlde $100 \equiv 2 \pmod{7}$ olup 2. gün perşembedir.

Örnek:

Pembe (P), kırmızı (K), mavi (M), sarı (S), yeşil (Y) renkli lambalar pembeden başlayarak yeşile kadar, sonra da geriye doğru tekrar pembeye kadar PKMSYSMKPK... şeklinde sırayla birer kez yanıp sönmekte ve bu işlem sıra ile tekrar etmektedir. Buna göre 2023'üncü sırada hangi renk lambanın yanıp söneceğini bulalım.



Çözüm:

PKMSYSMK/PKMSYSMK..... şeklinde düzenli bir döngü bulunur.

8 lamba yanıp söndükten sonra tekrar pembeden başlayarak döngü devam eder. Bu durumda 2023'ün 8 modülündeki karşılığı bulunmalıdır.

$2023 \equiv 7 \pmod{8}$ olduğundan 2023'üncü sırada yanıp sönen lamba ile 7'nci sırada yanıp sönen lamba aynı renk lambadır. 7. sırada mavi renkli lamba olduğundan 2023'üncü sırada yanıp sönen lamba da mavi renkli lambadır.

Denkliklerin kullanılacağı gerçek yaşam problemlerine yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1-4)

Teorem 1: $x \equiv y \pmod{m}$ ve $a \equiv b \pmod{m}$ ise

i . $x + a \equiv y + b \pmod{m}$

ii . $x - a \equiv y - b \pmod{m}$

iii . $x \cdot a \equiv y \cdot b \pmod{m}$

iv . $k \in \mathbb{Z}$ için $k \cdot x \equiv k \cdot y \pmod{m}$

v . $n \in \mathbb{Z}$ için $x^n \equiv y^n \pmod{m}$

vi . $k \cdot x \equiv k \cdot y \pmod{m}$ ise $x \equiv y \pmod{\frac{m}{\text{ebob}(k,m)}}$ denklikleri sağlanır.

Örnek: (teorem vi) . $12x \equiv 33 \pmod{21}$ ise $4x \equiv 11 \pmod{7}$ 'dir.

Örnek:

$1! + 3! + 5! + 7! + \dots + 2021! \equiv x \pmod{35}$ ise x kaçtır?

Çözüm:

7! ve sonraki sayılar 35 ile bölünebildiği için sadece $1! + 3! + 5!$ toplamının $\pmod{35}$ 'deki değerine bakılır. $1! + 3! + 5! = 1 + 6 + 120 = 127 \equiv 22 \pmod{35}$ olur.

Örnek:

$1^{2023} + 3^{2023} + 6^{2023} + 7^{2023} + 10^{2023} + 12^{2023}$ toplamının 13 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$12 \equiv -1 \pmod{13}$

$10 \equiv -3 \pmod{13}$



$7 \equiv -6 \pmod{13}$ olduğundan;

$$1^{2023} + 12^{2023} = 1^{2023} + (-1)^{2023} = 0$$

$$3^{2023} + 10^{2023} = 3^{2023} + (-3)^{2023} = 0$$

$$6^{2023} + 7^{2023} = 6^{2023} + (-6)^{2023} = 0$$

$$1^{2023} + 3^{2023} + 6^{2023} + 7^{2023} + 10^{2023} + 12^{2023} \equiv 0 \pmod{13} \text{ olur, yani 13 ile tam bölünür.}$$

Örnek:

2^{57} sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$$2^1 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$2^5 \equiv 2 \pmod{5}$ olacağından bir döngü yakalanmıştır. Yani her dört kuvvette bir tekrar aynı sayılar karşımıza çıkmaktadır. $57 = 4 \cdot 14 + 1$ olduğundan;

$$2^{57} \equiv (2^4)^{14} \cdot 2^1 \equiv 1 \cdot 2^1 \equiv 2 \pmod{5} \text{ olur.}$$

Örnek:

3^{60} 'ın $\text{mod } 7$ 'de denk olduğu sayıyı bulalım.

Çözüm:

$$3^{60} \equiv x \pmod{7} \text{ denliğini sağlayan } x \text{ değerini aramaktayız.}$$

$$3 \equiv 3 \pmod{7} \text{ Her sayı kendisine denktir. Her iki tarafın karesini alalım;}$$

$$3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7} \text{ Taraf tarafa çarpalım;}$$

$$3 \cdot 3^2 \equiv 3 \cdot 2 \pmod{7}$$

$$3^3 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7} \text{ Her iki tarafın 20. kuvvetini alalım;}$$

$$(3^3)^{20} \equiv (-1)^{20}$$

$$3^{60} \equiv 1 \pmod{7} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{2023}$ toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?

Çözüm:

Sayının birler basamağı, sayı 10'a bölündüğünde kalan sayıdır.

$$9 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$9^2 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$9^3 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$9^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

.....

$9^{2n} \equiv 1$ ve $9^{2n+1} \equiv 9$ olduğu görülür. 9'un çift kuvvetleri 1 kalanını, 9'un tek kuvvetleri 9 kalanını vermektedir. Toplamda 9'un çift ve tek kuvvetleri eşit sayıda olduğundan;

$$9 + 1 \equiv 10 \equiv 0 \pmod{10} \text{ olur.}$$

Örnek:

k bir doğal sayı olmak üzere 8^{10k+3} sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır.

Çözüm:

$8^{10k+3} \equiv x \pmod{11}$ denkleğini aramaktayız.

$$8 \equiv 8 \pmod{11}$$

$$8^2 \equiv 64 \equiv 9 \pmod{11}$$

$$8^3 \equiv 8 \cdot 8^2 \equiv 8 \cdot 9 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$8^4 \equiv 8 \cdot 8^3 \equiv 8 \cdot 6 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$8^5 \equiv 8 \cdot 8^4 \equiv 8 \cdot 4 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11}$$

$$8^{10} \equiv (8^5)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{11} \text{ olur. Döngü yakalanmış olur.}$$

$$8^{10k+3} \equiv (8^{10})^k \cdot 8^3 \equiv 1^k \cdot 6 \equiv 6 \pmod{11} \text{ bulunur ve } x=6 \text{ olur.}$$

Örnek:

$2^{(3^4)}$ sayısının birler basamağındaki rakamı bulalım.

Çözüm:

$$2 \equiv 2 \pmod{10}$$



$$2^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$2^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$2^5 \equiv 2 \pmod{10}$$

.....

2'nin kuvvetleri alındığında, sağ taraf 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, olacak şekilde döngüseldir.

$2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{10}$ 'dir. $3^4 = 81 = 4 \cdot 20 + 1$ ve $2^{81} = 2^{4 \cdot 20 + 1} \equiv 2 \pmod{10}$ bulunur.

Örnek:

$5^{(3^7)}$ sayısının 11 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$$5 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$5^2 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$5^3 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$5^4 \equiv 9 \pmod{11}$$

$$5^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$5^6 \equiv 5 \pmod{11} \text{ döngü yakalanmış olur}$$

5'in kuvvetleri alındığında, sağ taraf 5, 3, 4, 9, 1, 5, 3, 4, 9, 1, ... olacak şekilde her beş sayıda bir döngüseldir. Bu durumda 3^7 sayısının 5 ile bölümünden kalanı bulmamız gerekir.

$$3 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$3^3 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

.....

$$3^7 \equiv 2 \pmod{5}$$

Bu durumda $5^{(3^7)} \equiv 5^2 \equiv 3 \pmod{11}$ olarak bulunur. Bu durumda verilen sayının 11 ile bölümünde kalan 3 olarak bulunur.

Mod kavramı ile ilgili örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5-11)

Denklik (Kalan) Sınıfları

Taş eksiltme oyununu tekrar düşünelim. Başlangıçtaki taş sayısı 14 olduğunda 4 ile bölümünden kalan 2 olduğu için birinci oyuncu 2 taş almalı demiştik. Peki, başlangıçta 10 taş olduğunda ilk oyuncu kaç taş almalıdır? Yine 10'un 4 ile bölümünden kalan 2'dir. Aynı şekilde başlangıçta 6 taş olduğunda ilk oyuncu 2 taş almalıdır. Sonuç olarak ilk oyuncunun 2 taş alması gereken taş sayıları kümesi $\{2, 6, 10, 14, \dots\}$ olarak yazılabilir. Bu kümeye 2'nin denklik ya da kalan sınıfı denir. $m = 4$ için $\bar{2} = \{2, 6, 10, 14, \dots\}$ olarak yazılır.

TANIM

Verilen bir m sayısı ile bölündüğünde x kalanını veren tam sayılar kümesine x 'in **denklik (kalan) sınıfı** denir ve $\bar{x}$ ile gösterilir.

Etkinlik Formu Soru 12.a incelenerek tablonun hangi mod değerine göre oluşturulduğu belirlenir ve birbirine denk olan sayılar işaretlenerek ait oldukları denklik sınıfını belirleme çalışmaları yapılır.

Bir sayının pozitif m tam sayısı ile bölümünden kalanların neler olabileceği sorusu öğrencilere yöneltilir. Bu kalanların listelenerek ifade edilmesi istenir. Bir sayının m ile bölümünden kalanlar $\{0, 1, 2, \dots, (m-1)\}$ 'dir. O hâlde m tam sayısı için; $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}$ biçiminde $\text{mod } m$ 'ye göre m tane denklik (kalan) sınıfı vardır.

TANIM

$m \in \mathbb{Z}$ ve $m > 1$ olmak üzere, kalan sınıflarının oluşturduğu küme; $\mathbb{Z}_m$ veya $\mathbb{Z}/m$ olarak gösterilir.

$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ olarak gösterilir.

Taş eksiltme oyununda başlangıçtaki taş miktarının 4 ile bölümünden kalanlar sırayla 0, 1, 2 ve 3 olabilir. O hâlde $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ 'tür.

Örneğin $m = 3$ için kalan sınıflarını ve $\mathbb{Z}_3$ 'ü inceleyelim.

3 ile bölümünden 0 kalanını veren sayılar yani 0'ın ($\text{mod } 3$) de denk olduğu sayılar;

$\dots \equiv -6 \equiv -3 \equiv 0 \equiv 3 \equiv 6 \equiv 9 \equiv (\text{mod } 3)$ o hâlde $\bar{0} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ 'dur.

3 ile bölümünden 1 kalanını veren sayılar yani 1'in $\text{mod } 3$ 'te denk olduğu sayılar;

$\dots \equiv -5 \equiv -2 \equiv 1 \equiv 4 \equiv 7 \equiv 10 \equiv (\text{mod } 3)$ o hâlde $\bar{1} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$ 'dur.

3 ile bölümünden 2 kalanını veren sayılar yani 2'nin ($\text{mod } 3$)'te denk olduğu sayılar;

$\dots \equiv -4 \equiv -1 \equiv 2 \equiv 5 \equiv 8 \equiv 11 \equiv (\text{mod } 3)$ o hâlde $\bar{2} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$ 'dir.

Buradan hareketle $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ 'dir



Örnek: 736.11 sayısının $\mathbb{Z}_3$ 'teki karşılığı $736.11 \equiv 1.2 \equiv 2 \pmod{3}$ 'den $\bar{2}$ 'dir.

$(-12)^{43}$ 'ün $\mathbb{Z}_5$ 'teki karşılığı $(-12)^4 \equiv (3)^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{5}$ 'den $\bar{1}$ 'dir.

$x + 4 = 0$ denkleminin $\mathbb{Z}_6$ 'daki çözümü $x = -4 \equiv 2 \pmod{6}$ 'dan $\bar{2}$ 'dir.

$\mathbb{Z}_m$ Kümesinde Toplama ve Çarpma İşlemleri

Etkinlik Formu Soru 12.b'deki tablo öğrencilerle paylaşılır ve rastgele seçtikleri iki farklı sayının sütunu ile bu iki sayının toplamının ve çarpımının eşit olduğu sayının sütunu arasındaki ilişki incelenir. Denklik sınıflarında toplama ve çarpma işlemleri ile ilgili genel kurala ulaşılır.

Tabloda örnek olarak aşağıdaki işlemler yapılır:

- $\mathbb{Z}_4$ 'te 2 ile aynı sütundaki 14 ve 1 ile aynı sütundaki 13'ü toplayalım. $14 + 13 = 27$ sayısı 3 ile aynı sütundadır ve $14 + 13 \equiv 2 + 1 \equiv 3$ olur.
- $\mathbb{Z}_4$ 'te 2 ile aynı sütundaki 6 ve 1 ile aynı sütundaki 5'i çarpalım. $6 \cdot 5 = 30$ sayısı 2 ile aynı sütundadır ve $6 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2$ olur.

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ olsun. Bu elemanlar arasındaki toplama işlemi $\oplus$ ile ve çarpma işlemi $\otimes$ ile gösterilirse;
 $\bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$ ve $\bar{x} \otimes \bar{y} = \overline{x \cdot y}$ 'dir.

Örnekler:

- $\mathbb{Z}_4$ 'te $14 + 13 = \bar{2} \oplus \bar{1} = \overline{2+1} = \bar{3} \equiv \bar{0}$
- $\mathbb{Z}_4$ 'te $6 \times 5 = \bar{2} \otimes \bar{1} = \overline{2 \cdot 1} = \bar{2}$

$\mathbb{Z}_m$ kümesinde toplama ve çarpma işlemleri ile ilgili çalışmalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 13)

Etkinlik Formu Soru 13'teki toplama tablosu incelendiğinde hiç değişmemiş bir satır var mıdır? O hâlde toplama işlemi yapılırken herhangi bir etkisi olmamış eleman hangisidir? $\mathbb{Z}_m$ kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı $\bar{0}$ 'dır. Aynı şekilde çarpma tablosu incelendiğinde hiç değişmemiş bir satır var mıdır? O hâlde çarpma işlemi yapılırken herhangi bir etkisi olmamış eleman hangisidir? $\mathbb{Z}_m$ kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı $\bar{1}$ 'dir.

Her $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ için $x \oplus \bar{0} = \bar{0} \oplus \bar{x} = \bar{x}$ ve $x \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes x = \bar{x}$ 'dir.

Etkinlik Formu Soru 13'teki toplama tablosu incelenir ve toplama işlemine göre etkisiz eleman olan $\bar{0}$ 'lar işaretlenir. Bir elemanın toplama işlemine göre tersini bulmak için toplamı $\bar{0}$ 'ı veren sayılar bulunur. Örneğin $\mathbb{Z}_4$ 'de toplama işlemine göre $\bar{3}$ 'ün tersi nedir? $\bar{3}$ ile toplamı $\bar{0}$ eden sayı yani $\bar{3}$ 'ün tersi $\bar{1}$ olarak bulunur. Aynı şekilde çarpma tablosu incelenir ve çarpma işlemine göre etkisiz eleman olan $\bar{1}$ 'ler işaretlenir. Bir elemanın çarpma işlemine göre tersini bulmak için toplamı $\bar{1}$ 'i veren sayılar bulunur. Örneğin $\mathbb{Z}_4$ 'de çarpma işlemine göre $\bar{3}$ 'ün tersi nedir? $\bar{3}$ ile çarpımı $\bar{1}$ eden sayı yani $\bar{3}$ 'ün tersi $\bar{3}$ olarak bulunur. Ancak $\bar{2}$ ile çarpımı $\bar{1}$ eden sayı yoktur, yani $\bar{2}$ 'nin tersi yoktur.

TANIM

Her $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ için $\bar{x} \oplus \overline{(-x)} = \overline{x + (-x)} = \bar{0}$ ve $\overline{(-x)} \oplus \bar{x} = \overline{(-x) + x} = \bar{0}$ olduğundan her $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ için $\oplus$ işlemine göre $\bar{x}$ in tersi $\overline{(-x)}$ 'tir.

TANIM

Her $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ için $\bar{x} \otimes \overline{x^{-1}} = \overline{x \cdot (x^{-1})} = \bar{1}$ ve $\overline{(x)^{-1}} \otimes \bar{x} = \overline{x^{-1} \cdot x} = \bar{1}$ olduğundan her $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ için $\otimes$ işlemine göre $\bar{x}$ 'in tersi $\overline{x^{-1}}$ 'dir.

Kalan (denklik) sınıflarında toplama ve çarpma işlemine göre tersini bulma çalışmaları yapılır. (Etkinlik Formu Soru 14)

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Taş eksiltme oyununun farklı çeşitlerini araştırınız.
- Teorem 1'i ispatlayınız.
- $n \neq m$ için $\mathbb{Z}_m \cap \mathbb{Z}_m = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

KAYNAKLAR

- Nesin A. (2004). Modüler ve p-sel Sayılar. *Matematik Dünyası Dergisi*, 13(3), 13-15.
- Nesin A. (2008). Taş Eksiltme Oyunları. *Matematik Dünyası Dergisi*, 17(2), 61-66.
- ÖSYM, (1999). *ÖSS Matematik Soru ve Cevapları*.
- ÖSYM, (2000). *ÖSS Matematik Soru ve Cevapları*.
- Özdemir M. (2020). *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 3*. Altın Nokta Yayıncılık.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceli Puanlama Anahtarı Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlik Formu Cevapları

1. 7
2. Mayıs
3. L
4. E
5. E
6. Cuma
7. Problem oluşturma...
8. 6
9. 3
10. 9
11. 1

12. a. mod 4'e göre oluşturulmuştur.

$$\bar{0} = \{-4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$$

$$\bar{1} = \{-3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29\}$$

$$\bar{2} = \{-2, 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30\}$$

$$\bar{3} = \{-1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31\}$$

b. Etkinlik içinde verilmiştir.

13.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	0	1	2	3
$\bar{1}$	1	2	3	0
$\bar{2}$	2	3	0	1
$\bar{3}$	3	0	1	2

$\otimes$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	0	0	0	0
$\bar{1}$	0	1	2	3
$\bar{2}$	0	2	0	2
$\bar{3}$	0	3	2	1

14.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	0	1	2	3	4
$\bar{1}$	1	2	3	4	0
$\bar{2}$	2	3	4	0	1
$\bar{3}$	3	4	0	1	2
$\bar{4}$	4	0	1	2	3

$\otimes$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	0	0	0	0	0
$\bar{1}$	0	1	2	3	4
$\bar{2}$	0	2	4	1	3
$\bar{3}$	0	3	1	4	2
$\bar{4}$	0	4	3	2	1

Toplama işlemine göre etkisiz eleman 0'dır. 1'in tersi 4, 2'nin tersi 3, 3'ün tersi 2 ve 4'ün tersi 1'dir.

Çarpma işlemine göre etkisiz eleman 1'dir. 1'in tersi 1, 2'nin tersi 3, 3'ün tersi 2 ve 4'ün tersi 4'tür.

Etkinlik Formu

1. Tam 12'yi gösteriyorken çalıştırılan bir saatin akrebi, 1999 saatlik süre dolduğu anda kaç gösterir?
(1999-ÖSS)
2. Bu ay ağustos ayıdır. Buna göre 327 ay önce hangi ay olduğunu bulunuz.
3. BİLİMSANATBİLİMSANAT harf dizisi periyodik olarak devam etmektedir. 2023'üncü harf nedir?
4. A, B, C, D, E, F, G sütunlarına 1'den başlayarak şekildeki sayma sayıları sırayla yazılıyor. Buna göre 1923. sayısının hangi sütunda yer aldığını bulunuz.

A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

5. Başlangıçta A-1 bölmesinde bulunan Ferhat, her seferinde çapraz hareket ederek şekildeki gibi bir oyun oynamaktadır. Buna göre Ferhat, aşağıdaki satır ve sütun numarası verilen bölmelerin hangisine uğrar?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				
E																				

A) A-221 B) B-221 C) C-221 D) D-221 E) E-221

6. Bir hasta A hapını 6 günde bir içiyor. Bu hasta, B hapını 8 günde bir içiyor. Bu hasta A ve B hapını birlikte ilk kez salı günü içiyor. Buna göre, A ve B hapını ikinci kez birlikte içtiği gün hangisidir?
7. Denkliklerin kullanılacağı bir gerçek yaşam problemi kurunuz ve çözünüz.
8. $15! \equiv 14! \pmod{m}$ denklemini sağlayan kaç farklı m asal sayısı vardır?



9. 3^{73} ün 5 ile bölümünden kalan kaçtır? (2000-ÖSS)

10. $9^{(9^9)}$ sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

11. $A = (1!)^{11} + (3!)^{31} + (5!)^{51} + (7!)^{71}$ olduğuna göre A^{2023} sayısının 6 ile bölümünden kalanı bulunuz.

12. Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

-4	-3	-2	-1
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

a. Tablonun hangi mod değerine göre oluşturulduğunu belirleyiniz ve birbirine denk olan sayıları işaretleyerek ait oldukları denklik sınıflarını belirtiniz.

b. Rastgele iki sayı seçiniz ve hangi sütunda olduğunu belirleyiniz. Daha sonra toplamaları ile çarpımları bularak hangi sütunda olduğunu bulunuz.

13. $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesi için aşağıdaki tabloları doldurunuz.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$				
$\bar{1}$				
$\bar{2}$				
$\bar{3}$				

$\otimes$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$				
$\bar{1}$				
$\bar{2}$				
$\bar{3}$				

14. $\mathbb{Z}_5$ kümesinde toplamaya ve çarpmaya göre etkisiz elemanı bularak her elemanın toplamaya ve çarpmaya göre tersini bulunuz.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

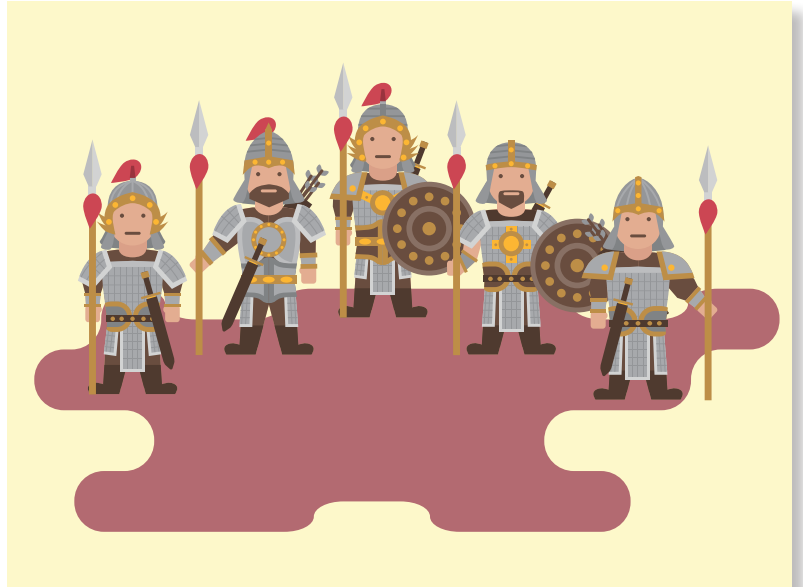
5. ETKİNLİK	: LINEER DENKLİK SİSTEMLERİ
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Modüler Aritmetik
KAZANIMLAR	: 1. Lineer denklik sistemlerini çözer.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

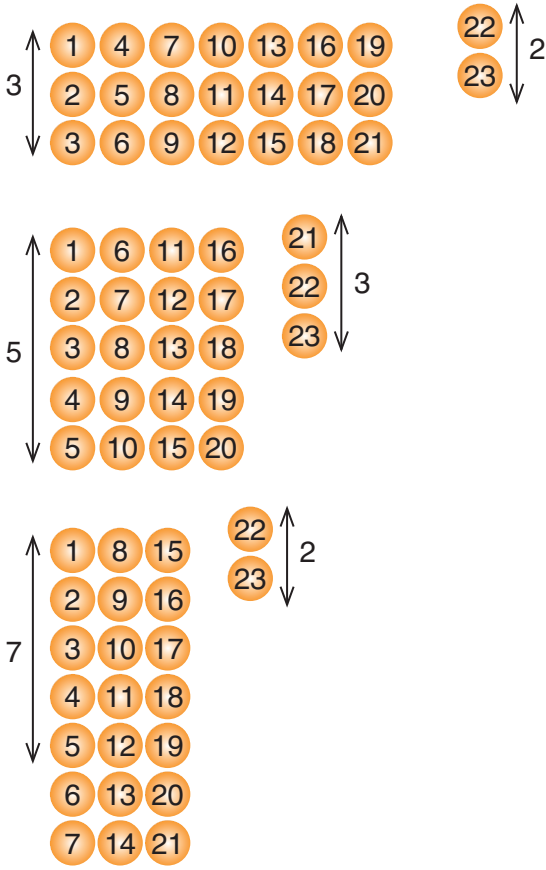
Etkinliğin Amacı

Öğrencilerin lineer denklik sistemlerinin çözümünün olup olmadığına karar vermesi hedeflenmektedir. Çin Kalan Teoremi ile ilgili uygulamaları yapması amaçlanmaktadır. Verilen sözel problemlere uygun lineer denklem sistemlerinin kurulması ve çözülmesi beklenmektedir.

Başlarken...

Antik Çin'de, bir savaşta 1500 kişilik bir orduya liderlik eden Han Xin adında bir general vardı. Tahminen 400-500 asker savaşta öldü. Askerler arka arka ya üçerli durduğunda 2 asker kalmıştı, beşerli dizildiklerinde geriye 4 asker kalıyordu, yedişerli dizildiklerinde geriye 6 asker kalmıştı. Han Xin hemen “1049 asker var.” dedi. Han Xin bunu nasıl yaptı? Matematik hikâyelerinde sıkça rastlayacağınız bu öykü Çin ordusunda gerçekten yaşanmış olabilir mi? Kim bilir? Ancak problemin orijinal kaynağı üçüncü yüzyılda Çin'de, Sun Zi Suanjing (Master Sun's Mathematical Manual) adlı matematik eserinde keşfedilmiştir. Günümüzde Çin Kalan Teoremi olarak bilinir. Çin Kalan Teoremi, Sun Zi Suanjing'in Bölüm 3, Problem 26'sında şöyle ifade edilir; “Elimizde bilinmeyen sayıda nesneler var. Üçlü sayarsak, kalan 2'dir; beşli sayarsak, kalan 3'tür; yedili sayarsak, kalan 2'dir. Bunların sayısını bulunuz.”





Bu soru öğrencilere yönlendirildikten sonra çözmeleri için süre verilir. Daha sonra görselin yardımıyla çözüm tartışılır. Bilinmeyen miktara x diyerek ifadeyi cebirsel olarak ifade etmeleri istenir.

Çin Kalan Teoremi ile öğrencilerin konuya ilgisi çekildikten sonra öncelikli olarak modüler aritmetikte denklem çözme ve lineer denklik sistemlerini tanımaya yönelik çalışmalar yapılacaktır. Daha sonra Çin Kalan Teoremi kapsamlı olarak ele alınacaktır.

Örnek:

Etkinlik Formu Soru 1

$\mathbb{Z}_5$ 'de $2x = 1$ ise x kaçtır?

Sorusuna yönelik tartışmalar yapılır.

Çözüm:

1. yol: $2x = 1 \pmod{5}$

x 'in $\mathbb{Z}_5$ 'de alacağı değerler $x = 0, 1, 2, 3$ ve 4 'tür.

$x \equiv 0$ için $2 \cdot 0 \neq 1 \pmod{5}$

$x \equiv 1$ için $2 \cdot 1 = 2 \neq 1 \pmod{5}$

$x \equiv 2$ için $2 \cdot 2 = 4 \neq 1 \pmod{5}$

$x \equiv 3$ için $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$

$x \equiv 4$ için $2 \cdot 4 = 8 \equiv 3 \neq 1 \pmod{5}$

O hâlde $x = 3$ 'tür.

2. yol: $2x = 1 \pmod{5}$ ise $x = \frac{1}{2} \equiv \frac{6}{2} = 3 \pmod{5}$ olarak bulunur.

TANIM

$m \in \mathbb{Z}^+$ ve x bir bilinmeyen olmak üzere, a, b tam sayıları için,

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

biçiminde yazılan denklige bir bilinmeyenli lineer denklik denir.

Örnek:

$\mathbb{Z}_6$ 'da $(2x + 5)(4x + 3)$ ifadesinin sonucu nedir?

Çözüm:

$$(2x + 5)(4x + 3) = 8x^2 + 6x + 20x + 15 = 8x^2 + 26x + 15$$

$$\equiv 2x^2 + 2x + 3 \pmod{6}$$

$\mathbb{Z}_6$ 'da $(2x + 5)(4x + 3)$ ifadesinin sonucu $2x^2 + 2x + 3$ 'tür.

Denklemlerin $\mathbb{Z}_n$ 'de çözüm kümesini bulmaya yönelik çalışmalar yapılır. (Etkinlik Formu Soru 2)

Örnek:

$\mathbb{Z}_{11}$ 'de $x^2 + 4x + 3 = 0$ denkleminin kökleri oranının alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm:

$x^2 + 4x + 3 = 0$ denklemini çarpanlara ayırdığımızda $(x + 1)(x + 3) = 0$ yazılır.

$x_1 = -1$ ve $x_2 = -3$ 'tür. Köklerin oranı $\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ ve $\frac{-3}{-1} = 3$ 'tür.

$\mathbb{Z}_{11}$ 'de $\frac{1}{3} \equiv \frac{12}{3} \equiv 4 \pmod{11}$ 'dir. Dolayısıyla kökler oranı 3 ya da 4'tür.

Örnek:

$x \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $2x^2 + 11x + 9 \equiv 0 \pmod{x^2 + x}$ ise x 'in alacağı değerleri bulunuz.

Çözüm:

$$2x^2 + 11x + 9x \equiv 0 \pmod{x^2 + x}$$

$$2x^2 + 2x + 9x + 9 \equiv 0 \pmod{x^2 + x}$$

$$2(x^2 + x) \equiv 0 \pmod{x^2 + x} \text{ olur.}$$



O hâlde $9(x + 1) \equiv 0 \pmod{x^2 + x}$ denklemini sağlayan x değerine bakılır.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $9(x + 1) = (x^2 + x)k + 0$ şeklinde yazılır.

$9(x + 1) = x(x + 1)k$ ise $9 = xk$ 'dir.

$x \in \mathbb{Z}^+$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $x = \{1, 3, 9\}$ olur.

Aşağıdaki teoremi keşfetmek için Etkinlik Formundaki lineer denklik sistemlerinin çözümlerini bulmaya ve günlük hayat problemlerini denklik sistemleri şeklinde ifade etmeye yönelik çalışmalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3, 4)

Teorem 1:

Bir a sayısının $m_1, m_2, \dots, m_r$ sayılarına bölümünden kalanlar eşit ve b olsun. O hâlde

$$a \equiv b \pmod{\text{ekok}(m_1, m_2, \dots, m_r)} \text{dir.}$$

Bir Elemanın Tersi

Bir elemanın çarpmaya göre tersi lineer denklikler kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

TANIM

Bir a tam sayısı için, $ax \equiv xa \equiv 1 \pmod{m}$ denkleğini sağlayan x tam sayısına a sayısının mod m 'de tersi denir ve a^{-1} ile gösterilir.

Lineer denklik sistemlerinin çözümü üzerinden bir elemanın tersi olup olmadığının tartışılacağı çalışmalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5, 6)

Örnek:

Etkinlik Formu Soru 5

7 sayısının mod 9'da tersini bulunuz.

Çözüm:

1. yol:

x , 7'nin mod 9'da tersi olmak üzere; $7x \equiv 1 \pmod{9}$ olarak yazılabilir.

O hâlde; $-2x \equiv 1 \equiv 10 \pmod{9}$ olur. $x \equiv -5 \equiv 4 \pmod{9}$ olarak bulunur.

2. yol:

$7x \equiv 1 \pmod{9}$ olarak yazılabilir. $x = \frac{1}{7} \equiv \frac{28}{7} = 4 \pmod{9}$ olarak bulunur.

Peki herhangi bir mod'da bir elemanın tersi her zaman var mıdır? Sorusu öğrencilere yönlendirilir. Örnek olarak Etkinlik Formu Soru 6'yı çözmeleri istenir.

Örnek:

Etkinlik Formu Soru 6

6 sayısının mod 8'de tersini bulunuz.

Çözüm:

$6x \equiv 1 \pmod{8}$ olacak şekilde bir x tam sayısı var mıdır? $x \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ için bu denklik sağlanmaz. Bu denkleğin bir çözümü olmadığı için 6'nın mod 8'de tersi yoktur.

Bir elemanın bir mod'da her zaman tersi olmayabilir. Peki ne zaman bir elemanın tersi yoktur?

Yukarıdaki örneklerden bir genellemeye ulaşılması sağlanır.

Teorem:

$\bar{0} \neq \bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ 'nin çarpımsal tersinin olması için gerek ve yeter şart $\text{ebob}(a, n) = 1$ olmalıdır.

Örneğin, 4'ün mod 6'da, $4x \equiv 1 \pmod{6}$ denkleğinde $\text{ebob}(4, 6) = 2$ ve $2 \nmid 1$ olduğu için tersi yoktur.

Çin Kalan Teoremi

Öncelikle Etkinlik Formu Soru 7 öğrencilere yönlendirilir ve Teorem 1'de b olarak ifade edilen değerın eşit olmadığı durumlarda nasıl bir yol izleyebilecekleri keşfettirilmeye çalışılır.

Örnek:

Etkinlik Formu Soru 7

6'ya bölündüğünde 1 ve 7'ye bölündüğünde 4 kalanını veren en küçük pozitif tam sayı kaçtır?

1. Çözüm:

$x \equiv 1 \pmod{6}$ ise $x = 1, 7, 13, 19, 25, 32, \dots$

$x \equiv 4 \pmod{7}$ ise $x = 4, 11, 18, 25, 32, \dots$

olarak düşünüldüğünde x 'in en küçük pozitif değeri 25 olarak bulunur.

**2. Çözüm:**

$x \equiv 1 \pmod{6}$ ve $x \equiv 4 \pmod{7}$ olduğundan, Teorem 1'i kullanamayız.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x = 6k + 1$ olur.

Bunu ikinci denklikte yazarsak $6k + 1 \equiv 4 \pmod{7}$ olur.

$6k \equiv 3 \pmod{7}$ buradan da $2k \equiv 1 \pmod{7}$ olur. $k \equiv 4 \pmod{7}$ elde edilir.

$x = 6k + 1$ denliğinde x 'in en küçük değerini bulmak için $k = 4$ yerine yazılırsa $x = 25$ olur.

Daha sonra 2'den fazla denliğin olduğu durumlar için çözüm öğrencilerle birlikte yapılır.

Örnek:

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$x \equiv 5 \pmod{7}$ olduğuna göre en küçük x pozitif tam sayısını bulunuz.

Çözüm:

İlk olarak x 'in her denklikte alabileceği sayıları yazalım ve ortak olan en küçük sayıyı bulmaya çalışalım.

$$x \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise } x = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, \dots$$

$$x \equiv 4 \pmod{5} \text{ ise } x = 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, \dots$$

$$x \equiv 6 \pmod{7} \text{ ise } x = 6, 13, 20, 27, 34, 41, \dots$$

olarak düşünüldüğünde x 'in en küçük pozitif değeri 34 olarak bulunur. Ancak istenen değer her zaman kolayca bulunamayabilir. Bunun için denklik sistemlerini kullanarak bir çözüm yöntemi geliştirmemiz gerekir.

3. denliği kullanarak $k \in \mathbb{Z}$ için $x = 7k + 6$ olarak yazılabilir.

2. denklikte x yerine yazarsak $7k + 6 \equiv 4 \pmod{5}$ elde edilir.

Burada $7k \equiv 2k \equiv -2 \pmod{5}$ olarak $k \equiv -1 \equiv 4 \pmod{5}$ elde ederiz.

$$n \in \mathbb{Z} \text{ için } k = 5n + 4 \text{ olarak yazılabilir.}$$

Bu ifadeyi $x = 7k + 6$ denkleminde yazarsak $x = 7(5n + 4) + 6 = 35n + 34$ olur.

1. Denklikte yerine yazarsak $35n + 34 \equiv 1 \pmod{3}$ olur.

Bu ifade $2n + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ ifadesine denktir. $2n \equiv 0 \pmod{3}$ olur.

$$n \equiv 0 \pmod{3} \text{ 'tür. O hâlde } i \in \mathbb{Z} \text{ için } n = 3i \text{ olur.}$$

$$x = 35n + 34 \text{ denkleminde yazarsak } x = 35 \cdot (3i) + 34 = 105i + 34 \text{ olur.}$$

O hâlde $x = 105i + 34 \equiv 34 \pmod{105}$ olarak ifade edilir.

Burada her denklikten elde edilen ifadenin diğer denklikte yerine yazılarak çözümünün bulunabilmesi için mod değerlerinin aralarında asal olmaları gerektiğine dikkat çekilir.

$x \equiv 34 \pmod{105}$ ifadesi elde edildiğine göre $(\text{mod } 105)$ 'te yani $(\text{mod } 3.5.7)$ 'de verilen denklik sisteminin tek bir çözümü vardır.

Çin Kalan Teoremi

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal sayılar olmak üzere,

$$x \equiv k_1 \pmod{s_1}$$

$$x \equiv k_2 \pmod{s_2}$$

$$x \equiv k_3 \pmod{s_3}$$

denklik sistemi $\text{mod } (s_1 s_2 s_3 \dots s_n)$ 'ye göre bir tek çözüme sahiptir.

İspat:

$M = s_1 s_2 s_3 \dots s_n$ olsun. $M/s_1 = m_1$ olsun. $\text{ebob}(m_1, s_1) = 1$ olur. Dolayısıyla, m_1 'in tersi vardır.

Yani $m_1^{-1} m_1 \equiv 1 \pmod{s_1}$ olacak şekilde bir m_1^{-1} sayısı vardır.

Buna göre;

$$m_1^{-1} m_1 \equiv 1 \pmod{s_1} \text{ ve } i = 2, 3, \dots, k \text{ için } m_1^{-1} m_i \equiv 0 \pmod{s_1} \text{ olur.}$$

Benzer şekilde $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ için $m_i^{-1} m_i \equiv 1 \pmod{s_i}$ ve $j \neq i$ için, $m_i^{-1} m_j \equiv 0 \pmod{s_i}$ sayıları bulunabilir. Böylece,

$$x = k_1 m_1^{-1} m_1 + k_2 m_2^{-1} m_2 + \dots + k_n m_n^{-1} m_n$$

yukarıdaki denklik sisteminin bir çözümü olur.

Bu çözümün tek olduğunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım.

$x \equiv k_1 \pmod{s_1}$ denkliğinin tek çözümü vardır. İlk $n - 1$ denkliğin tek çözümü olduğunu kabul edelim. n denklik sisteminin tek çözümü olduğunu göstermek istiyoruz. Öncelikle x_1 ve x_2 iki çözüm olduğunu kabul edelim.

Buna göre;

$$x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{s_1 s_2 \dots s_{n-1}} \text{ ve } x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{s_n} \text{ olur.}$$

$$s_1 s_2 \dots s_{n-1} \mid x_1 - x_2 \text{ ve } s_n \mid x_1 - x_2 \text{ elde edilir.}$$

Yani $x_1 \equiv x_2 \pmod{s_1 s_2 \dots s_n}$ dir.

**Örnek:**

7'ye bölündüğünde 2, 9'a bölündüğünde 4 ve 10'a bölündüğünde 1 kalanını veren sayıyı bulunuz.

Çözüm:

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

$$x \equiv 4 \pmod{9}$$

$x \equiv 1 \pmod{10}$ ise sorunun çözümünü Çin Kalan Teoremi'nin ispatını yaparken kullandığımız yöntem ile yapalım.

$$M = 7 \cdot 9 \cdot 10 = 630 \text{ 'dur.}$$

$$m_1 = \frac{630}{7} = 90 \text{ için } m_1 \text{ 'in tersini bulalım.}$$

$$m_1^{-1} \cdot 90 \equiv 1 \pmod{7} \text{ ise } 6m_1^{-1} \equiv 1 \equiv 36 \pmod{7}, m_1^{-1} \equiv 6 \pmod{7}$$

$$m_2 = \frac{630}{9} = 70 \text{ için, } m_2 \text{ 'nin tersini bulalım.}$$

$$m_2^{-1} \cdot 70 \equiv 1 \pmod{9} \text{ ise } 7m_2^{-1} \equiv 28 \pmod{9}, m_2^{-1} \equiv 4 \pmod{9}$$

$$m_3 = \frac{630}{10} = 63 \text{ için, } m_3 \text{ 'ün tersini bulalım.}$$

$$m_3^{-1} \cdot 63 \equiv 1 \pmod{10} \text{ ise } 3m_3^{-1} \equiv 1 \equiv 21 \pmod{10}, m_3^{-1} \equiv 7 \pmod{10}$$

O hâlde $x = k_1 m_1^{-1} m_1 + k_2 m_2^{-1} m_2 + \dots + k_n m_n^{-1} m_n$ olduğunda;

$$x = 2 \cdot 6 \cdot 90 + 4 \cdot 4 \cdot 70 + 1 \cdot 7 \cdot 63 = 1080 + 1120 + 441 = 2641 \equiv 121 \pmod{630} \text{ elde edilir.}$$

Örnek:

49^{19} sayısının son iki basamağı kaçtır?

Çözüm:

Sayının son iki basamağını bulmak için 100 ile bölümünden kalan bulunmalıdır.

$$100 = 25 \times 4 \text{ ve } \text{ebob}(25,4) = 1 \text{ olduğundan}$$

$x \equiv 49^{19} \pmod{100}$ ifadesi Çin Kalan Teoremi'ne göre;

$$x \equiv 49^{19} \pmod{25}$$

$$x \equiv 49^{19} \pmod{4}$$

olarak yazılabilir.

$$x \equiv 49^{19} \equiv (-1)^{19} \equiv -1 \pmod{25}$$

$$x \equiv 49^{19} \equiv 1^{19} \equiv 1 \pmod{4}$$

Çin Kalan Teoremi'ne göre;

$$x \equiv (-1) \cdot 4 \cdot 19 + 1 \cdot 25 \cdot 1 \pmod{100}$$

$$x \equiv -76 + 25 \pmod{100}$$

$$x \equiv -51 \equiv 49 \pmod{100}$$

olduğuna göre, 49^{19} sayısının son iki basamağı 49'dur.

Verilen sözel problemlere uygun lineer denklem sistemlerinin kurulduğu ve çözüldüğü çalışmalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 8-10)

Çin Kalan Teoremi'ni incelediğimizde " $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal sayılar olmak üzere" ön koşulu ile başlamaktadır. Bu koşulun neden gerektiği ile ilgili tartışmalara yer verilir.

Çin Kalan Teoremi'nde ön koşul olan modların ikişerli aralarında asal olma durumu gerçekleşmezse ne gibi sonuçlar oluşacağını görmek için örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 11, 12)

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Etkinlik içerisindeki teoremleri ispatlayınız.
- Çin Kalan Teoremi'nde kullanılan farklı modda şifreleme ve deşifreleme yöntemlerini araştırınız.
- $2^{3^4^5}$ sayısının son iki basamağını bulunuz.
- $4 \cdot 2023!$ sayısının sondan sıfır olmayan iki basamağını bulunuz.

KAYNAKLAR

Kangsheng, S. (1988). Historical Development of The Chinese Remainder Theorem. *Archive for History of Exact Sciences*, 285-305. <http://people.math.harvard.edu/~knill/crt/lib/Kangsheng.pdf> Erişim Tarihi: 1.06.2021

Nesin A. (2004). Modüler ve p-sel Sayılar. *Matematik Dünyası Dergisi*, 13(3), 13-15.

Özdemir M. (2020). *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 3*. Altın Nokta Yayıncılık.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlik Formu Cevapları

1. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

2. $x \equiv 6 \pmod{8}$

3. 118

4. 208

5. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

6. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

7. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

8. 157

9. 23

10. Problem oluşturma

11. 19

12. Boş küme

Etkinlik Formu

1. $2x - 1 = 0$ denkleminin $\mathbb{Z}_5$ 'deki çözümünü bulunuz.
2. $\mathbb{Z}_8$ 'de $3x \equiv 2$ denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.
3. x iki basamaklı bir doğal sayı,
 $x \equiv 3 \pmod{4}$
 $x \equiv 3 \pmod{7}$ olduğuna göre x 'in en küçük ve en büyük değerlerinin toplamı kaçtır?
4. Ahmet, elmalarını beşerli saydığında 3, altışarlı saydığında 4, yedişerli saydığında 5 elması kalıyor. Ahmet'in en az kaç elması vardır?
5. 7 sayısının mod 9'da tersini bulunuz.
6. 6 sayısının mod 8'de tersini bulunuz.
7. 6'ya bölündüğünde 1 ve 7'ye bölündüğünde 4 kalanını veren en küçük pozitif tam sayı kaçtır?
8. 5'e bölündüğünde 2, 7'ye bölündüğünde 3 ve 9'a bölündüğünde 4 kalanını veren en küçük pozitif tam sayı kaçtır?
9. Sun Zi Suanjing'in Bölüm 3, Problem 26'sında ifade edilen problemi Çin Kalan Teoremi'ni kullanarak çözünüz.
 "Bilinmeyen sayıda nesneler var. Üçlü sayarsak, kalan 2'dir; beşli sayarsak, kalan 3'tür; yedili sayarsak, kalan 2'dir. Bunların sayısını bulunuz."
10. Denkliklerin kullanılacağı bir gerçek yaşam problemleri kurunuz ve çözünüz.
11. 6'ya bölündüğünde 1 ve 8'e bölündüğünde 3 kalanını veren en küçük pozitif tam sayı kaçtır?
12. 12'ye bölündüğünde 7 ve 10'e bölündüğünde 2 kalanını veren en küçük pozitif tam sayı kaçtır?



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: ŞİFRELEME TEKNİKLERİ
MODÜL/KONU	: Cebir ve Sayılar Teorisi/Modüler Aritmetik
KAZANIMLAR	: 1. Matematiğin şifrelemedeki rolünü açıklar. 2. Şifrelemede kullanılan teknikleri açıklar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Hesap makinesi

Etkinliğin Amacı

Şifrelemenin dil, veri, bilişim, vb. alanlardaki örneklerine yer verileceği bu etkinlikte, öğrencilerin şifrelemenin tarihsel gelişim süreci içinde matematiksel kavramların nasıl kullanıldığını açıklamaları hedeflenmektedir. Öğrencilerin; simetrik şifreleme yöntemleri, Diffie-Hellman anahtar dağıtım metodu, asimetrik şifreleme yöntemleri ve RSA şifreleme yöntemi ile çalışmalar yapması amaçlanmaktadır.

Başlarken...

Geçmişten günümüze bilgi, insanların tarihi şekillendirmesinde çok önemli olmuş, bu nedenle de bilginin güvenli iletilmesi giderek artan bir ihtiyaç hâline gelmiştir. İnsanların bu ihtiyacından kriptoloji bilimi doğmuş ve gizli yazışma sanatı anlamına gelen kriptografinin çalışma disiplini olmuştur. Kriptografi; bilgi güvenliğinde gizlilik, kimlik denetimi, bütünlük gibi kavramların sağlanması için çalışan matematiksel yöntemler bütünüdür. Bu yöntemler, bilginin bulunduğu ya da kullanıldığı ortamda karşılaşılabilecek saldırılardan bilgiyi, bilgi göndericisini ve alıcısını koruma amacı taşır.

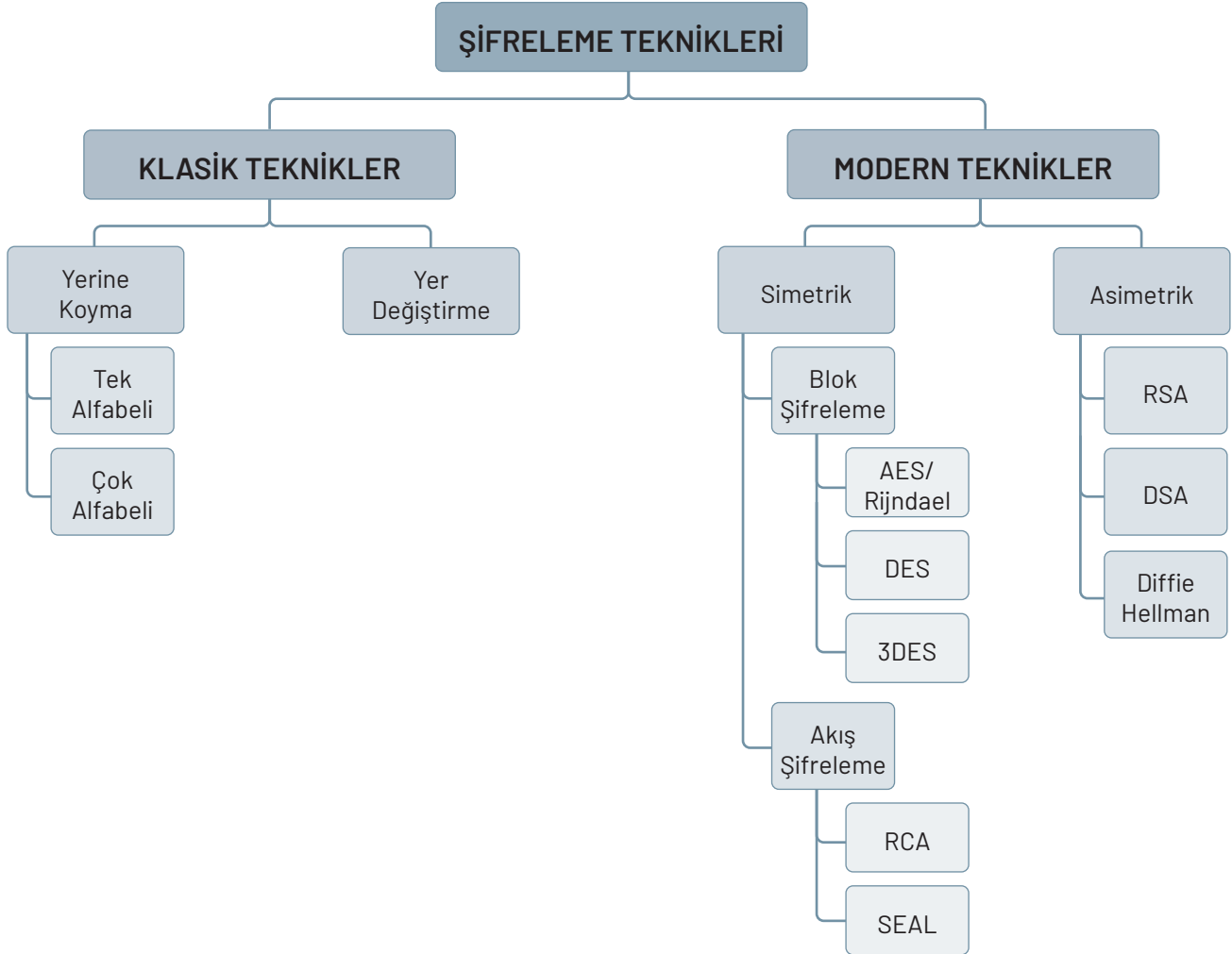
Kriptolojide orijinal metne, düz metin; şifrelenmiş metne ise şifreli metin denilmektedir. Düz metnin içeriğini saklamak için şifreleme işleminin yapılması gerekmektedir. Düz metinleri şifreli metinlere çevirmek için anahtar kullanılmaktadır.

Tarih boyunca çeşitli kriptoloji yöntemleri kullanılmıştır. Sizin bildiğiniz şifreleme yöntemleri var mı? Daha önce şifreli bir metin oluşturdunuz mu?



Şifreleme teknikleri, teknolojinin gelişmesi ve bilgisayarların kullanılması ile çok farklı bir boyut kazanmış ve modern teknikler kullanılmaya başlanmıştır.

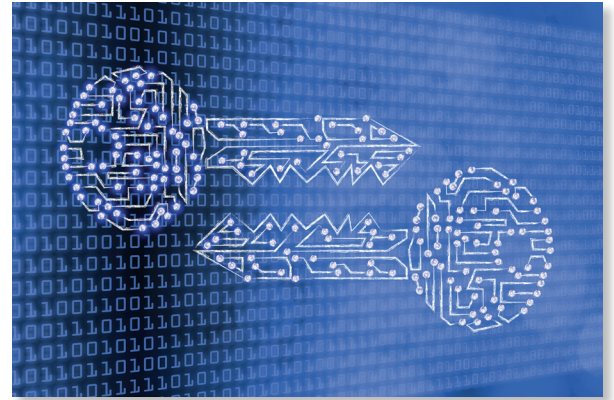
Modern teknikler kullanılan anahtara göre *simetrik şifreleme* (gizli anahtar şifreleme) ve *asimetrik şifreleme* (açık anahtar şifreleme) algoritmaları olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.



Simetrik Şifreleme Algoritmaları

Kriptografi hakkındaki metinlerde standart hâline gelmiş üç karakter olan Alice, Bob ve Eve'den bahsedelim. Alice ve Bob aralarında Eve'den gizli haberleşmek istiyor ancak Eve mesajı okumak istiyor. Bu durumda Alice ve Bob ne yapmalıdır? Alice, Bob'a özel bir mesaj göndermeden önce mesajı şifrelemelidir. Ancak Bob bu mesajı okuyabilmek için aynı anahtara sahip olmalıdır. O hâlde Alice ve Bob bir gün buluşarak gönderilecek metinler için anahtar belirlemelilerdir. Eve'in bilmediği bir anahtar ile şifrelenmiş metinleri birbirlerine iletme-leri tamamen güvenlidir.

Simetrik anahtarlı şifreleme algoritmalarında açık metni şifrelemek için bir gizli anahtar seçilir ve bu gizli anahtarla metin şifrelenir. Alıcı kişi, bu şifreli metni yine aynı gizli anahtar ile çözüp düz metne çevirir ve okur.





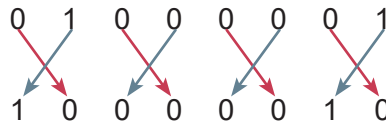
Klasik yöntemlerden Sezar, Vigenere vb. gibi şifreleme teknikleri de simetrik anahtarlı şifreleme yöntemlerindendir. Ancak modern kriptografide harflerin elektronik ortamda bitlerle ifade edilmesi ile şifreleme yapılmaktadır.

Bilgisayarlar kullanılarak bir metindeki karakterler önce ASCII tablodaki değerlerine göre ikilik tabanda bitlere yani 1 ve 0'lara dönüştürülerek şifreleme işlemleri gerçekleştirilebilir. Sayıların belli bir sistemle yer değiştirdiği ya da belirlenen bir anahtarın ikilik tabana çevrilerek anahtardaki her bir sayının metne eklenecek şifrelendiği yöntemler örnek olarak verilebilir. Elde edilen şifreler tekrar ASCII tablo yardımıyla metne çevrilir.



Aşağıdaki yönergeleri takip ederek şifreleme yapınız.

1. Metindeki her harfin ASCII tablodaki değerini bulunuz. (Örneğin "A"=65)
2. ASCII tablodaki değeri ikilik tabanda ifade ediniz. ($65=(01000001)_2$)
3. Elde ettiğiniz sayıları metindeki harflerin yerine yan yana yazınız. ("A" yerine 01000001)
4. Anahtar olarak yer değiştirme yöntemini kullanınız. Yer değiştirme yöntemi 1 ve 0'lardan oluşan metindeki sayılar sırasıyla birinci ile ikinci basamağı, üçüncü ile dördüncü basamağı vb. değiştirerek yazınız.



5. Elde edilen ifadeyi tekrar 10'luk tabanda ifade ederek ASCII tablodaki ifadesini bulunuz. ($((1000010)_2=130="é")$)

Dolayısıyla "A" sembolü "é" sembolü ile şifrelenmiştir.

Örnek:

Yer değiştirme yöntemini “BILSEM” kelimesi için uygulayarak şifreleyiniz.

B	=	66	=	$(01000010)_2$
I	=	73	=	$(01001001)_2$
L	=	76	=	$(01001100)_2$
S	=	83	=	$(01010011)_2$
E	=	69	=	$(01000101)_2$
M	=	77	=	$(01001101)_2$

Burada anahtar yer değiştirme yöntemidir. Harfler ikili gruplara ayrılarak yer değiştirilir ve şifreli metin oluşturulur.

Orijinal metin:	01000010	01001001	01001100	01010011	01000101	01001101
Şifreli metin:	10000001	10000110	10001100	10100011	10001010	10001110

Oluşturulan şifreli metindeki harfler yine onluk tabana çevrilerek değeri ASCII tabloda bulunur.

$(10000001)_2$	=	129	=	ü
$(10000110)_2$	=	134	=	â
$(10001100)_2$	=	140	=	î
$(10100011)_2$	=	163	=	ú
$(10001010)_2$	=	138	=	è
$(10001110)_2$	=	142	=	Ä

“BILSEM” kelimesinin şifrelenmiş hâli “üâîúèÄ” olarak bulunabilir. Bu karakterleri değerlerini elde etmek için “Genişletilmiş ASCII Tablosu” kullanılmalıdır.



Aşağıdaki yönergeleri takip ederek şifreleme yapınız.

1. Metindeki ve anahtardaki her harfin ASCII tablodaki değerini bulunuz. (Örneğin metin “A”=65 ve anahtar “b”=98)
2. ASCII tablodaki değeri ikilik tabanda ifade ediniz. $(65=(01000001)_2$ ve $98=(01100010)_2$)
3. Elde ettiğiniz sayıları metindeki harflerin yerine yan yana yazınız daha sonra anahtar metin için belirlenen sayıyı da altına yazınız. (“A” yerine 01000001 ve “b” yerine 01100010 yazılır.)



4. Alt alta olan sayıları matematiksel mantıkta kullanılan işlemi uygulanır. XOR Operatörü ile Şifreleme Yöntemi olarak bilinmektedir.

(Metin) A 0 1 0 0 0 0 0 1

(Anahtar) b 0 1 1 0 0 0 1 0

Şifre 0 0 1 0 0 0 1 1

5. Elde edilen ifadeyi tekrar 10'luk tabanda ifade ederek ASCII tablodaki ifadesini bulunuz.
 $((00100011)_2 = 35 = \text{"\#"})$

Dolayısıyla "A" sembolü "#" sembolü ile şifrelenmiştir.

Örnek:

"BİLİM" metnindeki her harfi ASCII tabloya göre ikilik tabanda ifade ediniz. "KITAP" kelimesini anahtar metin olarak belirleyip metni etkinlikteki gibi şifreleyiniz.

Çözüm:

B	=	66	=	$(1000010)_2$
I	=	73	=	$(1001001)_2$
L	=	76	=	$(1001100)_2$
I	=	73	=	$(1001001)_2$
M	=	77	=	$(1001101)_2$

K	=	75	=	$(1001011)_2$
I	=	73	=	$(1001001)_2$
T	=	84	=	$(1010100)_2$
A	=	65	=	$(1000001)_2$
P	=	80	=	$(1010000)_2$

Orijinal metin (BİLİM):	01000010	01001001	01001100	01001001	01001101
Anahtar (KITAP):	01001011	01001001	01010100	01000001	01010000
Şifreli metin:	00001001	00000000	10011000	00001010	00011101

Oluşturulan şifreli metindeki harfler yine onluk tabana çevrilerek değeri ASCII tabloda bulunur.

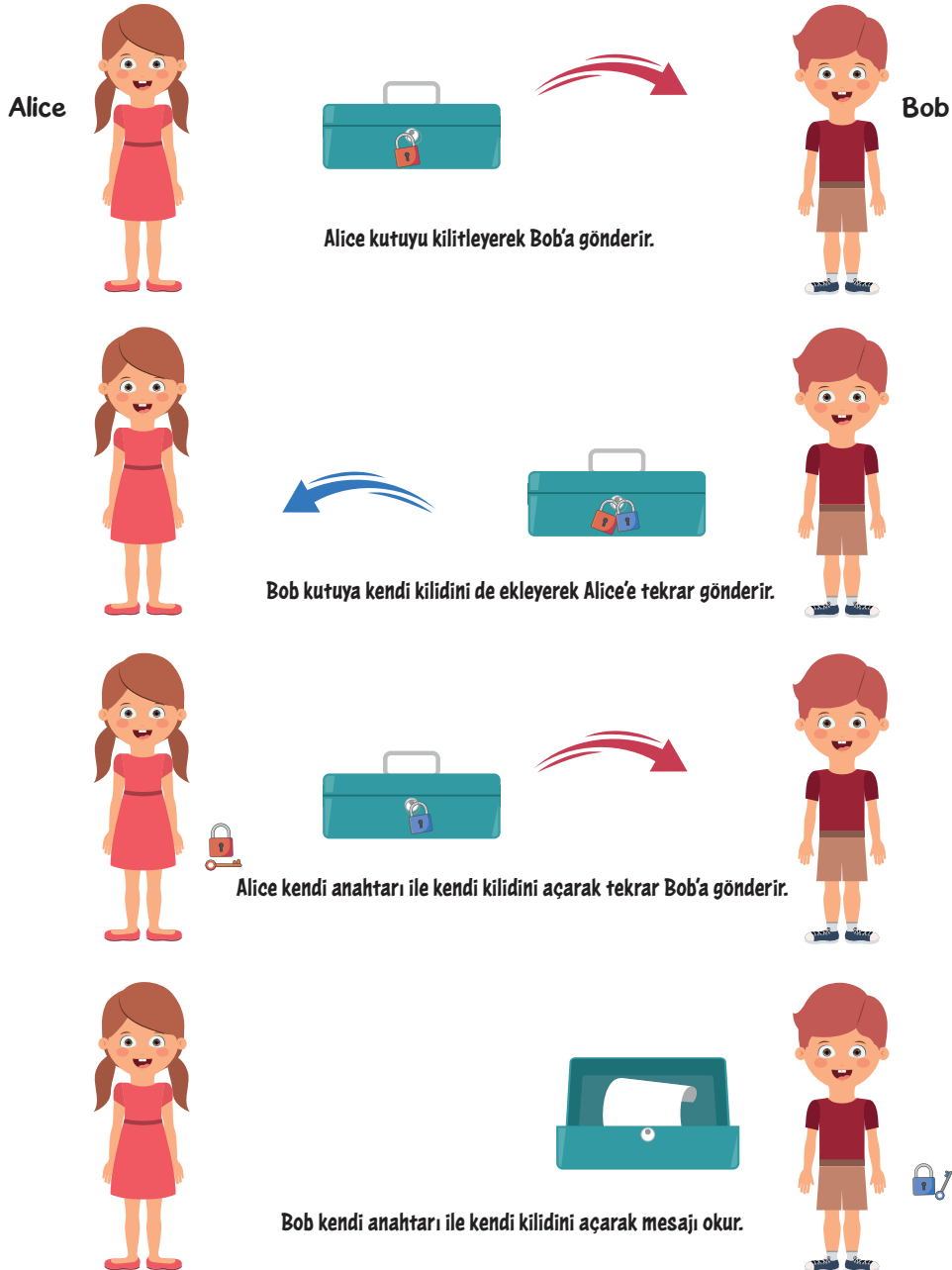
$(00001001)_2$	=	9	=	HT
$(00000000)_2$	=	0	=	NULL
$(10011000)_2$	=	152	=	ÿ
$(00001010)_2$	=	10	=	LF
$(00011101)_2$	=	29	=	GS

"BİLİM" kelimesinin şifrelenmiş hâli "HTNULLÿLFGS" olarak bulunabilir. Bu karakterleri değerlerini elde etmek için "Genişletilmiş ASCII Tablosu" kullanılmalıdır.

Öğrenciler ikili gruplara ayrılır ve aralarında bir anahtar belirleyerek ilk önce şifreli metinler oluştururlar, daha sonra değiştirerek şifreli metinleri deşifre ederler. Farklı kelime ve anahtarlar ile şifreleme çalışmalarına yer verilir. Öğrencilerden 0 ve 1'lerle yapılabilecek farklı şifreleme yöntemleri önermeleri istenir.

Anahtar Dağıtım Problemi

Alice, Bob ve Eve'in haberleşme sistemini tekrar düşünelim. Güvenliği artırmak için Alice, Bob'a gönderdiği her mesajı farklı bir anahtarla şifrelemek istemektedir. Ancak bu durumda da Bob'un tüm anahtarları bilmesi gerektiğinden Alice'in sürekli olarak anahtarları Bob'a aktarması gerekmektedir. Bunu çözmek için Alice ve Bob her hafta buluşarak önlerindeki yedi gün boyunca kullanacakları anahtarları belirleyebilirler. Anahtarları şahsen değiştirmek kesinlikle güvenli bir yoldur ancak kolay değildir. İkisinin de farklı ülkelerde yaşadıklarını düşünelim. Alternatif olarak bir kurye tutabilirler ancak bu da az güvenli ve pahalı bir yoldur. Her iki durumda da anahtarların dağıtımı bir problem olarak kalmaktadır.





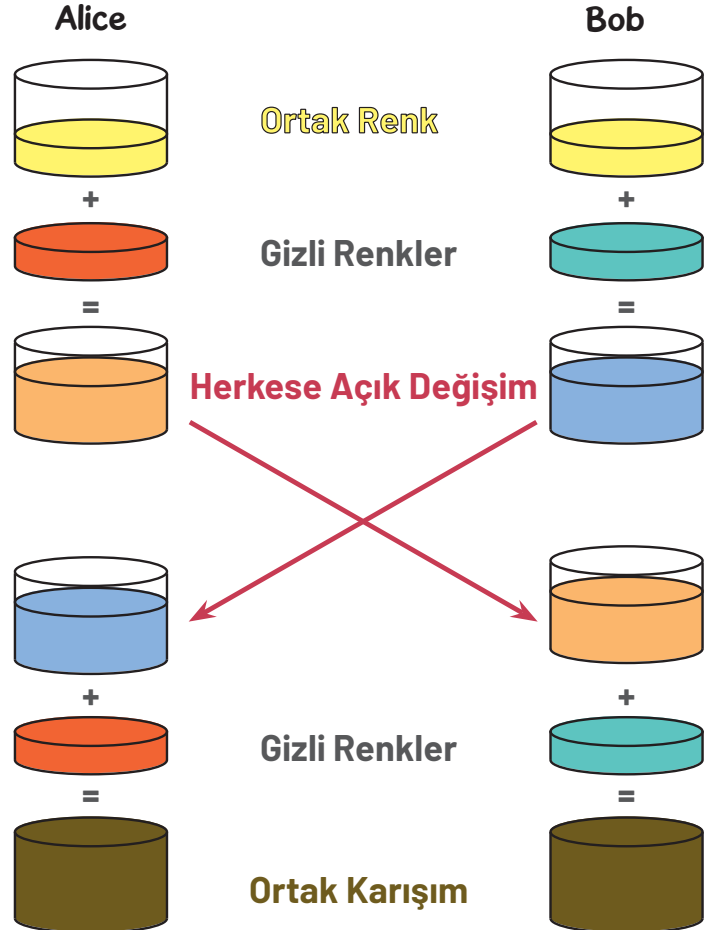
Bu problem 1976 yılında “Diffie-Hellman Anahtar Değişimi” ile çözülmüştür. Alice, Bob’a göndereceği mesajı bir kutuya koyar ve anahtarı kendinde olan asma bir kilit takar. Bob bu mesajı aldığı anda asma kilidin anahtarı kendinde olmadığı için açamaz ve Bob anahtarı kendinde olan ikinci bir asma kilit takarak kutuyu Alice’e geri gönderir. Alice anahtarını kullanarak kutuyu açar ancak kutuda hâlâ Bob’un asma kilidi bulunmaktadır. Daha sonra kutu Bob’a gelir ve Bob kilidi açarak mesajı okur. Tüm bu iletimler sırasında kutu hep kilitlidir ve Eve’in elinde her iki anahtar da bulunmadığı için kutuyu açamaz.

Anahtar dağıtım problemi çözülmüş gibi görünmektedir ancak bu sistemde büyük bir engel bulunmaktadır. “Bu problem sizce ne olabilir?” sorusu öğrencilere yönlendirilir. “Sizce Bob kendi kilidini Alice’in kilidinin tam üzerine taksaydı Alice anahtara sahip olmasına rağmen kilidini açmakta zorlanır mıydı?” gibi sorularla öğrencilerin cevabı bulması sağlanır. Sorun anahtarların kilitlerinin açılma sırasındadır. Konu asma kilit olduğunda bu durum sorun olmasa da karmaşık şifreleme ve deşifreleme işlemlerinde son eklenen ilk çıkarılır kuralı uygulanmalıdır. Sıranın önemini anlamak için şöyle düşünelim: Sabahları evden çıkarken ilk önce çoraplarınızı giyip daha sonra ayakkabılarınızı giyiyorsunuz, akşam eve geldiğinizde ise ilk önce ayakkabılarınızı daha sonra çoraplarınızı çıkarmalısınız.

Oluşan bu problemin Diffie-Hellman tarafından önerilen çözümü anahtar olarak renk kullanan bir şifre üzerinden açıklayalım. Alice, Bob ve Eve’in de aralarında olduğu herkesin elinde üç litrelik bir kap olsun ve her birinde bir litre sarı boya olsun. Alice ve Bob kendilerinde olan gizli bir renkteki boyadan kendi kaplarına eklesinler. Alice bir kırmızı tonu eklerken Bob da bir mavi tonu ekleyebilir. Daha sonra her ikisi de kendi karışımını diğerine gönderir. Son olarak Alice, Bob’un karışımını alır ve kendi gizli renginden bir litresini Bob’dan gelen kaba ekler. Bob da kendi gizli renginden bir litresini Alice’den gelen kaba ekler. Her iki kap da aynı renkte olmalıdır çünkü her ikisinde de sarı, kırmızı ve mavi vardır. Ortaya çıkan ortak renk anahtardır.

Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta Eve’in gizli renklerin eklendiği boya karışımlarını ele geçirebilmesine rağmen boyaları ayrıştırılamamasıdır. Yani bu karışım tek yönlüdür geri döndürülemez. Bu fikir Alice ve Bob’un herkese açık bir görüşmede gizli bir anahtar belirleyebilmelerine olanak sağlamaktadır.

Diffie-Hellman bu fikirden yola çıkarak ve modüler aritmetik kullanarak kriptolojide kullanılmak üzere bir anahtar değişim sistemi geliştirmişlerdir. Bu yöntem bilim tarihinin en akıl dışı buluşlarından biridir ve kriptolojinin kurallarını yeniden yazmaya zorlamıştır. Kullanılacak yöntem şu şekildedir; $g^x \pmod{p}$ ’yi hesaplamak için Alice ve Bob; g ve p değerleri belirleyerek bunu herkese açık bir ortamda birbirleriyle payla-



şırlar. p (prime) değeri büyük bir asal sayı olmalıdır, g (generator) değeri üreteç sayısıdır ve p 'den küçüktür. Alice ve Bob kendileri için gizli birer x değeri belirlerler ve buldukları sonucu birbirleriyle paylaşarak ortak bir anahtar üzerinde anlaşmış olurlar. Birbirleriyle paylaştıkları değerleri Eve görse dahi x 'leri bulması imkânsızdır. Bunu bir örnek üzerinde inceleyelim;

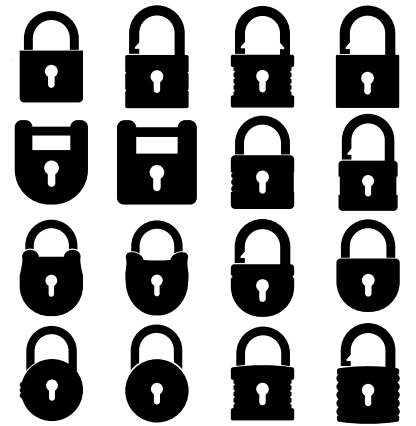
Adımlar	Alice	Bob	Açılama
1. Adım	$g=7, p=11$	$g=7, p=11$	Alice ve Bob g ve p değerlerini herkese açık ortamda birbirleriyle paylaşırlar.
2. Adım	3	6	Alice ve Bob gizli bir sayı belirlerler ve kimseyle paylaşmazlar.
3. Adım	$7^3 \equiv 343 \equiv 2 \pmod{11}$	$7^6 \equiv 111,649 \equiv 4 \pmod{11}$	Alice ve Bob gizli sayılarını $g^x \pmod{p}$ 'de x yerine yerleştirirler.
4. Adım	$a=2$	$b=4$	Alice ve Bob elde ettikleri sonuçları birbirlerine gönderir.
5. Adım	$b^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 9 \pmod{11}$	$a^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 9 \pmod{11}$	Alice; Bob'dan aldığı b değerini $g^x \pmod{p}$ 'de g yerine yerleştirir. Bob; Alice'den aldığı a değerini $g^x \pmod{p}$ 'de g yerine yerleştirir.
6. Adım	Anahtar = 9	Anahtar = 9	Alice ve Bob aynı sonucu bulmuşlardır. Bu anahtardır.

Öğrenciler ikiyeşerli gruplara ayrılır ve Alice ve Bob'un yaptığı gibi kendi gizli anahtarlarını belirledikten sonra ortak bir anahtar belirlemeleri istenir.

Asimetrik Şifreleme Algoritmaları

Asma kilit örneğine dönecek olursak ağız açık olan bir asma kilidi herhangi birisi sadece kapatarak kilitleyebilir ancak sadece anahtara sahip olan birisi açabilir. O hâlde Alice bir asma kilit ve anahtar tasarlar, anahtarı saklar ancak kilidin binlerce kopyasını tüm postanelere dağıtır. Bob, Alice'e gizli bir mesaj göndermek isterse postaneye gider ve mesajı bir kutuya koyar ve Alice'in asma kilidiyle kitler. Artık kutuyu Alice dışında Bob dahil kimse açamaz.

Asimetrik anahtar sisteminde şifreleme için açık anahtar ve deşifreleme için gizli anahtar kullanılır. Bob, Alice'e gizli bir mesaj göndermek isterse sadece onun açık yani herkes tarafından bilinen anahtarı ile mesajı şifreler. Ancak Alice şifreli mesajı sadece kendinde olan gizli anahtarı ile deşifre eder ve okur.



Diffie-Hellman asimetrik anahtar olarak adlandırılan yeni bir tür şifre geliştirmiştir. Ancak bu sisteme uygun şifreleme yöntemini Rivest, Shamir ve Adleman keşfetmiştir. Asimetrik şifreleme yöntemlerinden en yaygın olan RSA şifreleme yönteminde kriptanalizi çok zorlaştıran asal sayılar ve çarpanlara ayırmaya dayalı bir sistem kullanılmıştır.



RSA Şifreleme Algoritması

1976 yılında Rivest, Shamir ve Adleman isimli araştırmacılar tarafından bulunmuştur. Buldukları şifreleme yöntemine de kendi isimlerinin ilk harflerini vermişlerdir. Bu şifreleme sistemi günümüzde yaygın olarak haberleşme sistemlerinde, internette, bankacılık sistemlerinde, akıllı kimlik kartlarında ve daha birçok alanlarda kullanılmaktadır. Alice'in açık anahtar oluşturma adımlarını, Bob'un şifreleme adımlarını ve Alice'in deşifreleme adımları aşağıdaki tablolarda örnek ile açıklanmıştır.

Alice'in açık anahtarını belirleme adımları aşağıdaki gibidir.

Adımlar	Alice	Açıklama
1. Adım	$p = 11, q = 17$	Alice açık anahtarını oluşturmak için iki adet asal sayı seçer.
2. Adım	$N = p \cdot q = 11 \cdot 17 = 187$	Seçtiği iki asal sayıyı çarpar ve bir N değeri elde eder.
3. Adım	$\varphi(N) = (p-1)(q-1)$ $= 10 \cdot 16 \Rightarrow \varphi(n) = 160$	(Bir tam sayının o sayıdan daha küçük ve o sayı ile aralarında asal olan sayıların sayısını gösteren fonksiyona Euler Phi fonksiyonu denir ve φ ile gösterilir. r asal sayısı için $\varphi(r)=(r-1)$ 'dir.)
4. Adım	$e=3$	$1 < e < \varphi(n)$ olacak şekilde $\varphi(n)$ 'den küçük ve $\varphi(n)$ ile aralarında asal bir sayı belirler.
5. Adım	$d \cdot 3 \equiv 1 \pmod{160}$ ise $d = 107$ olur.	$d \cdot e \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ olacak şekilde bir d sayısı bulunur. Bu sayı sadece Alice tarafından bilinmektedir çünkü $\varphi(n)$ 'i sadece Alice bilmektedir. d gizli anahtardır. (d'nin bulunması kolay değildir ancak Öklid algoritması ile bulunabilir.)
6. Adım	$N=187, e=3$	Alice'in açık anahtarı N ve e'dir.

Bob'un Alice'in açık anahtarını kullanarak H harfini şifreleme adımları aşağıdaki gibidir.

Adımlar	Bob	Açıklama
1. Adım	$H \Rightarrow h = 72$	Bir harfin ASCII karşılığı olan değeri alınır.
2. Adım	$72^3 \equiv 183 \pmod{187}$	$h^e \equiv c \pmod{N}$ değeri bulunur.
3. Adım	$c = 183$	Elde edilen sayı şifredir.

Alice'in Bob'un yaptığı şifreleme işlemini deşifreleme adımları aşağıdaki gibidir.

Adımlar	Alice	Açıklama
1. Adım	$d = 107$	d sayısı Alice'in gizli anahtarıdır.
2. Adım	$183^{107} \equiv 72 \pmod{187}$	$c^d \equiv h \pmod{N}$ değeri bulunur.
3. Adım	$h \Rightarrow 72 = H$	Bir sayının ASCII karşılığı olan harf bulunur.

Seçilen p ve q değerleri arttıkça N değerini çarpanlara ayırmak imkânsız hâle gelmektedir. Bu nedenle RSA yeterince büyük p ve q değerleri için güvenilirliği en yüksek yöntemlerden biridir. RSA şifreleme yöntemindeki tek boşluk bir gün bir kişinin N sayısını çarpanlara ayırmanın kısa bir yolunu bulmasıdır ancak iki bin yıldır matematikçiler bir kestirme yol bulma konusunda başarısız olmuşlardır.



Öğrenciler ikiye bölünebilir gruplara ayrılır. Biri Alice ve biri Bob rolünü üstlenir ve Alice olan kendine bir açık anahtar ve bir gizli anahtar belirler. Bob açık anahtarla istediği bir metni şifreler ve Alice de bu metni deşifre eder.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Simetrik Anahtarlı Sistemleri (Lucifer, DES, AES, vb) araştırınız.
- İkilik sistemde yapılabilecek farklı şifreleme yöntemlerini araştırınız.
- Blok ya da metin tabanlı bir program ile ikilik sistemdeki şifreleme yöntemlerini kodlayınız.
- RSA şifreleme yöntemi için yazılmış program kodlarını araştırınız ve kendi programınızı oluşturunuz.
- Euler Phi fonksiyonunun şifrelemedeki kullanımını araştırınız.

KAYNAKLAR

- Beşkirli, A., Özdemir, D., & Beşkirli, M. (2019). Şifreleme Yöntemleri ve RSA Algoritması Üzerine Bir İnceleme. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 284-291.
- Kiraz M. S. (2009). Kriptoloji ve Güvenli Fonksiyonel Hesaplamalar. *Matematik Dünyası Dergisi*, 80(1-2), 116-120.
- Singh S. (2020). *Şifre Kitabı*. Buzdağı Yayıncılık.
- Tektaş M. (2020). *Şifreleme Algoritmalarının Sınıflandırılması ve Algoritmalara Saldırı Teknikleri*. Kriptoloji Konferansı.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceli Puanlama Anahtarı Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

: Cebir ve Sayılar Teorisi/Denklem ve Eşitsizlikler

- : 1. Birinci dereceden bir ve iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin cebirsel ve grafiksel çözümlerini ilişkilendirir.
2. Birinci dereceden eşitsizlik sistemi gerektiren problemler kurar ve çözer.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, birinci dereceden bir ve iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümeleri bulunurken yerine koyma, yok etme veya grafikte çözüm yöntemlerinden faydalanılması amaçlanmaktadır. Birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözümü analitik düzlemde gösterilecektir. Ayrıca eşitsizlik sisteminin doğrudan verildiği ya da öğrenci tarafından kurulduğu problem durumlarına yer verilmesi hedeflenmektedir. Cebirsel gösterimlerin, grafiksel ve tablo gösterimlerine yer verilir. Etkinlik uygulamalarında farklı problem çözme stratejileri geliştirmeleri beklenir.

Başlarken...

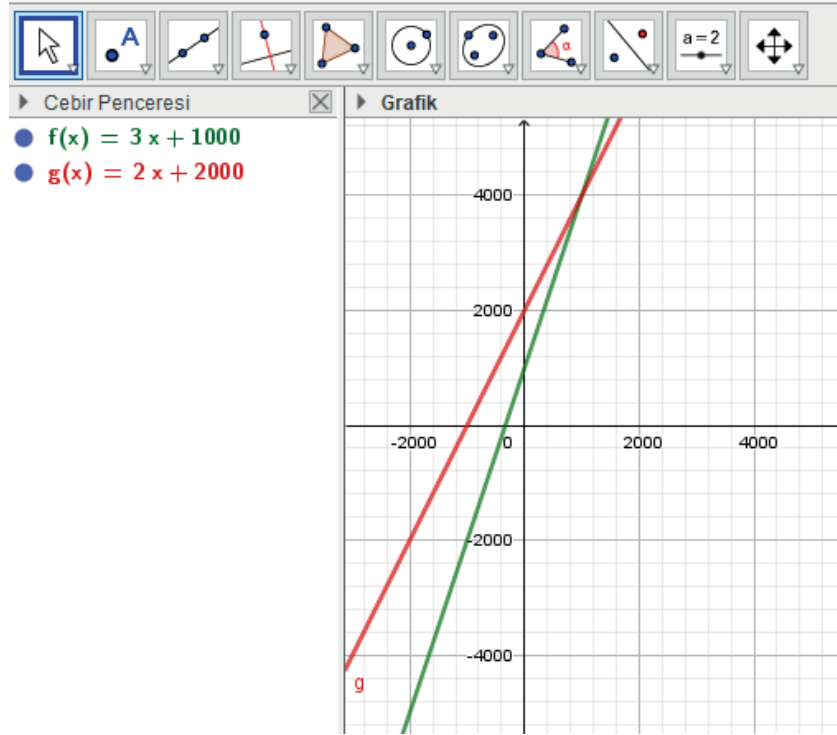
Bir GSM şirketi müşterilerine ücretlendirme periyodu 1 dakika olan iki farklı seçenek (konuşma tarifi) sunmaktadır. 1. tarife göre aylık 10 TL sabit ücret ve her bir dakika konuşma için 3 kuruş, 2. tarife göre ise aylık 20 TL sabit ücret ve her bir dakika konuşma için 2 kuruş ödenmesi gerekmektedir. Bu tarifeler ile ilgili öğrencilere aşağıdaki şekilde sorular sorularak avantajlı tarife hakkında düşünceleri istenir.



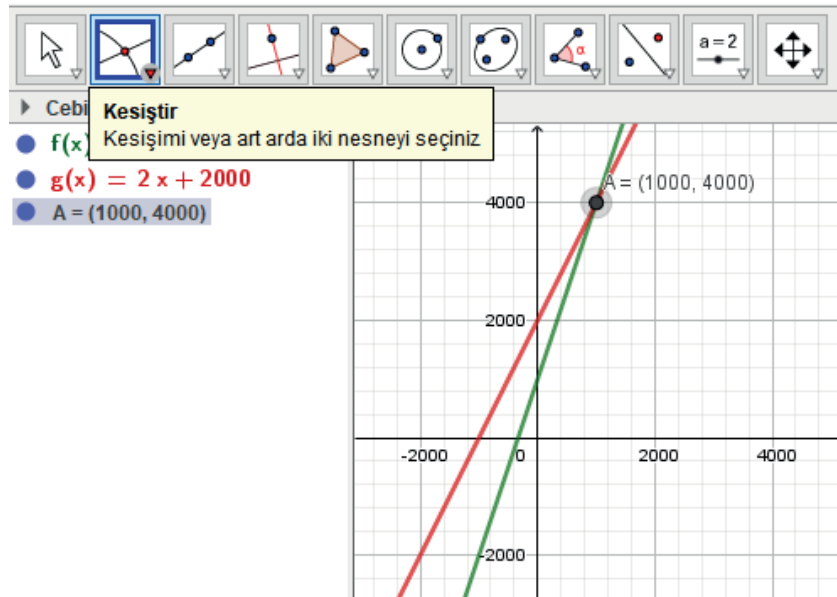
- ✓ Ayda 600 dakika telefon görüşmesi yapılırsa her bir tarife göre ödenecek fatura tutarı ne olur?
- ✓ Ayda 1000 dakika telefon görüşmesi yapılırsa her bir tarife göre ödenecek fatura tutarı ne olur?
- ✓ Ayda ortalama 1200 dakika arama yapan biri için hangi tarife daha ekonomiktir?

Dinamik matematik yazılımı kullanılarak her iki tarife için arama süresine bağlı olarak telefon faturasının kuruluş türünden ne kadar olacağını gösteren grafikler aşağıda çizilmiştir.

“Giriş” sekmesinde “ $f(x)=3x+1000$ ” ve “ $g(x)=2x+2000$ ” yazılarak her iki fonksiyona ait grafik çizilir.



“Kesıştır” sekmesinden önce f sonra g fonksiyonu seçilerek kesiştikleri nokta belirlenir.



Grafikler yorumlandığında 1000 dakikaya kadar 1. tarife ($f(x) = 3x + 1000$) avantajlı iken 1000 dakikadan sonra ise 2. tarife ($g(x) = 2x + 2000$)'nin daha avantajlı olduğu görülmektedir. Tam olarak 1000 dakika konuşmada ise her iki tarife için de eşit şekilde 40 TL ücret ödenmektedir.

**Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler****TANIM**

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b = 0$ şeklindeki ifadeler **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** denir. Denklemi sağlayan x değerine denklemin **kökü** denir.

Örnek:**Etkinlik Formu Soru 1**

Aşağıdaki tabloda verilen denklemlerin ilgili sayı kümelerinde köklerini bulunuz.

Denklem	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
$4x+7=15$			
$2x+4=0$			
$3x-5=0$			

Çözüm:

Denklem	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
$4x+7=15$	2	2	2
$2x+4=0$	$\emptyset$	-2	-2
$3x-5=0$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\frac{5}{3}$

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

Öğrencilere, “Asude’nin kumbarasında 25 kuruşluk ve 50 kuruşluk olmak üzere toplam 50 adet madeni para bulunmaktadır. Asude’nin kumbarasında toplam 40 TL olduğuna göre, 25 kuruşluk ve 50 kuruşluk madeni paralardan kaçar tane vardır?” sorusu yönlendirilir.

Problemin çözümü için verilen cevaplar incelendiğinde bir denklem sistemi ile karşılaşılacaktır. 25 kuruşların sayısına x ve 50 kuruşların sayısına da y dersek,

$$x + y = 50$$

$$25x + 50y = 2000$$

şeklinde iki denklemin birlikte çözülmesi gerekecektir.



TANIM

a, b ve c reel sayılar, a ve b sıfırdan farklı olmak üzere, $ax + by = c$ şeklindeki ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir. Birinci dereceden iki bilinmeyenli birden fazla denklem varsa, **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** oluşur. Denklem sisteminin çözümünde elde edilen (x, y) sıralı ikilisinden oluşan küme sistemin **çözüm kümesi** denir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözüm kümesini bulmak için yerine koyma, yok etme, grafik çizme gibi yöntemler kullanılır. Şimdi bu yöntemlerin nasıl kullanıldığını inceleyelim.

Yerine Koyma Yöntemi

$$ax + by + c = 0$$

$$dx + ey + f = 0$$

denklem sisteminin yerine koyma yöntemi ile çözümünde; birinci denklemde x ya da y değişkeni yalnız bırakılarak ikinci denklemde yerine yazılır. Bulunan x ya da y değeri herhangi bir denklemde yerine yazılarak diğer bilinmeyen bulunur.

Örnek:

$$2x - y = 5$$

$$x + 3y = 6$$

denklem sisteminin çözüm kümesini yerine koyma yöntemini kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$2x - y = 5$ denkleminde, $y = 2x - 5$ bulunur. Bunu diğer denklemde yerine yazarsak,

$x + 3(2x - 5) = 6 \Rightarrow x + 6x - 15 = 6 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$ bulunur. $x = 3$ değerini denklemlerin herhangi birinde yerine yazarak y değerini bulabiliriz.

Birinci denklemde yerine yazılırsa: $2 \cdot 3 - y = 5 \Rightarrow y = 1$ bulunur.

O hâlde denklem sisteminin çözüm kümesi: $\text{Ç.K} = \{(3, 1)\}$ olur.

Yerine koyma yöntemi ile ilgili örneklerle yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 2)

Yok Etme Yöntemi

$$ax + by + c = 0$$

$$dx + ey + f = 0$$

denklem sisteminin yok etme yöntemi ile çözümünde; her iki denklemde x ya da y 'nin katsayıları eşit ve zıt işaretli olacak şekilde düzenlenir ve taraf tarafa toplanarak bilinmeyenlerden birisi yok edilir. Tek bilinmeyene göre bulunan değer, herhangi bir denklemde yerine yazılarak diğer bilinmeyen bulunur.

**Örnek:**

$$3x - y = 8$$

$$5x + 2y = 6$$

denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme yöntemini kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$3x - y = 8$ denklemini 2 ile çarpalım: $6x - 2y = 16$ bulunur. Şimdi iki denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$6x - 2y = 16$$

$$5x + 2y = 6$$

Buradan, $11x = 22 \Rightarrow x = 2$ bulunur. $x = 2$ değerini denklemlerin herhangi birinde yerine yazarak y değerini bulabiliriz.

Birinci denklemde yerine yazılırsa: $3.2 - y = 8 \Rightarrow y = -2$ bulunur.

O hâlde denklem sisteminin çözüm kümesi: $\text{Ç.K} = \{(2, -2)\}$ olur.

Yok etme yöntemi ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3)

Grafik Çizme Yöntemi

$$ax + by + c = 0$$

$$dx + ey + f = 0$$

denklem sisteminin grafik ile çözümünde; her iki denklemi oluşturan doğrusal grafikler çizilir. Grafiklerin kesim noktasının koordinatları denklem sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

Örnek:

$$2x + y = 9$$

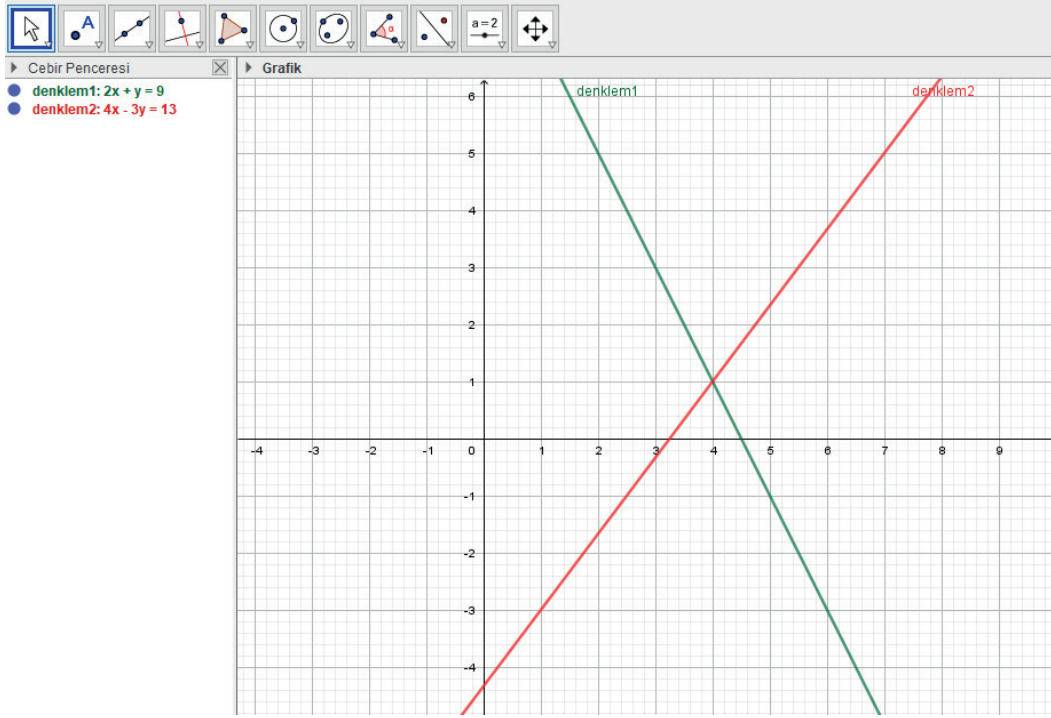
$$4x - 3y = 13$$

denklem sisteminin çözüm kümesini grafik çizme yöntemini kullanarak bulunuz.

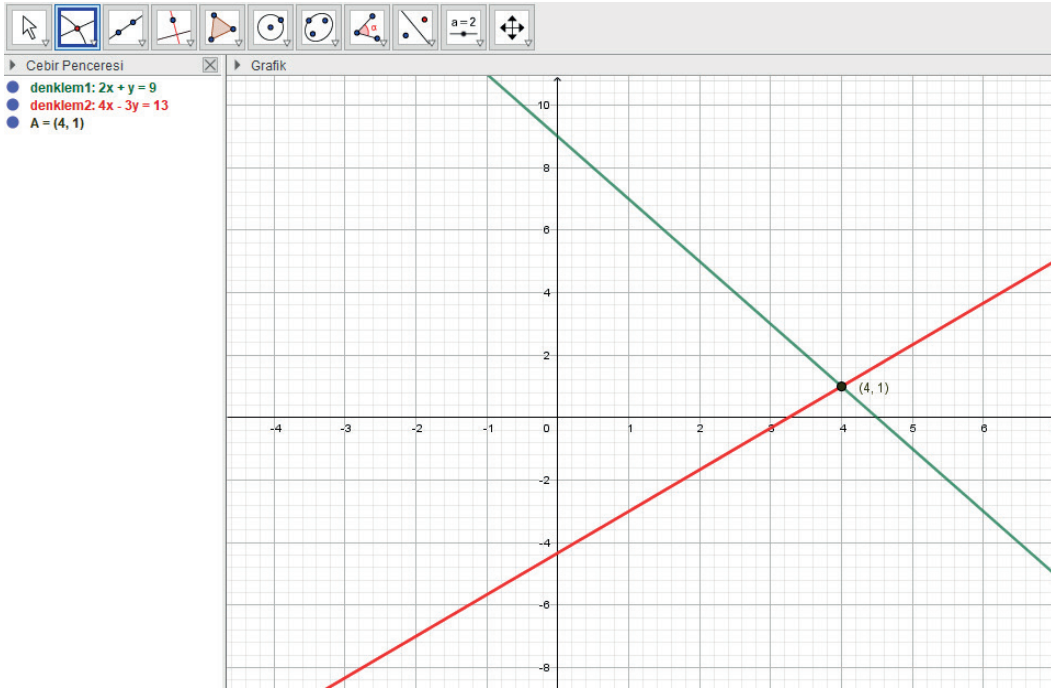
Çözüm:

Dinamik matematik yazılımı kullanarak denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

“Giriş” sekmesine “ $2x+y=9$ ” ve “ $4x-3y=13$ ” yazılarak her iki denkleme ait doğru grafiği çizilir.



“Kesiştir” sekmesinden, önce 1. denklem, sonra 2. denklem seçilerek kesiştikleri nokta yani denklemin çözüm kümesi bulunur.



Grafik çizme yöntemi ile ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 4)



$$ax + by + c = 0$$

$$dx + ey + f = 0$$

denklem sistemi verilmiş olsun.

1. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise denklem sistemini oluşturan doğrular çakışık olup sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.
2. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ ise denklem sistemini oluşturan doğrular paralel olup sistemin çözüm kümesi $\emptyset$ dir.
3. $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise denklem sistemini oluşturan doğrular tek noktada kesişiyordur ve sistemin çözüm kümesi tek elemanlıdır.

Verilen denklem sisteminin çözüm kümesi ile ilgili örneklere yer verilir (Etkinlik Formu Soru 5-6)

Birinci Dereceden Bir ve İki Bilinmeyenli Eşitsizlik



Klima üretimi yapan bir fabrikada manuel ve dijital olmak üzere iki tür klima üretilmektedir. Manuel modelin üretimi için 8 saatlik bir iş gücü gerekirken, dijital modelin üretimi için ise 12 saatlik bir iş gücü gerekmektedir. Bu fabrikada haftalık iş gücü en fazla 240 saat ile sınırlı olup üretim kapasitesi ise en fazla 24 klimadan ibarettir. Buna göre, her iki modelden de kaç adet klima üretilebileceğini belirleyelim.

Çözüm:

Manuel klima modeli sayısı x , dijital klima modeli sayısı y olsun. Bir adet manuel klima üretimi için 8 saat gerekmektedir, x adet manuel klima üretimi için $10x$ saat



gerekir. Benzer şekilde, bir adet dijital klima üretimi için 12 saat gerekmektedir, y adet dijital klima üretimi için $12y$ saat gerekir.

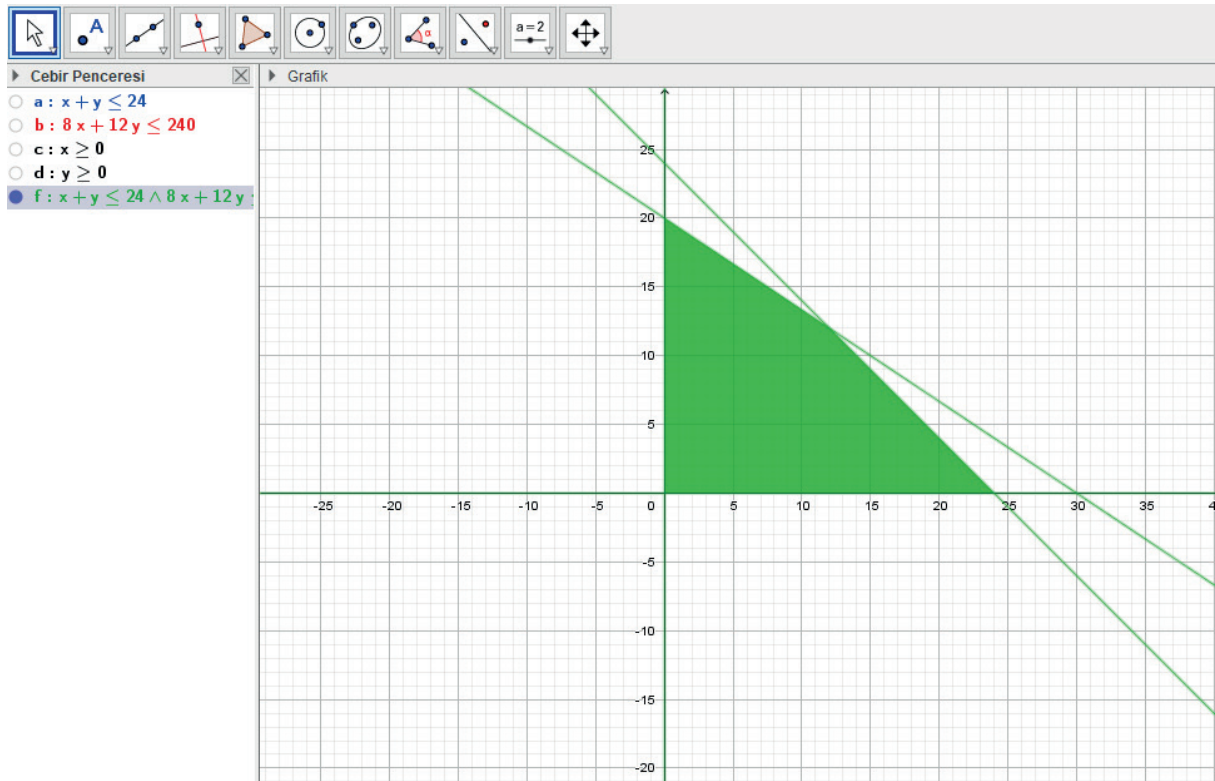
Haftalık iş gücü en fazla 240 saat ile sınırlı olduğu için bunu eşitsizlik olarak $8x + 12y \leq 240$ olarak ifade edebiliriz.

Haftalık üretim kapasitesi en fazla 24 klima olduğu için, $x + y \leq 24$ olarak ifade edilebilir.

Her bir modelden negatif sayıda üretim söz konusu olamayacağı için, $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olur.

Dolayısıyla aşağıdaki eşitsizlik sistemi elde edilir.

“Giriş” sekmesine “ $8x+12y \leq 240$ ” yazılıp Enter tuşuna basılır. “ $x+y \leq 24$ ” yazılıp Enter tuşuna basılır. “ $y \geq 0$ ” yazılıp Enter tuşuna basılır. “ $x \geq 0$ ” yazılıp Enter tuşuna basılır. “ $a \wedge b \wedge c \wedge d$ ” yazılıp Enter tuşuna basılınca eşitsizlik sistemi ekranda belirir.



Eşitsizlik sisteminin çözümü şekildeki yeşil renkli dörtgensel bölgedeki koordinatları tam sayı olan noktalardır. Bu dörtgensel bölgedeki tam sayı koordinatlı noktalar bize manuel ve dijital klima modellerinden kaç tane üretilebileceğini göstermektedir. Üretimin tamamı manuel klima modelinden yapılırsa toplam 30 adet, tamamı dijital klima modelinden yapılırsa toplam 24 adet klima elde edilir. Örneğin tatile denk gelen ve çalışma saatinin az olduğu bir haftada, 10 adet manuel ve 12 adet dijital klima üretimi yapılmış olabilir.



TANIM

a , b ve c reel sayılar, a ve b sıfırdan farklı olmak üzere, $ax + b \leq c$ şeklindeki ifadeler **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik**, $ax + by \leq c$ şeklinde yazılan ifadeler **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik** denir. ($\leq$ sembolünün yerini $>$, $<$ veya sembolleri de kullanılabilir) Bir eşitsizliği sağlayan (x, y) sıralı ikilisine o eşitsizliğin bir çözümü denir. Eşitsizliği sağlayan bütün sıralı ikililerden oluşan kümeye ise **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir ve grafik üzerinde taralı bölge olarak gösterilir.

Örnek:

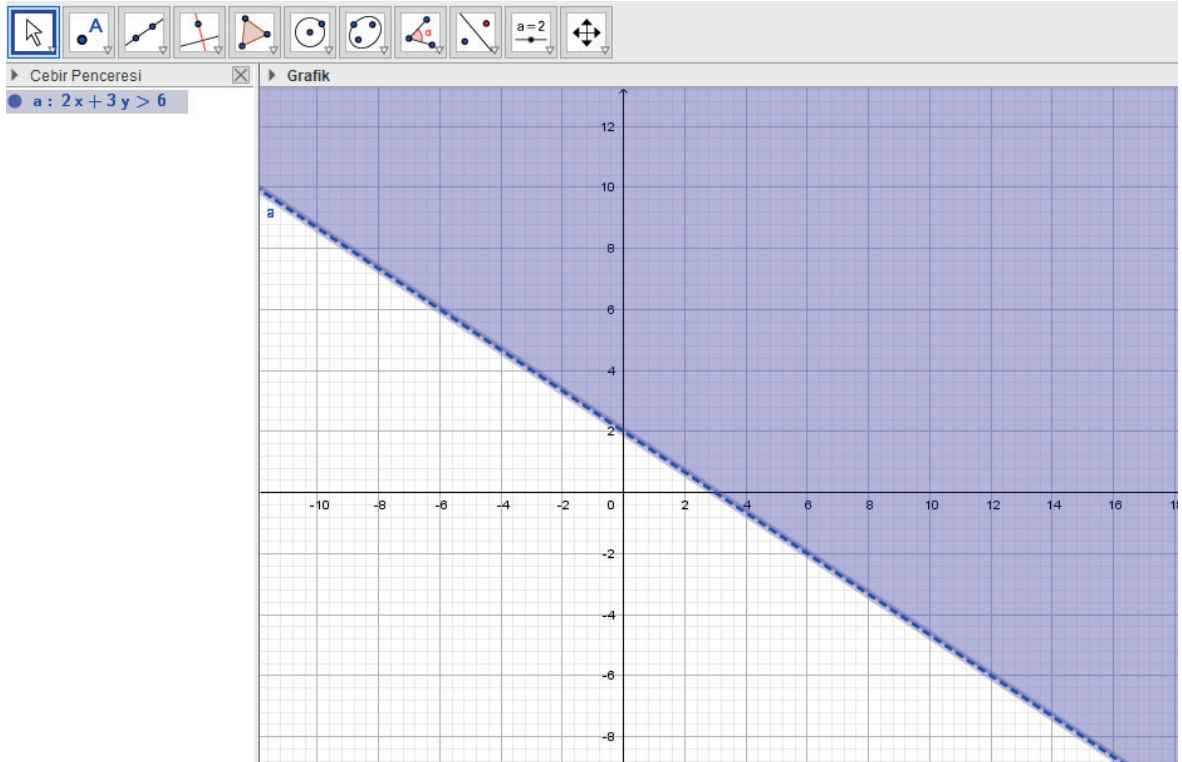
Aşağıdaki eşitsizlikleri ve eşitsizlik sistemini sağlayan bölgeyi grafik üzerinde gösteriniz.

- a. $2x + 3y > 6$
- b. $-3x + 4y \leq 12$
- c. $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y > 6 \\ -3x + 4y \leq 12 \end{array} \right\}$

Çözüm:

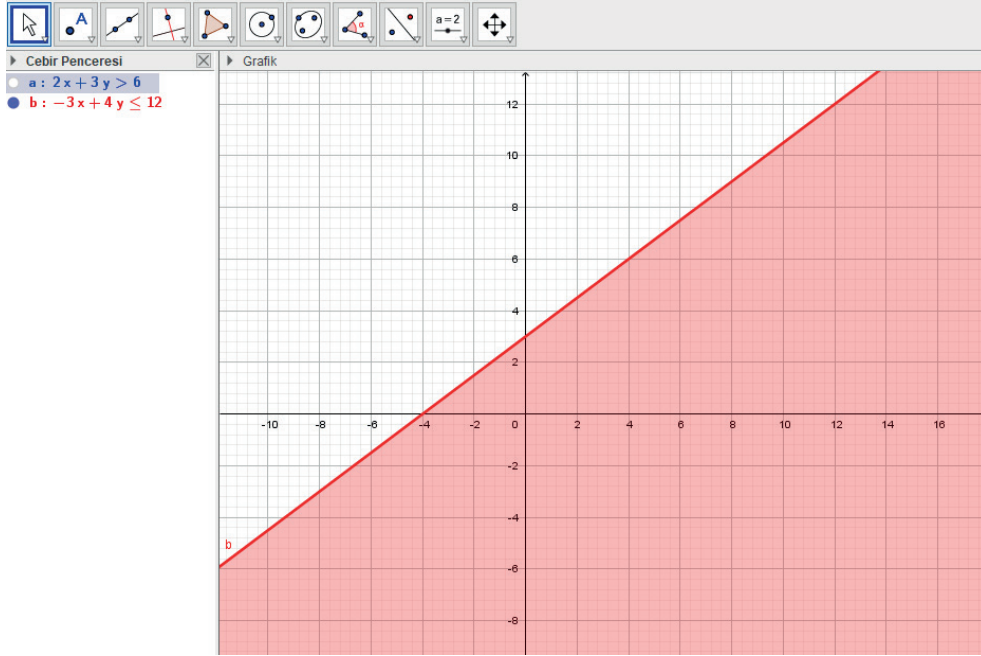
- a. Dinamik matematik yazılımı kullanılarak $2x + 3y > 6$ eşitsizliğini sağlayan bölgeyi grafik üzerinde gösterelim.

“Giriş” sekmesine “ $2x+3y>6$ ” yazılarak eşitsizliği sağlayan bölge bulunur.



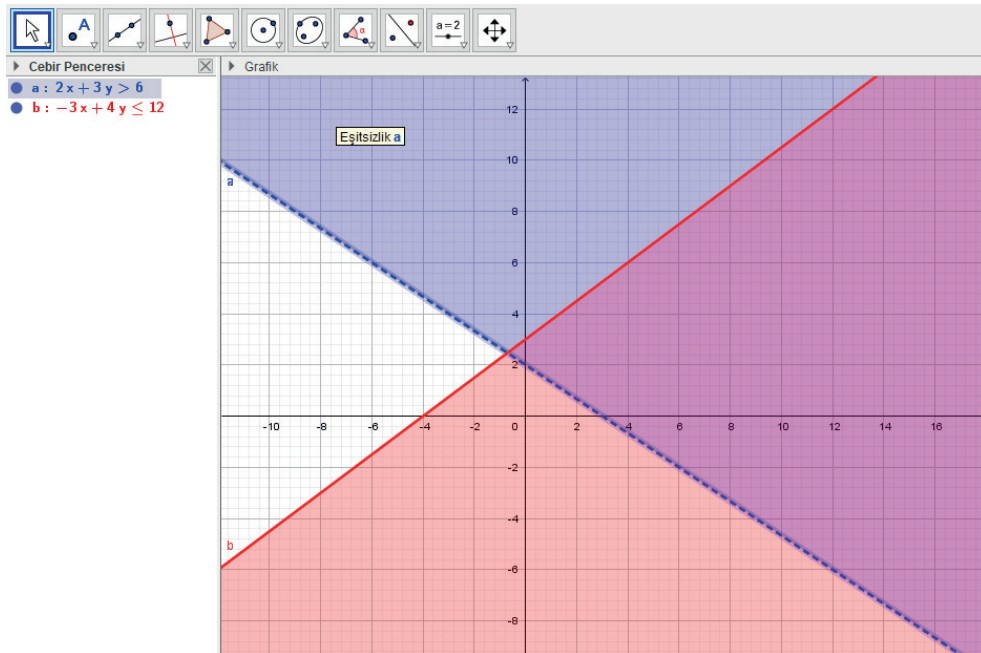
- b. Dinamik matematik yazılımı kullanılarak $-3x + 4y \leq 12$ eşitsizliğini sağlayan bölgeyi grafik üzerinde gösterelim.

“Giriş” sekmesine “ $-3x+4y \leq 12$ ” yazılarak eşitsizliği sağlayan bölge bulunur.



- c. Dinamik matematik yazılımı kullanılarak $\begin{cases} 2x + 3y > 6 \\ -3x + 4y \leq 12 \end{cases}$ eşitsizliğini sağlayan bölgeyi grafik üzerinde gösterelim.

“Kesiştir” sekmesinden sırasıyla a ve b seçilerek $\begin{cases} 2x + 3y > 6 \\ -3x + 4y \leq 12 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi oluşturur.





EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Diyafont denklemler hakkında araştırma yapılabilir.
- Denklem ve eşitsizlikler yardımı ile çözülebilecek gerçek hayat problemleri oluşturur.

KAYNAKLAR

Komisyon. (2013). *Ortaöğretim Matematik 9. Sınıf 1. Kitap*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

ÖSYM (2021). *Temel Yeterlilik Testi (Tyt) Soru ve Cevapları*. https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2021/YKS/TSK/tyt_yks_2021.pdf Erişim Tarihi: 14.07.2021

Uğurel, I., & Moralı, S. (2010). Ortaöğretim öğrencilerinin kümeler konusundaki öğrenmelerinin değerlendirilmesi-I. *Akademik Bakış Dergisi*, 22, 1-25.

Uçak, A., Emir, E., Uçkun, F., Kutlu, G., Kahraman, S. (2018). *Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik 9. Sınıf Ders Kitabı*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
2. (1,2)
3. $(\frac{-1}{7}, \frac{33}{7})$
4. (100,1)
5. 5
6. -1
7. A
8. C



Etkinlik Formu

1. Aşağıdaki tabloda verilen denklemlerin ilgili sayı kümelerinde köklerini bulunuz.

Denklem	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
$4x+7=15$			
$2x+4=0$			
$3x-5=0$			

2. $x+2y=5$

$-2x+3y=4$ denklem sisteminin çözüm kümesini yerine koyma yöntemi ile çözünüz.

3. $x+2y=5$

$-2x+3y=4$ denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme yöntemi ile çözünüz.

4. $20x+23y=2023$

$20x+21y=2021$ denklem sisteminin çözüm kümesini grafik çizme yöntemi ile çözünüz.

5. $2x+(3a-12)y-5=0$

$4x+6y-10=0$ denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre a kaçtır?

6. $3x-4y+7=0$

$9x+(4m-8)y-7=0$ denklem sisteminin çözüm kümesi $\emptyset$ olduğuna göre m kaçtır?

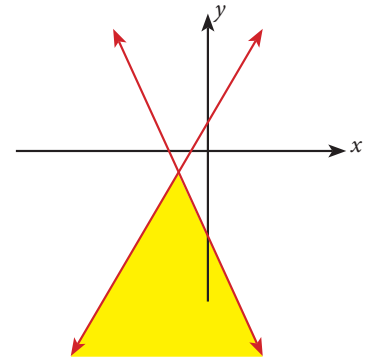
7. a, b, c ve d birer gerçel sayı olmak üzere,

$$x + ay \leq b$$

$$x + cy \geq d$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi yeşile boyanarak yandaki koordinat düzleminde gösterilmiştir.

Buna göre a, b, c ve d sayılarının işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir? (2021-TYT)



A) +, -, -, -

B) +, +, +, -

C) +, -, +, -

D) -, -, +, -

E) -, +, -, +

8. Faruk, 2020 yılında ziyaret ettiği bir müzede gördüğü bir vazoya ait bilgileri okurken vazanın bulunduğu yıl ile kendi doğduğu yılın aynı olduğunu ve vazanın, bulunduğu 300 yaşında olduğunu öğrenmiştir. Ayrıca bu ziyareti sırasında kendi yaşının 39 katının vazanın yapıldığı yıla eşit olduğunu hesaplamıştır.

Buna göre, 2020 yılında Faruk kaç yaşındadır? (2021-TYT)

A) 41

B) 42

C) 43

D) 44

E) 45

A decorative border at the top and bottom of the page features various mathematical icons in a light blue color. These include a pencil, a calculator, a circle with intersecting lines, a sine wave, a stack of papers, a right-angled triangle, a compass, a coordinate plane with a curve, a shaded area under a curve, a circle with a cross, a stack of papers, a sine wave, a circle with intersecting lines, a compass, a coordinate plane with a curve, a shaded area under a curve, a circle with a cross, and a stack of papers.

ANALİZ

2. Ünite



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI**: FONKSİYONLAR****MODÜL/KONU**

: Analiz/Fonksiyonlar

KAZANIMLAR

1. Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli fonksiyonu açıklayarak temsiller arası ilişki kurar.
2. İki fonksiyonun eşit olma şartlarını belirler.
3. Fonksiyonları tanım ve görüntü kümelerine göre sınıflandırır.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK**MATERYALLER**

: Etkinlik Formu, dinamik matematik yazılımı

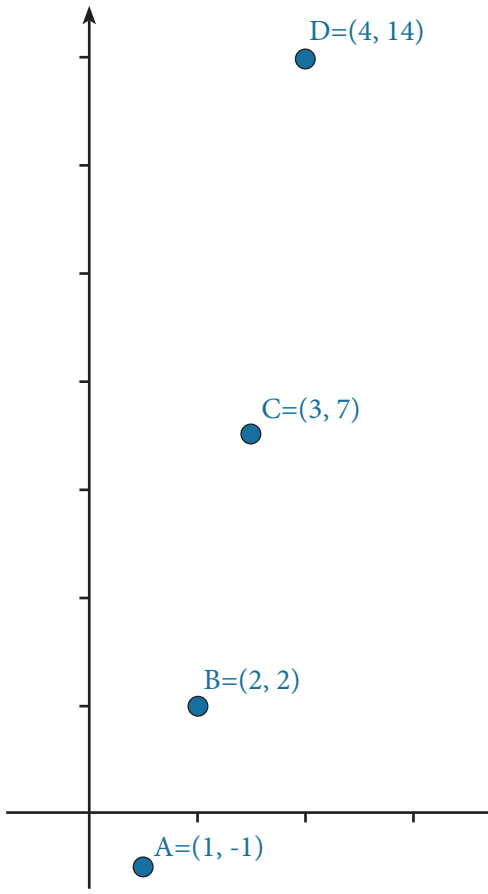
Etkinliğin Amacı

Analiz'in giriş konusu olan fonksiyonlara yönelik hazırlanan bu etkinlikte; fonksiyonun tanım, kural, değer ve görüntü kümelerini buldurmaya ve aralarındaki ilişkiyi sembolik olarak göstermeye yönelik çalışmalar yer almaktadır. Öğrencilerin fonksiyonun farklı temsillerini oluşturması ve aralarında ilişki kurması amaçlanmıştır. İki fonksiyonun eşit olması için gerekli şartların neler olduğu sorgulandıktan sonra fonksiyon çeşitlerine yer verilecektir. İçine, örten, birebir ve birim fonksiyonları incelemeye yönelik çalışmalar yapılacaktır. Bir fonksiyonun birebir ve örtenliğinin incelenmesine olanak tanıyan yatay doğru testinin öğrenciler tarafından açıklanması hedeflenmektedir. Ayrıca bir fonksiyonun grafiği üzerinde görüntü ve ters görüntüyü inceleme çalışmaları yapmaları istenecektir.

Başlarken...

Dünyanın en önemli matematikçileri arasında yer alan Fermat ve Descartes geometri ile cebir arasında önemli bir bağlantı keşfetti. Bu bağlantı koordinat sistemi idi. Koordinatları ilk kez açıklayan Fermat'tır. Fermat eğrilerin geometrisini anlamaya çalışıyordu. Modern koordinat kavramı ise Descartes'in çalışmaları ile gelişmiştir. Koordinatların matematikteki önemi, fonksiyonları grafik olarak temsil etmeyi mümkün kılmasıdır.





Yandaki şekilde A, B, C ve D noktaları koordinat sistemine belirli bir kurala göre yerleştirilmiştir. Acaba bu kuralı bulabildiniz mi?

GİRİŞ

Çocuklarını sinemaya götürmüş bir grup kadın sinema çıkışında çocuklarını beklemektedir. Her çocuğun annesi ile sinemaya geldiği bilinmektedir. Çocukları annelerine götüreren oklar çizelim. Bu oklar çocuklar kümesi ile anneler kümesini birbirine eşlesin. Bu oklar ile ilgili aşağıdaki soruları yönlendirelim.

- Bir çocuktan iki tane ok çıkartabilir miyiz?
- İki kardeş sinemaya gitmişse oklar aynı kadınla mı eşleşir?
- Çocuk sayısı kadın sayısından fazla olsa bu durum neyi ifade eder?

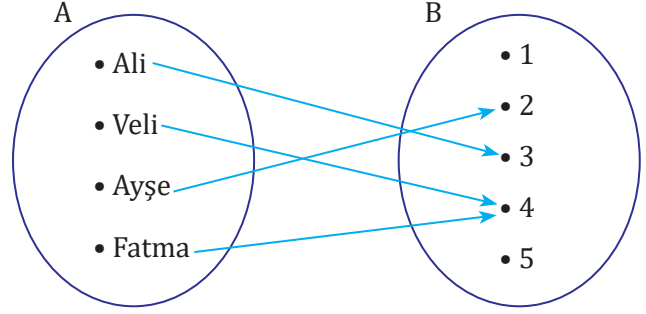




Burada çocuklar kümesindeki her elemanın kadınlar kümesindeki yalnız bir eleman ile eşleştiği, kadınlar kümesinde eşleşmeyen elemanların olabileceği ve çocuklar kümesindeki birden fazla elemanın kadınlar kümesindeki aynı eleman ile eşleşebileceği durumları incelenerek fonksiyon kavramına giriş yapılabilir.

Farklı Temsiller

Aynı sınıfta olan 4 arkadaşın matematik sınavından aldığı notlar (5'lik sistemde) yandaki kümeler yardımıyla gösterilmiştir. Bu ilişki farklı nasıl gösterilebilir?



Tablo yardımıyla:

Öğrenci Adı	Aldığı Not
Ali	3
Veli	4
Ayşe	2
Fatma	4

Liste yardımıyla:

$\{(Ali, 3), (Veli, 4), (Ayşe, 2), (Fatma, 4)\}$

Farklı gösterimler ile verilen yukarıdaki ilişki matematiğin merkezi olarak kabul edilen fonksiyon kavramına bir örnektir. Fonksiyon kavramının formel tanımını şu şekildedir.

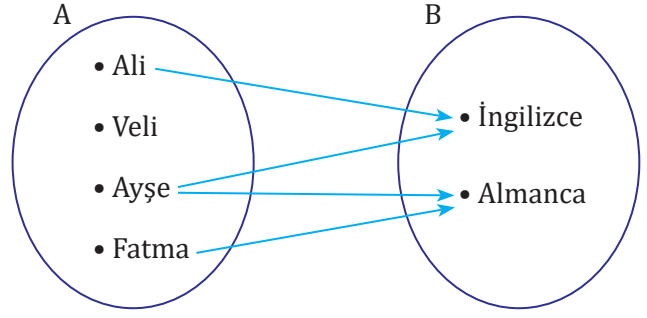
TANIM

A, B boş olmayan iki küme ve f , A dan B ye bir bağıntı olsun. Eğer her $a \in A$ için $(a, b) \in f$ olacak şekilde bir tek B varsa o zaman f ye A dan B ye bir fonksiyon, A kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, B kümesine de f fonksiyonunun değer kümesi denir. A kümesindeki elemanların B kümesindeki eşleştiği elemanlara görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir.

Formel tanımda yer aldığı gibi bir bağıntının fonksiyon olması için, tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde yalnız bir eleman ile eşleşmesi gerekir. Örnekte öğrencilerin yer aldığı A kümesi tanım kümesi, 5'lik sistemde notların yer aldığı B kümesi değer kümesidir. f fonksiyonunun kuralı ise sınıftaki bu dört öğrenciyi matematik sınavından aldığı notlar ile eşleştirmektir. Öğrencilerin aldığı notları veren $\{2, 3, 4\}$ kümesi de fonksiyonun görüntü kümesidir ve $f(A)$ şeklinde gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere her eşleme bir fonksiyon olmayabilir.

Bağıntı – Fonksiyon İlişkisi

Aynı sınıfta olan 4 arkadaşın bildiği yabancı diller ile eşleştiren bir bağıntı sizce bir fonksiyon mudur?

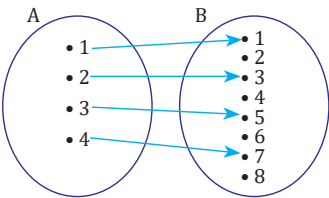
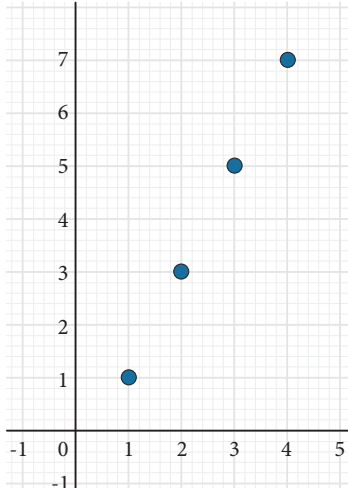


Tanımda yer alan her $a \in A$ için $(a, b) \in f$ olacak şekilde bir tek b varsa koşulu sağlanmamaktadır. Tanım kümesinde yer alan Veli, herhangi bir yabancı dil bilmediği için değer kümesinden bir eleman ile eşleşememiştir. Ayşe, İngilizce ve Almanca bildiği için değer kümesinde birden fazla eleman ile eşleşmiştir. O yüzden öğrencileri bildiği yabancı diller ile eşleştiren bağıntı bir fonksiyon değildir.

Fonksiyon Örnekleri

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ olmak üzere A kümesindeki elemanların 2 katının 1 eksiğine eşleyen f fonksiyonunun cebirsel kuralını yazınız. Bu fonksiyonu Venn şeması, tablo yardımı ve liste yöntemi ile gösteriniz. Ayrıca bir matematik yazılımında bu noktaları koordinat sisteminde gösteriniz. Bu etkinlik ile ilgili aşağıdaki tablo öğrencilere doldurtulabilir. (Etkinlik Formu 1)

Tanım Kümesi	$A = \{1, 2, 3, 4\}$	Değer Kümesi	$B = \{1, 2,3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
Cebirsel Gösterimi (Kuralı)	$f(x) = 2x - 1$	Görüntü Kümesi	$f(A) = \{1, 3, 5, 7\}$

FARKLI GÖSTERİMLER				
Venn Şeması	Tablo		Liste	Grafik
	X	f(x)	$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$	
	1	1		
	2	3		
	3	5		
	4	7		



Etkinlik Formu 2’de farklı gösterimler ile verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarına yönelik çalışma yer almaktadır.

Tablo Yazılımı Uygulaması

Tablo yazılımında A sütununa oluşturulacak fonksiyonun tanım kümesinin elemanları yazılır (Örnek; rakamlar kümesi). B sütununa ise oluşturulacak fonksiyonun değer kümesinin elemanları yazılır (Örnek; 1’den 20’ye kadar olan tam sayılar). Fonksiyon ekle menüsünden tanım kümesindeki elemanları değer kümesindeki elemanlara eşleyebilecek, görüntü kümesi C sütunu olan bir fonksiyon bulmaları istenir (Örnek; tanım kümesindeki elemanların 10 fazlasının karekökünü kendisinden küçük olmayan en küçük tam sayı ile eşler.).

✕ ✓ fx =TAVANAYUVARLA(KAREKÖK(A1+10);1)							
A	B	C	D	E	F	G	H
0	1	4					
1	2	4					
2	3	4					
3	4	4					
4	5	4					
5	6	4					
6	7	4					
7	8	5					
8	9	5					
9	10	5					
	11						
	12						
	13						
	14						
	15						
	16						
	17						
	18						
	19						
	20						

Fonksiyonların Eşitliği

Aslı, Arda, Atakan ve Aylin A sınıfında; Beril, Bülent, Beyza ve Berfin B sınıfında öğrenim görmektedir. Bu öğrencileri, fen bilgisi dersinden aldıkları notlar ile eşleyen fonksiyonlar tablo yardımıyla gösterilmiştir.

A = {Aslı, Arda, Atakan, Aylin}	
C = {1, 2, 3, 4, 5}	
$f: A \rightarrow C$	
(f: A sınıfındaki öğrencileri fen bilgisi dersinden aldıkları notlara eşliyor.)	
Aslı	4
Arda	4
Atakan	5
Aylin	5

B = {Beril, Bülent, Beyza, Berfin}	
C = {1, 2, 3, 4, 5}	
$g: B \rightarrow C$	
(g: B sınıfındaki öğrencileri fen bilgisi dersinden aldıkları notlara eşleniyor.)	
Beril	5
Bülent	4
Beyza	5
Berfin	4

“Sizce bu fonksiyonlar eşit midir?”, “Bir fonksiyonun eşit olması için hangi şartların sağlanması gerekir?” gibi sorular öğrencilere yönlendirilerek iki fonksiyonun eşit olma şartlarını belirlemeleri sağlanır.

Formel tanım verilmeden önce Etkinlik Formu 3’te yer alan çalışmalar yaptırılır.

TANIM

A, B iki küme; $f: A \rightarrow B$ ve $g: A \rightarrow B$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $a \in A$ için $f(a) = g(a)$ ise o zaman f ile g fonksiyonları eşittir denir ve $f = g$ şeklinde gösterilir.

Fonksiyonların Sınıflandırılması

Fonksiyon tanımı ve şu ana kadar verilen örnekler göz önüne alınarak aşağıdaki soruların cevaplanması istenir.

- Tanım kümesindeki her elemanın değer kümesindeki görüntüsü farklı olmak zorunda mıdır?
- Değer kümesindeki her elemanın tanım kümesindeki bir elemanın görüntüsü olmak zorunda mıdır?
- Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü değer kümesinde olmak zorunda mıdır?

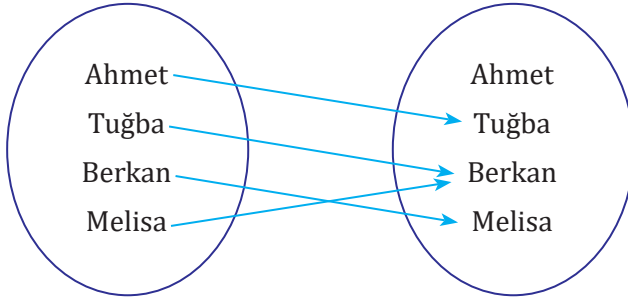
Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü değer kümesinde olmak zorundadır. Ancak tanım kümesindeki her elemanın değer kümesindeki görüntüsü farklı olmak zorunda değil ve değer kümesindeki her elemanın tanım kümesindeki bir elemanın görüntüsü olma zorunluluğu bulunmamaktadır. Bu özellikleri sağlayan fonksiyonlar özel olarak adlandırılır.



Arkadaş Buluşması

Ahmet, Tuğba, Berkan ve Melisa parkta buluşmuş ve birlikte güzel bir gün geçirmiştir. Gün sonunda Tuğba, Melisa'yı evine davet etmiş ve Melisa ailesinden izin alarak akşam yemeğine Tuğbalarda kalmıştır. Ahmet ve Berkan ise kendi evlerine dönmüşlerdir.

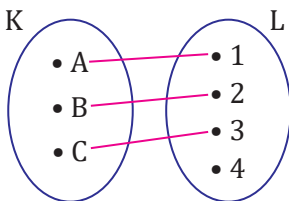
Herkesin evlerine dönme durumlarını kümeler yardımıyla birebir eşleme olarak gösterin.



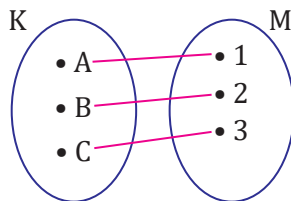
Bu eşleme bir fonksiyondur. Öğrencilere bu fonksiyon ile herkesin kendi evine dönme durumunda ortaya çıkan fonksiyonun farklılıkları sorulur.

Örnek:

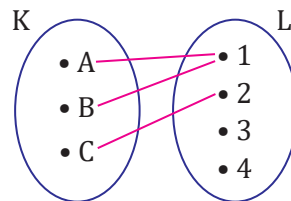
Aşağıdaki şekilde 4 tane fonksiyon verilmiştir. Altlarında fonksiyon türleri yer almaktadır. Bu fonksiyon türleri hakkında bilgi vermeden fonksiyonları ve türlerini inceleyerek içine, birebir ve örten fonksiyonların özellikleri tahmin ettirilebilir (Etkinlik Formu 4).



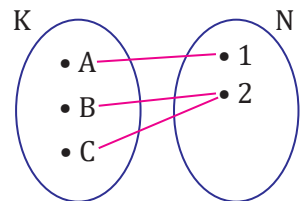
- ☒ İçine Fonksiyon
☐ Örten Fonksiyon
☒ Birebir Fonksiyon



- ☐ İçine Fonksiyon
☒ Örten Fonksiyon
☒ Birebir Fonksiyon



- ☒ İçine Fonksiyon
☐ Örten Fonksiyon
☐ Birebir Fonksiyon



- ☐ İçine Fonksiyon
☒ Örten Fonksiyon
☐ Birebir Fonksiyon

TANIM

f , A dan B ye bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ eşitliğini sağlayan her $a, b \in A$ için $a = b$ oluyorsa f ye birebir fonksiyon denir. Her $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ varsa f ye bir örten fonksiyon denir. Örten olmayan fonksiyonlara ise içine fonksiyon denir.

Örten fonksiyonlarda değer kümesinin görüntü kümesine eşit olduğu ifade edilir ($B = f(A)$).

Birim Fonksiyon:

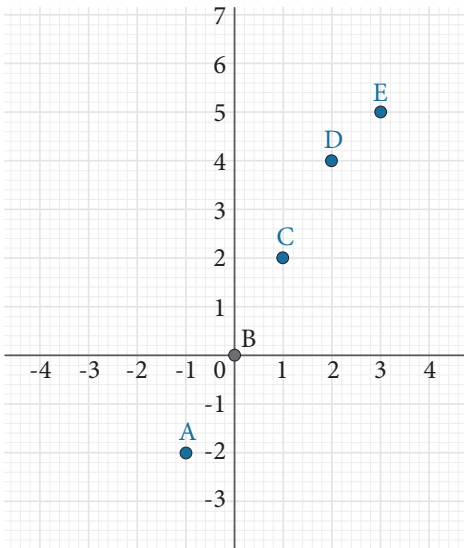
Tanım ve değer kümesi aynı olan fonksiyonlar vardır ve bunlardan bir tanesi çok özeldir. Öğrencilere bilgisayar yazılımlarında, doğal sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine tanımlanan ve tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde kendisine eşleyen bir fonksiyon yazmaları istenir. Öğrenciler, bu fonksiyonu tanımlarken çarpma işleminin etkisiz elemanı olan 1'i ya da toplama işleminin etkisiz elemanı olan 0'ı kullanabilir. $f(x) = x \cdot 1$ ya da $f(x) = x + 0$ yazarak bu fonksiyon tanımlanırken iki durumda da $f(x) = x$ fonksiyonunun elde edildiği görülür.

TANIM

$A \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her $x \in A$ için $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan $A \rightarrow A$ fonksiyonuna A üzerindeki birim fonksiyon denir.

Birebir ve örten fonksiyonların grafikleri ile ilgili çalışmalara yer vermeden önce bir fonksiyonun birebir olması değer kümesinden bağımsız iken örten olmasının değer kümesine bağlı olduğu fark ettirilir (Etkinlik Formu 5).

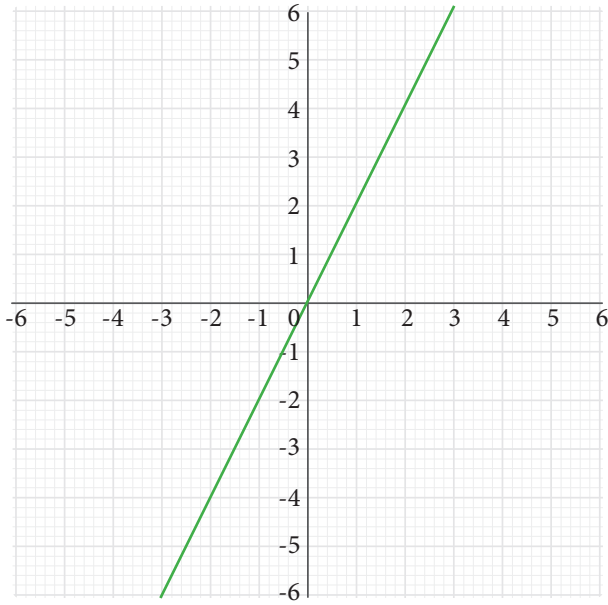
Birebir ve Örten Fonksiyonların Grafikleri



Dinamik matematik yazılımında $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ve $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere $f: A \rightarrow B$ ye $f(x) = 2x$ fonksiyonun grafiğini çizip fonksiyonun birebir ve örtenliğini inceleyiniz.

Yanda grafik gösterimi verilen fonksiyon birebirdir, ancak görüntü kümesi değer kümesinden farklı olduğu için fonksiyon örten değildir. Ancak değer kümesi B kümesi yerine $C = \{-2, 0, 2, 4, 6\}$ kümesi olsaydı fonksiyon birebir olup aynı zamanda örten bir fonksiyon olacaktı.

Peki fonksiyon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye tanımlanırsa fonksiyonun birebir ve örtenliği için ne söylenebilir?



Bu soruyu öğrenciler cevaplamadan dinamik matematik yazılımında $f(x) = 2x$ fonksiyonunu giriş penceresine yazarak fonksiyonun grafiğini oluşturmaları istenir.

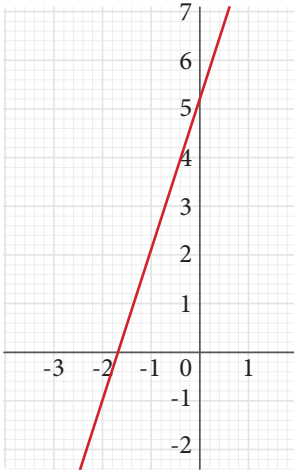
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2x$ fonksiyonun grafiği ile ilgili şu sorular sorulabilir?

- Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü birbirinden farklı mıdır?
- Değer kümesindeki her eleman tanım kümesindeki bir elemanın görüntüsü müdür?

Örnek:

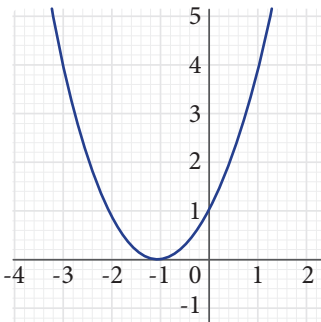
Reel sayılardan reel sayılara tanımlanan $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$, $h(x) = x^2$, $p(x) = x^3 + 2$, $q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ fonksiyonlarının grafikleri ve cebirsel gösterimleri incelenerek birebir olup olmadıkları belirlenir.

Çözüm:



$f(x) = 3x + 5$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde tanım kümesinde yer alan her elemanın görüntüsünün farklı olduğu görülmektedir. f fonksiyonu birebirdir.

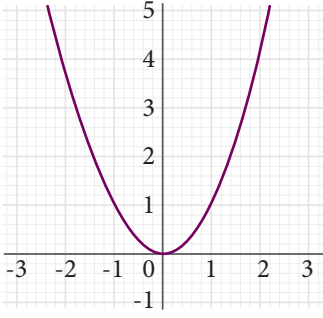
Ayrıca; $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 5 = 3b + 5 \Rightarrow a = b$ cebirsel olarak da f fonksiyonunun birebir olduğu görülür.



$g(x) = x^2 + 2x + 1$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde fonksiyon üzerinde $(-1, 0)$ noktasına göre simetrik olan tüm noktaların görüntülerinin aynı olduğu görülür. Örneğin $g(-2) = g(0) = 1$ 'dir. Bu nedenle g fonksiyonu birebir değildir.

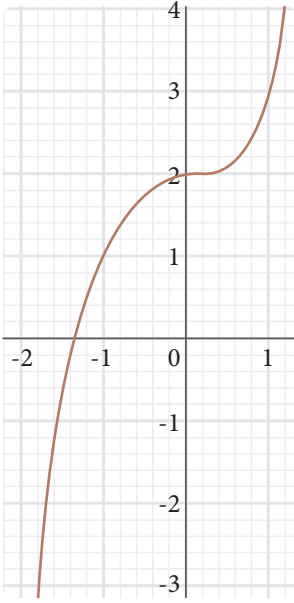
$$\text{Ayrıca; } g(a) = g(b) \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = b^2 + 2b + 1 \Rightarrow (a + 1)^2 = (b + 1)^2$$

$$\Rightarrow a + 1 = \pm (b + 1) \text{ olduğu için } g \text{ fonksiyonu birebir değildir.}$$



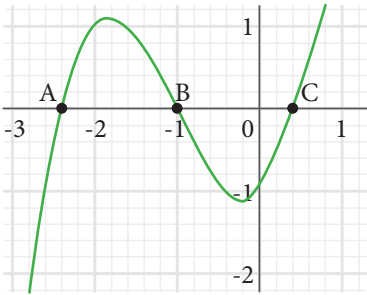
$h(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde fonksiyon üzerinde $(0,0)$ noktasına göre simetrik olan tüm noktaların görüntüleri aynı olduğu görülür. Örneğin $h(-1) = h(1) = 1$. Bu nedenle h fonksiyonu birebir değildir.

Ayrıca; $h(a) = h(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$ olduğu için h fonksiyonu birebir değildir.



$p(x) = x^3 + 2$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde tanım kümesinde yer alan her elemanın görüntüsünün farklı olduğu görülmektedir. Bu nedenle p fonksiyonu birebirdir.

Ayrıca; $p(a) = p(b) \Rightarrow b^3 + 2 = a^3 + 2 \Rightarrow a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ olduğu için p fonksiyonu birebirdir.



$q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde tanım kümesindeki bazı elemanların görüntülerinin aynı olduğu görülür. Yandaki grafikte A, B ve C noktalarındaki görüntüleri eşittir. Bu nedenle q fonksiyonu birebir değildir.

Birebir olan fonksiyonlar ile birebir olmayan fonksiyonların grafikleri hakkında bir çıkarım yaptırılabilir. Fonksiyonun birebir olduğunu belirlemek için yatay doğru testini keşfettirilebilecek sorular sorulabilir.

TANIM

Bir fonksiyonun grafiği üzerinde, x -eksenine paralel çizilen her doğru grafiği en fazla bir noktada kesiyorsa fonksiyon birebirdir. Grafiği birden fazla noktada kesen en az bir yatay doğru varsa bu fonksiyon birebir değildir. Bu yöntem yatay doğru testi denir.

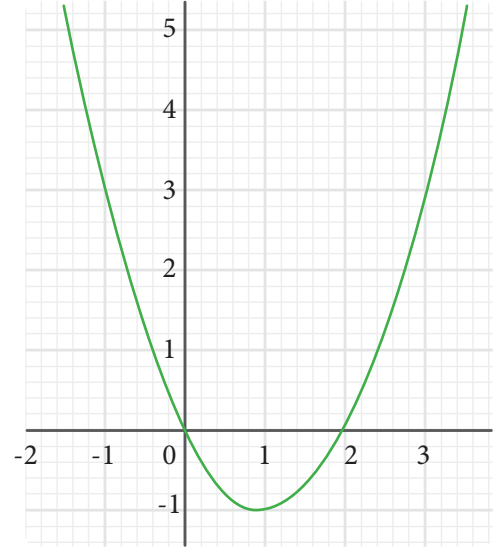


Fonksiyonların birebir özellikleri ile ilgili Etkinlik Formu 6 ya da benzer çalışmalar yaptırılabilir.

Fonksiyonların örten olup olmadıkları da x eksenine çizilecek paralel doğrularla belirlenebilir.

Yanda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun örten olup olmadığı belirlenir.

Yatay doğru testi çizildiğinde -1 'den küçük y değerlerinden geçen bir doğru olmadığı için yatay doğrular o noktalarda fonksiyonun grafiğini kesmemektedirler. f fonksiyonu örten değildir.



Benzer çalışmalar yaptırılır (Etkinlik Formu 7).

Fonksiyon Uygulamaları

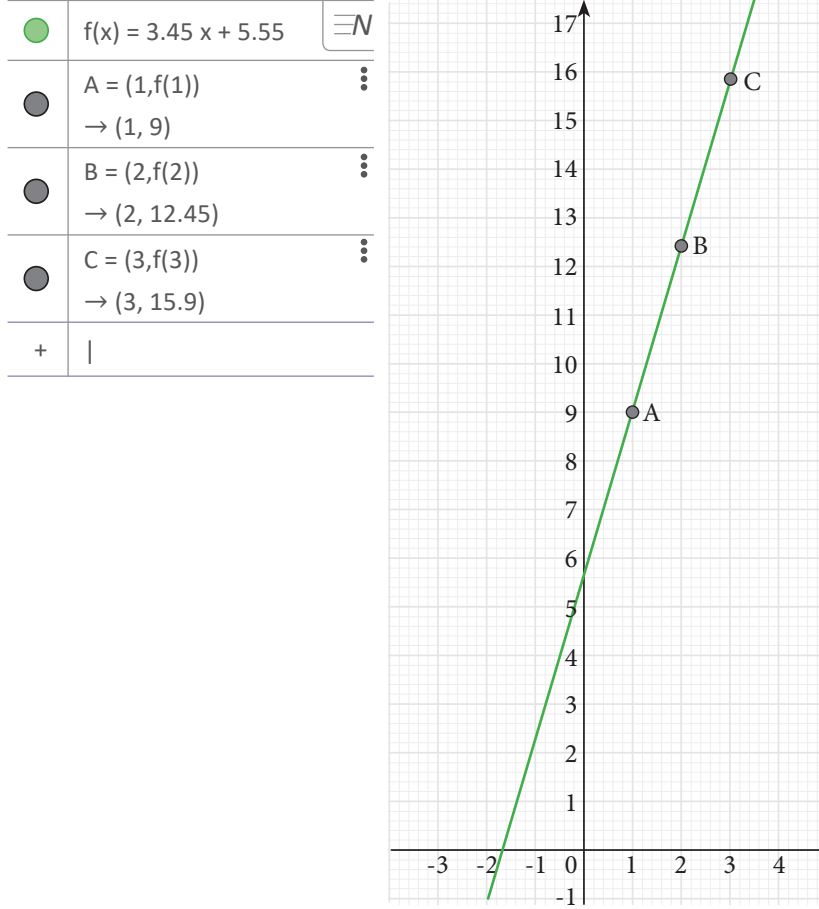
İstanbul'da taksilerin ücretlendirilmesinde açılış ücreti 5,55 TL olup kilometre başına 3,45 TL alınmaktadır. İnsanların gideceği yerlere göre taksi ücretini tahmin etmek için bir program yazıp bunu internet sitenize koymak istiyorsunuz. Bu program için nasıl bir fonksiyon oluşturursunuz.

$f(x) = 3,45x + 5,55$ (x = gidilecek mesafe, $f(x)$ = ödenecek ücret)

Peki İstanbul'da taksiyle 1, 2, 3, ...10 km gidecek kişiler için bir tablo oluşturup bunu da internet sitenize yerleştireceksiniz.

KAREKÖK ▼				
× ✓ fx =3,45*A1				
A	B	C	D	E
1	=3,45*A1			
2	12,45			
3	15,9			
4	19,35			
5	22,8			
6	26,25			
7	29,7			
8	33,15			
9	36,6			
10	40,05			

Bu fonksiyonun grafiğini de dinamik matematik yazılımı yardımıyla çizip onu da sitenize eklemek istiyorsunuz.



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi tabloda yer alan ilk 3 değer grafikte gösterilmiştir. Bu şekle göre (aynı zamanda tablodan da) 3 km gidecek kişinin ödeyeceği ücretin 15,9 TL olduğu anlaşılmaktadır. Bu değer f fonksiyonunda 3'ün görüntüsüdür. Benzer şekilde f fonksiyonunda 1'in görüntüsü 9, 10'un görüntüsü de 40,05 olacaktır. 9'un ters görüntüsü ise; 1, 12, 45'in ters görüntüsü ise 2 olacaktır. Bu değerler şu şekilde gösterilir. $f^{-1}(9) = 1$, $f^{-1}(12,45) = 2$ Bu fonksiyonu oluşturduktan sonra sitenize aşağıdaki soruları sormak isteyen kullanıcılar nasıl cevaplar alacaklardır?

- 25 km gideceğim, ne kadar taksi ücreti öderim? ($f(25) = 3,45 \cdot (25) + 5,55 = 91,8$)
- Gideceğim yer biraz uzak ancak 50 TL param var. Taksi ile ne kadar km yol gidebilirim?

$$(3,45 \cdot (x) + 5,55 = 50 \Rightarrow x \cong 12,8)$$

Fonksiyon uygulamaları ile ilgili benzer çalışmalar yapılır (Etkinlik Formu 8)

Fonksiyonun Grafiği

Fonksiyonun grafiği ile ilgili kavram yanılgıları göz önüne alınarak bir f fonksiyonunda $f(0)$, $f(x) = 0$ ve $f(x) = y$ ifadelerinin koordinat sistemindeki karşılıklarına değinilir.

**Örnek:**

Dinamik matematik yazılımında $f(x) = 3x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

- $f(0)$, $f(1)$ ve $f(2)$ değerlerini bulunuz ve grafik üzerinde işaretleyiniz.

$$f(0) = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow (1, 0)$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow (2, 3)$$

- -3 , 0 ve 3 değerlerinin ters görüntülerini belirleyiniz.

$$(0, -3) = f^{-1}(-3) = 0$$

$$(1, 0) = f^{-1}(0) = 1$$

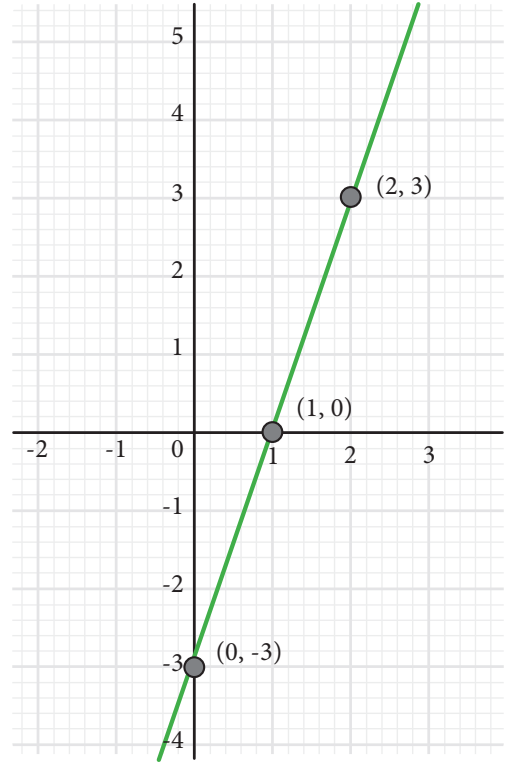
$$(2, 3) = f^{-1}(3) = 2$$

- Aynı fonksiyon üzerinde 12 , 10 ve 6 değerlerinin ters görüntülerini belirleyin.

$$3x - 3 = 12 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow f^{-1}(12) = 5$$

$$3x - 3 = 10 \Rightarrow x = \frac{13}{3} \Rightarrow f^{-1}(10) = \frac{13}{3}$$

$$3x - 3 = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f^{-1}(6) = 3$$



Fonksiyonun grafiği üzerinde fonksiyonun görüntüsünü ve ters görüntüsünü belirlemeye yönelik çalışmalara yer verilebilir (Etkinlik Formu 9).

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- Matematiksel model oluşturmalarına olanak sağlayan özellikle doğrusal fonksiyonların yer aldığı problemler üzerinde çalışmalar yaptırılabilir.
- Değişim oranı kavramı ile ilgili çalışmalar yaptırılabilir.
- Fonksiyon olmayan eğrilerin cebirsel gösterimlerinden yola çıkarak bu eğrilerin neden fonksiyon olmadığına dair tartışmalara yer verilebilir.

KAYNAKLAR

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramların Künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.

Küçük, Y., Üreyen, M., Orhun, N., Şenel, M., Özer, O. ve Azcan, H. (2001). *Genel Matematik*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Sadler, A. J. & Thorning, D.W.S (2005). *Understanding Pure Mathematics*. Newyork: Oxford Press.

Stewart, I. (2017). *Matematiğin Kısa Tarihi* (2. Bs.). İstanbul: Alfa Bilim.

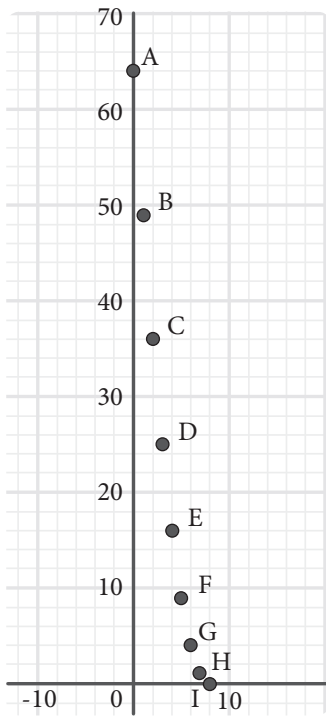
ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceli Puanlama Anahtarı Ölçeği Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. Etkinlik Formu içerisinde çözümlerden biri verilmiştir.
2. a. Fonksiyon değil
b. Fonksiyon
c. Fonksiyon
3. a. Eşit değil
b. Eşit
4. İçine, birebir / Örten, birebir / içine / örten
5. İki fonksiyonun değer kümelerinin farklı olması
6. birebir, birebir değil, birebir
7. Örten
8. $(8-x)^2$ / Tanım Kümesi: $[0,8]$, Görüntü Kümesi: $[0,64]$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	64	49	36	25	16	9	4	1	0



$\{(0,64), (1,49), (2,36), (3,25), (4,16), (5,9), (6,4), (7,1), (8,0)\}$

9. $2 / 0 / \{-1, 1\}$

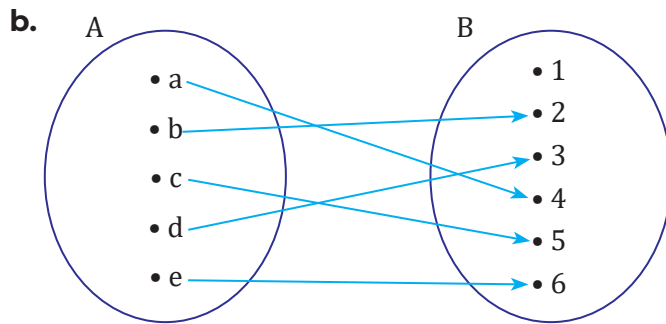
**Etkinlik Formu**

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ olmak üzere A kümesindeki elemanların 2 katının 1 eksiğine eşleyen f fonksiyonunun cebirsel kuralını yazınız. Bu fonksiyonu Venn şeması, tablo yardımı ve liste yöntemi ile gösteriniz. Ayrıca bir matematik yazılımında bu noktaları koordinat sisteminde gösteriniz.

Tanım Kümesi		Değer Kümesi	
Cebirsel Gösterimi (Kuralı)		Görüntü Kümesi	
FARKLI GÖSTERİMLER			
Venn Şeması	Tablo	Liste	Grafik

2. $A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere $A \rightarrow B$ tanımlanan aşağıdaki bağıntıların fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

a. $\beta_1 = \{(a,1), (b,1), (c,4), (c,5), (d,2), (e,6)\}$

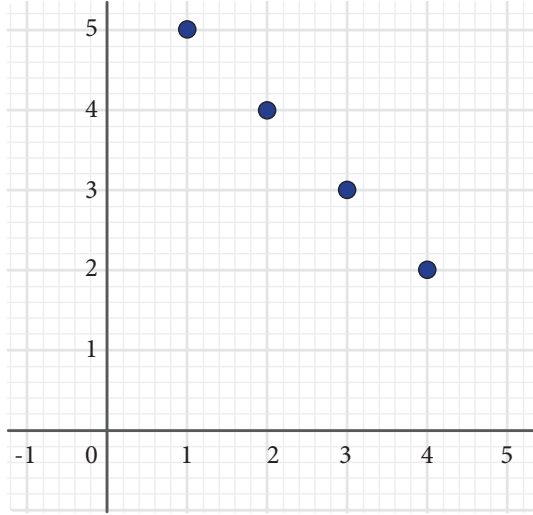


c.

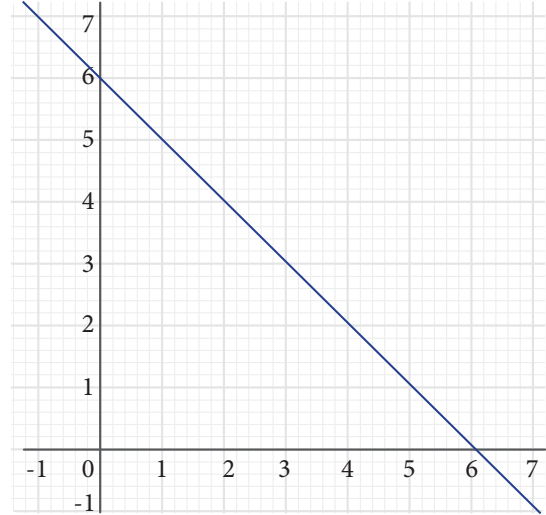
a	b	c	d	e
1	2	4	5	6

3. Aşağıda farklı gösterimler ile verilen fonksiyonların eşit olup olmadığını belirleyin.

a. $A = \{1, 2, 3, 4\}; f: \rightarrow \mathbb{R}$



b. $f: \rightarrow \mathbb{R}$



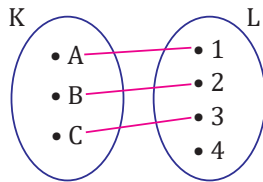
$A = \{11, 23, 35, 47, 59\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olmak üzere;

$f: A \rightarrow B, f = \{A \text{ kümesindeki elemanları } 10 \text{ ile bölümlerinden kalanlarına eşler.}\}$

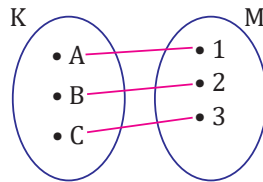
$g: A \rightarrow B, g = \{A \text{ kümesindeki elemanları birler basamağındaki rakamları ile eşler.}\}$

(Bu fonksiyonları Venn şeması, liste yöntemi ya da tablo yardımı ile göstererek fonksiyonların birbirine eşit olup olmadığını gösterin.)

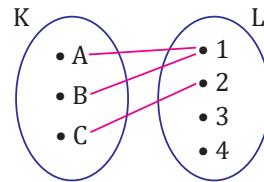
4. Aşağıdaki şekilde 4 tane fonksiyon ve altlarında bu fonksiyonların türleri verilmiştir. Fonksiyonları ve türlerini inceleyerek içine, birebir ve örten fonksiyonun özelliklerini tahmin edin.



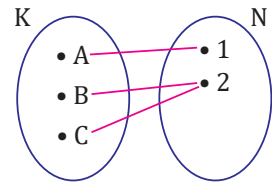
- ☒ İçine Fonksiyon
☐ Örten Fonksiyon
☒ Birebir Fonksiyon



- ☐ İçine Fonksiyon
☒ Örten Fonksiyon
☒ Birebir Fonksiyon



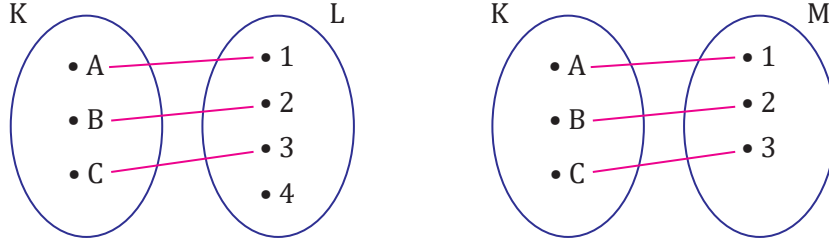
- ☒ İçine Fonksiyon
☐ Örten Fonksiyon
☐ Birebir Fonksiyon



- ☐ İçine Fonksiyon
☒ Örten Fonksiyon
☐ Birebir Fonksiyon



5. 4. soruda yer alan ilk 2 fonksiyonu tekrar inceleyin. İki fonksiyon da birebir iken birinin örten değerinin içine fonksiyon olması neye bağlıdır?



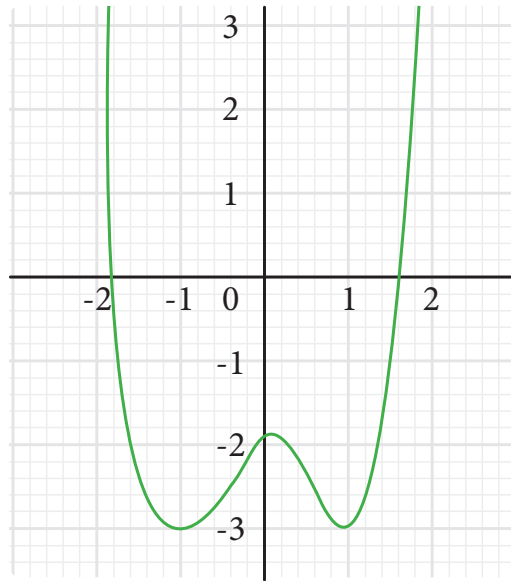
6. Reel sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonların cebirsel gösterimlerinden veya dinamik matematik yazılımında çizdiğiniz grafikleri yardımıyla fonksiyonların birebir olup olmadıklarını belirleyin.

• $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

• $g(x) = x^2 - x + 2$

• $h(x) = x^3 + x + 3$

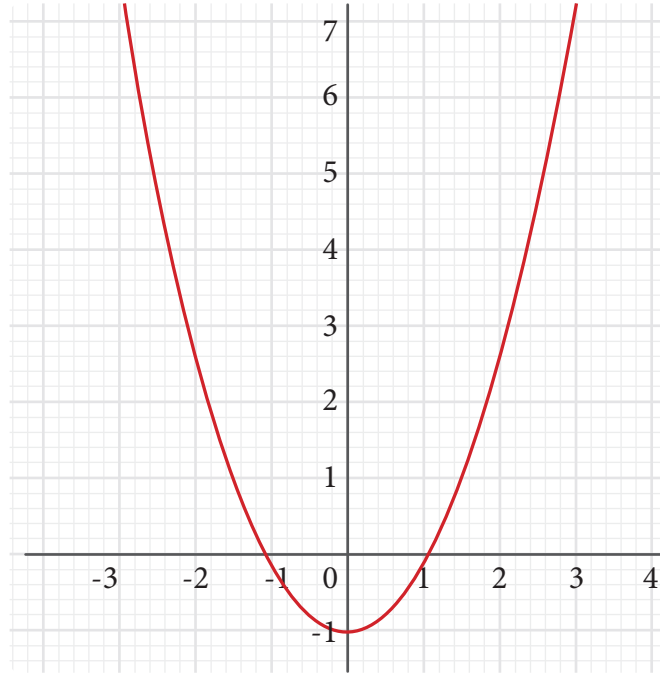
7. Aşağıdaki $g : \mathbb{R} \rightarrow [-3, \infty)$ tanımlanan fonksiyonun grafiği verilmiştir. Bu fonksiyonun örten olup olmadığını belirleyiniz.



8. Kenar uzunluğu 8 br olan karenin köşelerinden x br'lik kareler çıkarılarak oluşturulan şeklin alanına y diyelim.

- y 'yi x 'in bir fonksiyonu olarak yazın.
- $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulun.
- $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonunun tablo, grafik ve liste gösterimlerini oluşturun.

9. Aşağıdaki $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu fonksiyona göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



- $f(0) + f(2) = ?$
- $f(2) + f^{-1}(3)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?
- $f(x) = 0$ olacak şekilde x değerlerini bulunuz.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: FONKSİYONUN SIFIRLARI

: Analiz/Fonksiyonlar

: 1. Parçalı fonksiyonu ve grafiğini oluşturur.

2. Bir f fonksiyonunun grafiği ile $f(x) = 0$ denkleminin kökleri ve cebirsel ifadesi arasındaki ilişkiyi kurar.

3. İkinci dereceden denklemin köklerini veren genel kuralı ispat eder.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

: Etkinlik Formu, dinamik matematik yazılımı

Etkinliğin Amacı

Parçalı fonksiyon ile ilgili öğrencilerin uygulama yapması hedeflenmiştir. Fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalar ile $f(x) = 0$ denkleminin köklerinin aynı olduğunu keşfetmeleri beklenmektedir. İkinci dereceden denklemlerin köklerini veren genel kuralın öğrenciler tarafından bulunması amaçlanmıştır. Öğrencilerin diskriminantın farklı durumlarını incelemesi ve denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri fark etmesi beklenmektedir.

Başlarken...

Harezmi, Doğu bilim dünyasında cebir ile ilgili ilk eser yazan kişidir. 770-840 yılları arasında yaşayan Harezmi bu eseri (El Cebir ve'l Mukabele) yayınladığı dönemde birinci dereceden denklemler çözülebiliyordu, ikinci dereceden denklemler de hesaplama yöntemleri ile çözülebiliyordu. Ancak ikinci dereceden denklemlerin köklerini bulma yöntemi geliştirilmemişti. Harezmi'nin El Cebir ve'l Mukabele kitabı ikinci dereceden denklemlerin çözüm yolunu sistemli olarak işleyen ilk eser niteliğindedir ve 600 yıldan uzun bir süre bu eser matematik öğretiminde temel olarak kullanılmıştır. Harezmi'nin kitabında $x^2 + 10x = 39$ denkleminin nasıl çözüleceği yazıyor? Siz bu denklemin çözüm kümesini bulabilir misiniz?



Parçalı Fonksiyon



Burdur'dan Antalya'ya gitmek isteyen bir kişi özel aracı olmadığı ve pandemiden dolayı toplu taşımayı kullanmak istemediği için taksi kullanmaya karar vermiştir. Taksi firması yetkilisinden fiyatlandırma için bilgi almak isteyen kişi şu şekilde bilgilendirilmiştir.



“Burdur'da taksimetre açılışı 4,60 TL olup kilometre başına 3,40 TL olarak fiyatlandırılmaktadır. Antalya'da ise taksimetre açılışı 3,90 TL olup kilometre başına 3,70 TL olarak fiyatlandırılmaktadır. Burdur-Antalya arası 125 km olup bunun 75 km'si Burdur sınırları içindedir. Taksi, Antalya sınırına geldiğinde taksimetreyi Antalya fiyatlandırmasına göre sıfırlayacaktır.”

Bu yolculuğa ait taksi ücretinin alınan yola göre değerini veren fonksiyonları oluşturup grafiğini dinamik matematik yazılımında çiziniz.

Çözüm:

Yolculuğun Burdur sınırları içinde geçen ilk 75 km'si için taksi ücretini veren fonksiyon $f(x)=3,40x+4,60$ şeklindedir. Yolculuk sadece Antalya sınırlarında geçseydi o zaman taksi ücretini veren fonksiyon $h(x)=3,70x+3,90$ şeklinde olacaktı. Ancak bu yolculuk Burdur'da başlayıp 75 km sonra Antalya sınırlarına geçeceği için daha farklı bir fonksiyon oluşturmamız (g(x)).

Örneğin yolculuğun 80. km'sinde ödenecek ücret ne olmalıdır?

$$f(75) = 3,40 \cdot (75) + 4,60 = 259,6$$

$$h(5) = 3,70 \cdot (5) + 3,90 = 22,4$$

$$g(80) = f(75) + h(5) = 282$$

Yolculuğun 75 km'sinden sonra taksi ücretini veren fonksiyon; $g(x) = 3,70 \cdot (x - 75) + 263,5$ olur.

Bu yolculuğa ait taksi ücretini veren fonksiyon:

$$g(x) = \begin{cases} 3,40x + 4,60 & 0 \leq x \leq 75 \\ 3,70(x - 75) + 263,5 & 75 < x \end{cases}$$

şeklindedir. Bu fonksiyona parçalı fonksiyon denir.



Bu fonksiyonun dinamik matematik yazılımı yardımıyla grafiği şu şekilde çizilir.

Giriş penceresine

Eğer (<Şart>, <Doğruysa>, <Doğru Değilse>)

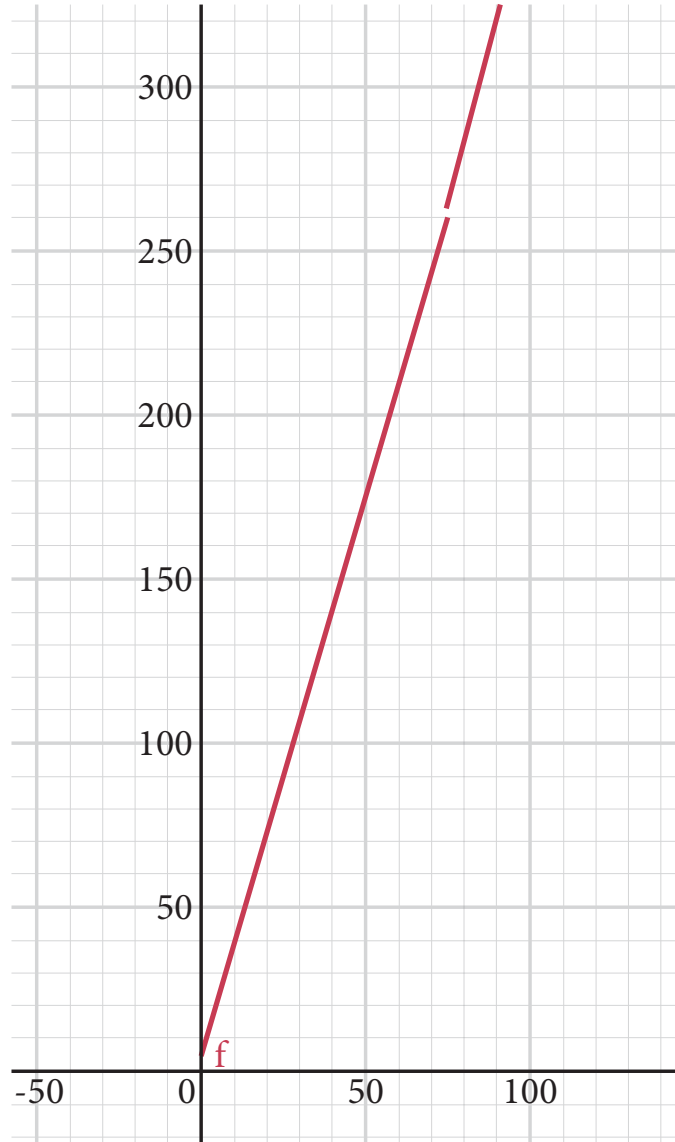
Ve <Doğru Değilse> yerine ise

Eğer (<Şart>, <Doğruysa>) komutları kullanılacaktır.

$$f(x) = \text{Eğer } (0 \leq x \leq 75, 3,40x + 4,60, \text{Eğer } (75 < x, 3,70(x - 75) + 263,5))$$

Eğer (<Şart>, <Doğruysa>, Eğer (<Şart>, <Doğruysa>))

$$f(x) = \begin{cases} 3,4x + 4,6 & : 0 \leq x \leq 75 \\ 3,7(x - 75) + 263,5 & : x > 75 \end{cases}$$



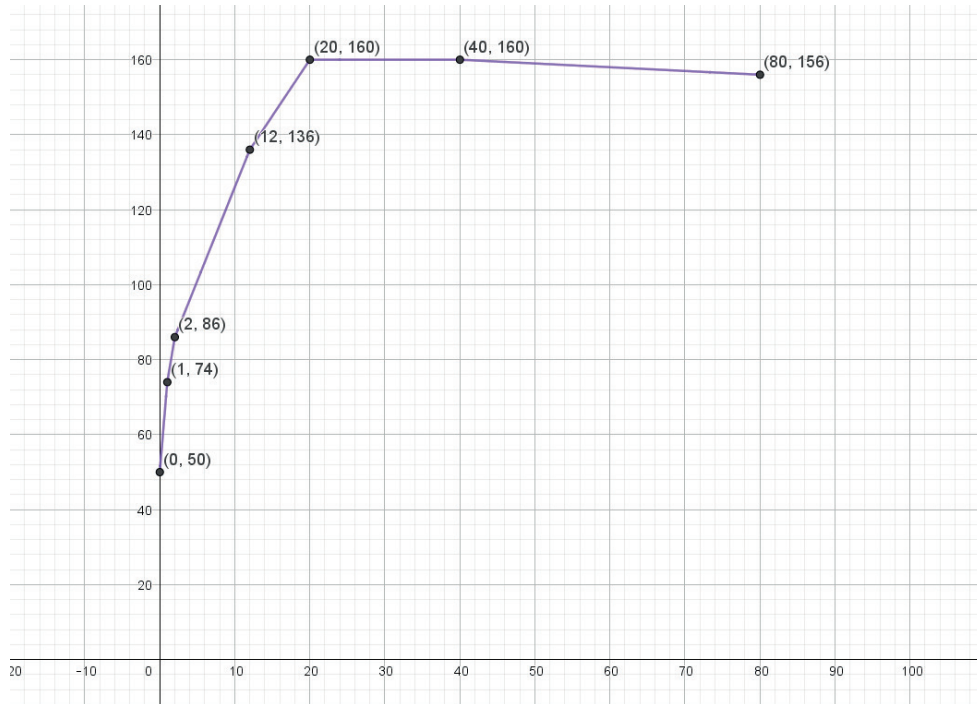


Kodlama Etkinliği

Normal şartlarda bir kişi ortalama 50 cm boyunda doğar. 0-1 yaş arasında yaklaşık 24 cm uzar. 1-2 yaşları arasında 12 cm uzar. Ergenliğe yani 12 yaşına kadar yılda 5 cm uzar. Ergenlikte yani 12-20 yaşları arasında toplam 24 cm uzar. 20 yaşından sonra uzama durur. 40 yaşından sonra her 10 yılda 1 cm kısalmaktadır. Buna göre boy uzama fonksiyonunu yazın ve grafiğini dinamik matematik programı ile çizin. Daha sonra 80 yaşına kadar yaşayan bir kişinin yaşına göre boyunu veren programı blok tabanlı programlama dili ile kodlayın.

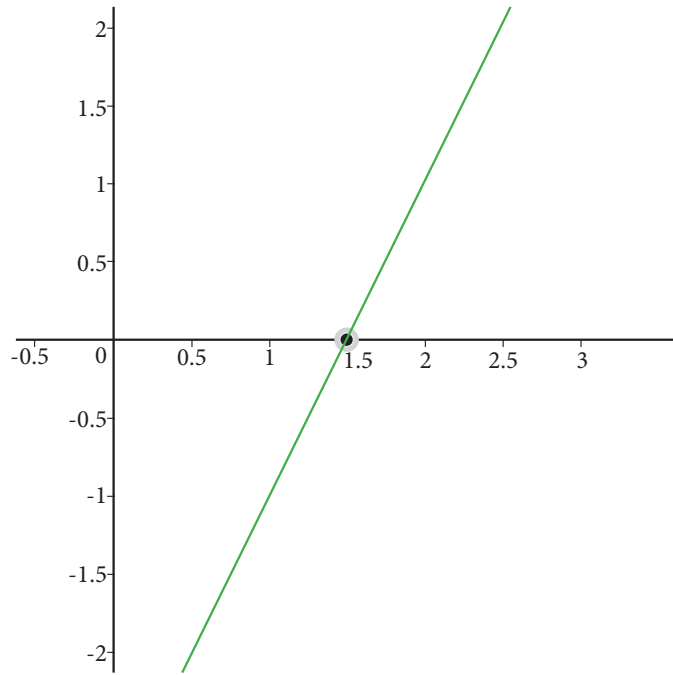
$$f(x) = \begin{cases} 50, & x = 0 \\ 50 + 24x, & 0 < x \leq 1 \\ 74 + 12(x - 1), & 1 < x \leq 2 \\ 86 + 5(x - 2), & 2 < x \leq 12 \\ 136 + 3(x - 12), & 12 < x \leq 20 \\ 160, & 20 < x \leq 40 \\ 161 - \frac{x - 40}{10}, & 40 < x \leq 80 \end{cases}$$

Bu etkinliğin blok tabanlı programlama dili ile oluşturulmuş uygulamasına etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

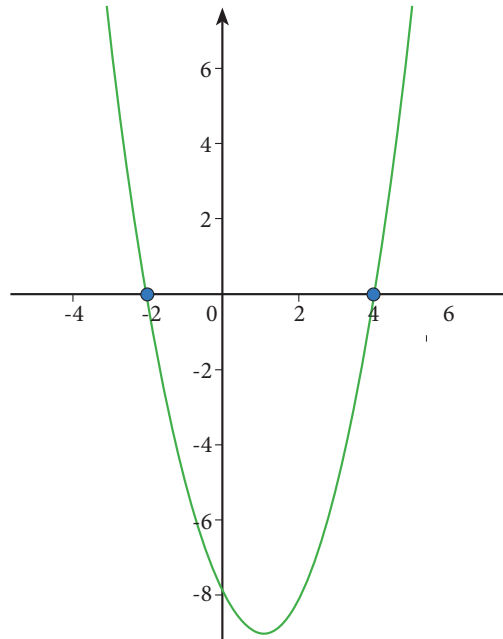


**Parçalı fonksiyon ile ilgili uygulamalar yapılır. (Etkinlik Formu Soru 1-2)****Fonksiyonun Sıfırları**

$f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çizin. Ayrıca $2x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulun. $2x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğinde belirleyin.

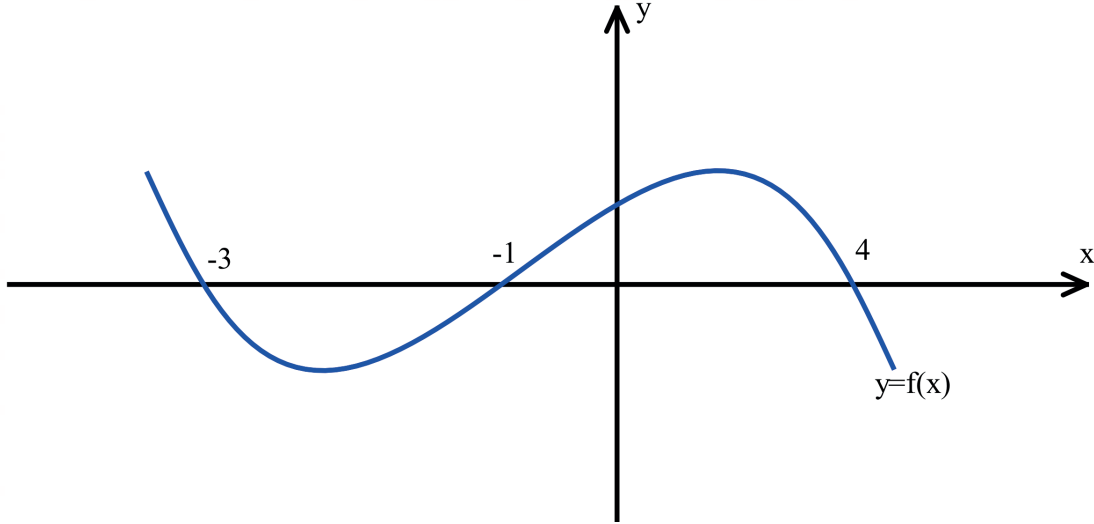


Benzer şekilde $g(x) = x^2 - 3x - 10$ fonksiyonunun grafiğini dinamik matematik yazılımında oluşturun. $x^2 - 3x - 10 = 0$ denkleminin çözüm kümelerini bulun. Ve bu x değerlerini g fonksiyonunun grafiğinde belirleyin.



Örnek:

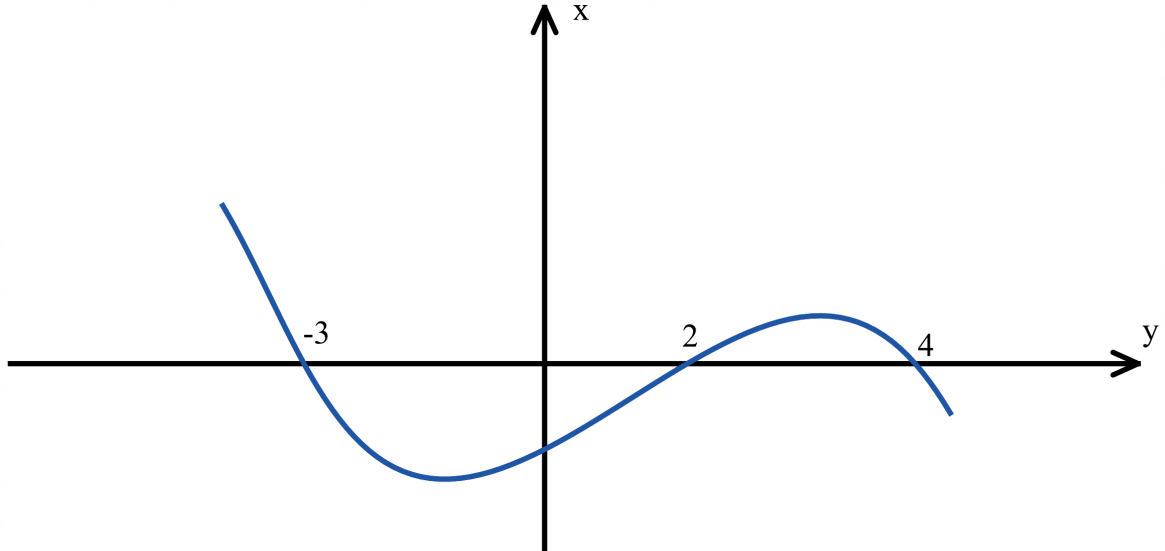
Aşağıda grafiği verilen f fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.

**Çözüm:**

Fonksiyonun grafiğine göre $f(-3) = f(-1) = f(4) = 0$ olduğu için fonksiyonun sıfırları -3, -1 ve 4 değerleridir.

Örnek:

Aşağıda $f(x)$ fonksiyonun grafiği verilmiştir. $f(x-2)$ fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.

**Çözüm:**

$$f(-1) = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$f(4) = 0 \Rightarrow x = 6$$

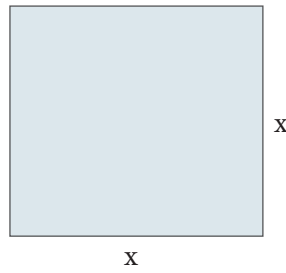


Fonksiyonun sıfırları ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 3-4).

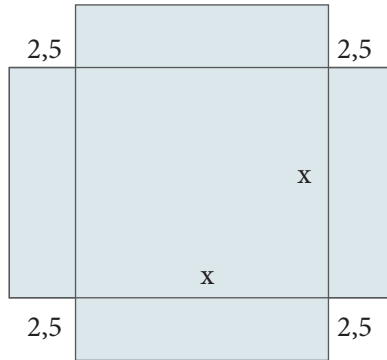
İkinci Dereceden Denklemlerin Çözümü

“Başlarken” bölümünde, Harezmi’nin kitabından bir örnek soru olan $x^2 + 10x = 39$ denkleminin çözümü sorulmuştu. Bu denklemi Harezmi şu şekilde çözmektedir:

İlk olarak bir kenarı x br olan bir kare oluşturmuştur. Karenin alanı x^2 br²’dir.



Daha sonra her kenardan 2,5 br kenar uzunluğunda dikdörtgenler çizmiştir. Oluşan dikdörtgenlerin alanı $10x$ br²’dir.



Bu şeklin alanı, $x^2 + 10x = 39$ olduğu için 39 br²’dir. Yukarıdaki şekil kareye tamamlanacak olursa aşağıdaki şekil oluşur.

	2,5	2,5	
2,5			2,5
		x	
2,5		x	2,5
	2,5	2,5	

Oluşan karenin alanı ise $39 + 4 \cdot (2,5)^2 = 64 \text{ br}^2$ dir. Karenin bir kenarı ise $x + 5 = 8$ olduğu için $x = 3$ olarak bulunur.

Peki bu denklemin başka çözüm kümesi var mı?

Dinamik matematik yazılımı açılarak *Bilgisayar Cebir Sistemi (CAS)* bölümüne $x^2 + 10x = 39$ denklemi yazılır ve “çöz” aracı ile bu denklemin çözüm kümesi bulunur.

$$x^2 + 10x = 39$$

$$\text{Solve } \{x = -13, x = 3\}$$

Dinamik matematik yazılımı bu denklemin çözüm kümesini $\{-13, 3\}$ olarak bulmuştur. Harezmi'nin çözümünde ise sadece pozitif kök olan 3 bulunmaktadır.

O zaman $x^2 + 10x = 39$ denkleminin çözüm kümelerini farklı bir şekilde bulmaya çalışalım. $x^2 + 10x - 39 = 0$ denkleminin çözümü için tam kareye tamamlama yöntemi uygun bir çözüm yolu olarak düşünülebilir.

$x^2 + 10x$ ifadesi hangi iki terimin tam karesinden gelebilir?

$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$ olduğu için $x^2 + 10x - 39 = 0$ denklemi $(x + 5)^2 - 25 - 39 = 0$ şeklinde tekrar yazılabilir.

$(x + 5)^2 = 64 \Rightarrow x = 3, x = -13$ olarak denklemin çözüm kümeleri bulunur.

Tam kareye tamamlama yöntemi ile ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümelerini bulma uygulamalarına yer verilir (Etkinlik Formu Soru 5).

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözüm kümelerini aynı yöntemle bulabilir misiniz?

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

TANIM

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b^2 - 4ac$ ifadesinde **denklemin diskriminantı** denir ve Δ simgesi ile gösterilir.

**Örnek:**

$2x^2 - x - 15 = 0$ denkleminin çözüm kümesini hem tam kareye tamamlama yöntemi hem de ikinci dereceden denklemlerin genel kuralı ile bulalım ve $f(x) = 2x^2 - x - 15$ fonksiyonun grafiğini dinamik matematik yazılımı ile oluşturalım.

Çözüm:

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{15}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{15}{2} = 0$$

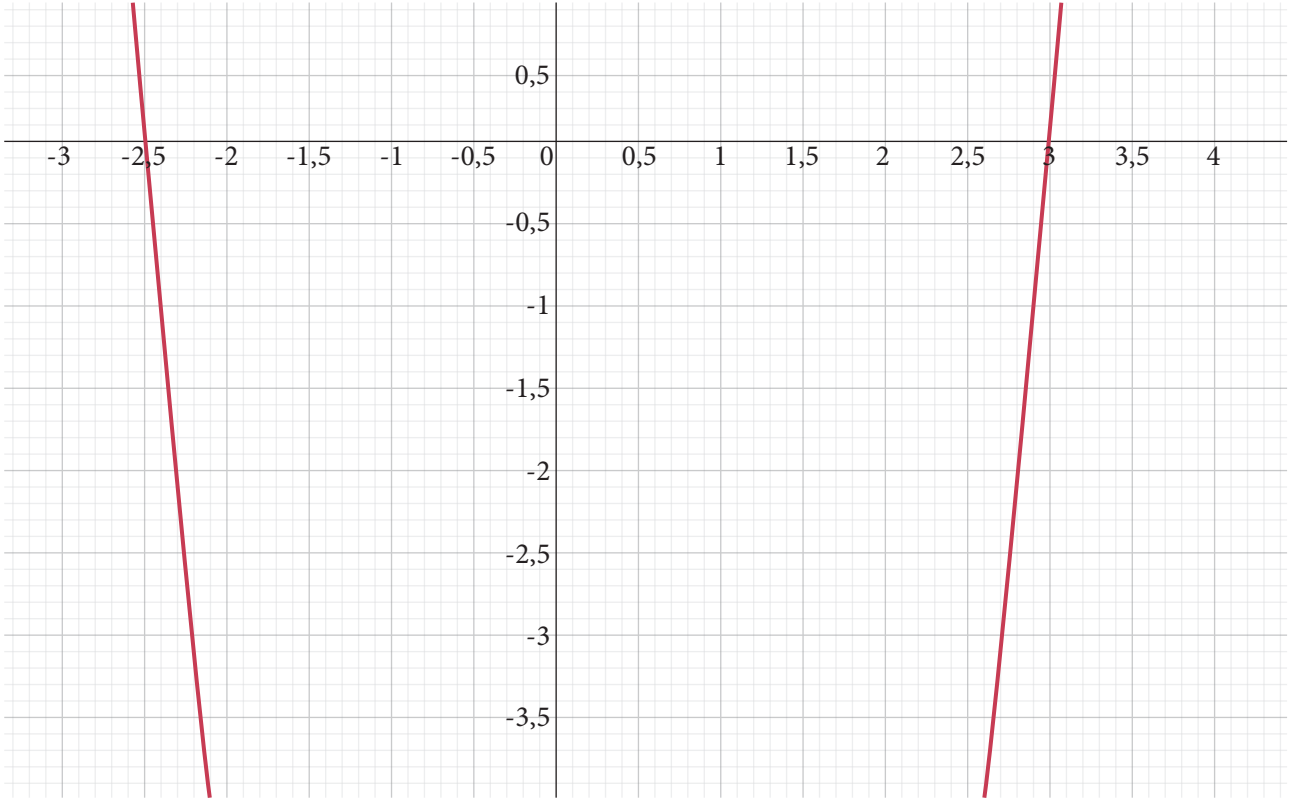
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm \frac{11}{4}$$

$$x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 3$$

İkinci dereceden denklemin çözüm kümelerini genel kuraldan bulacak olursak;

$$a = 2, b = -1, c = -15 \text{ olmak üzere, } x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -\frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$



Fonksiyonun grafiği incelendiğinde fonksiyonun sıfırlarının 2 tane olduğu görülmektedir.

Örnek:

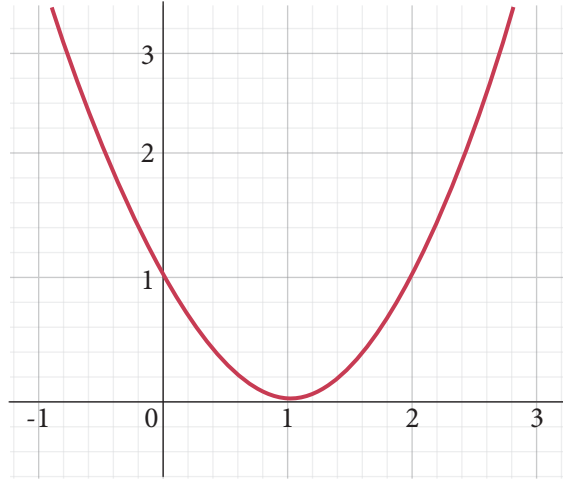
$x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini hem tam kareye tamamlama yöntemi hem de ikinci dereceden denklemlerin genel kuralı ile bulun ve $f(x) = x^2 - 2x + 1$ fonksiyonun grafiğini dinamik matematik yazılımı ile oluşturun.

Çözüm:

$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ olmak üzere ikinci dereceden denklemin çözüm kümesi tek elemanlıdır.

İkinci dereceden denklemin çözüm kümelerini genel kuraldan bulacak olursak;

$a = 1, b = -2, c = 1$ olmak üzere, $x = \frac{2 \mp \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$ bulunur.



Fonksiyonun grafiği incelendiğinde fonksiyonun sıfırının tek olduğu görülmektedir.

Örnek:

$x^2 + 3x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini hem tam kareye tamamlama yöntemi hem de ikinci dereceden denklemlerin genel kuralı ile bulun ve $f(x) = x^2 + 3x + 4$ fonksiyonun grafiğini dinamik matematik yazılımı ile oluşturun.

Çözüm:

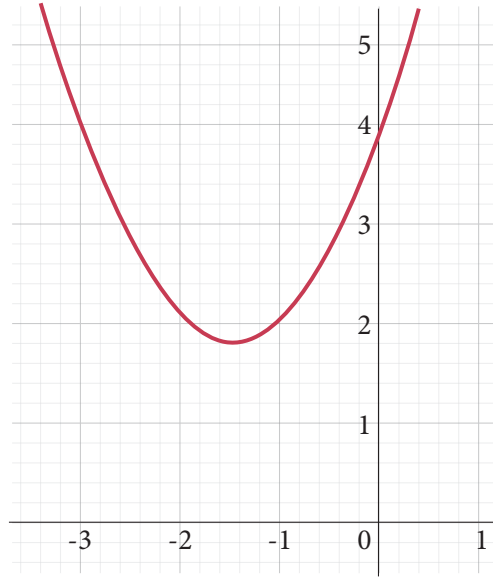
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4}$$

Reel sayıların karesi negatif olamayacağı için ikinci dereceden denklemin reel kökü yoktur.

İkinci dereceden denklemler için genel kuralı uygulayacak olursak;

$a = 1, b = 3, c = 4$ olmak üzere, $x_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{-3 \mp \sqrt{-7}}{2}$ köklü ifadenin içi reel sayılar için negatif olamayacağı için bu denklemin reel sayılar kümesinde çözüm kümesi boş elemandır.



Fonksiyonun grafiği incelendiğinde fonksiyonun sıfırlarının olmadığı görülmektedir.

İkinci dereceden denklemlerin ($ax^2 + bx + c = 0$) çözüm kümesi ile ilgili 3 tane örneği incelediğinizde $\Delta = b^2 - 4ac$ değeri ile fonksiyonun sıfırları arasında bir ilişki fark ettiniz mi?

TANIM

$\Delta > 0$ ise ikinci dereceden denklemin birbirinden farklı 2 reel kökü vardır.

$\Delta = 0$ ise ikinci dereceden denklemin birbirine eşit 1 reel kökü vardır.

$\Delta < 0$ ise ikinci dereceden denklemin reel kökü yoktur.

İkinci dereceden denklemler ile ilgili uygulamalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 6, 7)

İkinci Dereceden Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasında Bağlılıklar

$x^2 + 5x - 2 = 0$ denkleminin köklerini bulun ve köklerin toplamını ve çarpımını hesaplayın.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 8}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} + \frac{-5 + \sqrt{33}}{2} = -5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} \cdot \frac{-5 + \sqrt{33}}{2} = \frac{25 - 33}{4} = -2$$

$3x^2 - 2x - 7 = 0$ denkleminin köklerini bulun ve köklerin toplamını ve çarpımını hesaplayın.

$$x_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{4 + 84}}{6}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2 - \sqrt{88}}{6} + \frac{2 + \sqrt{88}}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2 - \sqrt{88}}{6} \cdot \frac{2 + \sqrt{88}}{6} = \frac{7}{3}$$

Yukarıdaki ikinci dereceden denklemlerin köklerinin toplamları ve çarpımları ile denklemin katsayıları arasında bir ilişki bulabilir misiniz? Tahminlerinizi aşağıdaki ikinci dereceden denklemde uygulayın ve denklemini çözerek tahminlerinizi kontrol edin.

$-2x^2 + x + 5 = 0$ denkleminin köklerini bulun ve köklerin toplamını ve çarpımını hesaplayın.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 40}}{-4}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{-4} + \frac{-1 + \sqrt{41}}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{-4} \cdot \frac{-1 + \sqrt{41}}{-4} = -\frac{5}{2}$$

Tahmininiz doğru mu?

$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin kökler toplamı ve kökler çarpımı için bir kural belirleyebilir misiniz?

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

İkinci dereceden denklemlerin kökleri ile katsayıları arasındaki bağıntılara yönelik uygulamalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 7, 8)



EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Harezmi'nin El Cebr ve'l Mukabele kitabı hakkında araştırma yapabilirsiniz.
- Üçüncü dereceden denklemlerin çözüm kümelerini veren bağıntıları araştırabilirsiniz.
- Bilgisayar cebir sistemine sahip yazılımların denklemlerin çözüm kümelerini hesaplarken yararlandığı algoritmaları araştırabilirsiniz.

KAYNAKLAR

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramların Künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.

ÖSYM (2021). *Alan Yeterlilik Testi (Ayt) Soru ve Cevapları*. https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2021/YKS/TSK/ayt_yks_2021.pdf (Erişim Tarihi: 14.07.2021)

Stewart, I. (2017). *Matematiğin Kısa Tarihi* (2. Bs.). İstanbul: Alfa Bilim.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

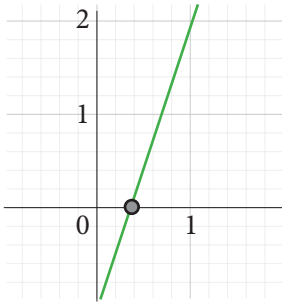
Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

$$1. f(x) = \begin{cases} 8, & 0 < x \leq 1 \\ 9, & 1 < x \leq 2 \\ 11, & 2 < x \leq 4 \\ 13, & 4 < x \leq 6 \\ 16, & 6 < x \leq 24 \end{cases}$$

$$2. 106$$

$$3. 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$



$$4. \{-8, -4, -2\}$$

5.

$$a. \{-4, 2\}$$

$$b. \{-1/4, 3\}$$

$$c. \{2/3, 1\}$$

6.

$$a. \{\}$$

$$b. \{-1/2, 3\}$$

$$c. \{\}$$

$$7. 1/2$$

$$8. \cong 92,43$$

**Etkinlik Formu**

1. Bir belediyeye ait otoparkın ücretleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Park Süresi (Saat)	Ücret
1 saate kadar (1 saat dahil)	8 TL
1 ile 2 saat arası (2 saat dahil)	9 TL
2 ile 4 saat arası (4 saat dahil)	11 TL
4 ile 6 saat arası (6 saat dahil)	13 TL
Günboyu	16 TL

Buna göre otopark ücretinin, otoparkta kalma süresine bağlı fonksiyonunu ($f(x)$) oluşturun.

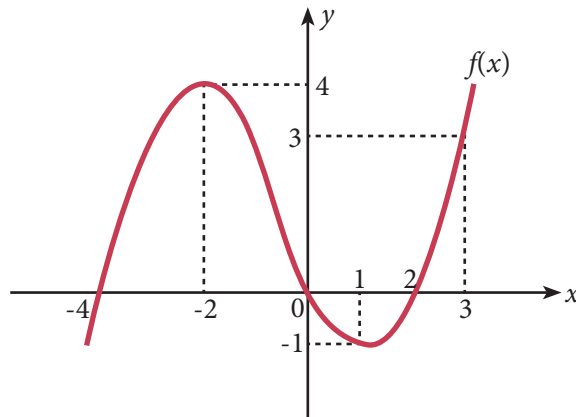
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu parçalı tanımlı olarak aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leq -2 \\ x^2 - 3x + 1, & -2 < x \leq 0 \\ x^3 - 1, & 0 < x \leq 4 \\ 3x - 2, & 4 < x \end{cases}$$

Bu fonksiyona göre $f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = ?$

3. $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizin ve fonksiyonun sıfırını grafik üzerinde gösterin. Ayrıca fonksiyonun sıfırlarını fonksiyonun cebirsel kuralından yararlanarak da bulun.

4. Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$f(x + 4)$ fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.

5. Aşağıdaki denklemlerin reel sayılardaki çözüm kümelerini tam kareye tamamlama yöntemi ile bulunuz.

a. $x^2 + 2x - 8 = 0$

b. $4x^2 - 11x - 3 = 0$

c. $3x^2 - 5x + 2 = 0$

6. Aşağıdaki denklemlerin reel sayılardaki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $-x^2 + 2x - 3 = 0$

b. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

c. $x^2 + x + 2 = 0$

7. $x^2 - 2x + c = 0$ denkleminin diskriminantı aynı zamanda bu denklemin bir kökü olduğuna göre, c gerçel sayısının alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır? (2021 AYT)

8. Harmonik ortalamanın ekonomi, elektrik devrelerinde direnç hesabı gibi farklı uygulamaları vardır. Bunlardan bir tanesi ise ortalama hız problemleridir. Örneğin bir hareketli A noktasından B noktasına V_1 , dönüşte ise B noktasından A noktasına V_2 hızla giderse A noktasından B noktasına gidip

geldiği yolculukta ortalama hızı harmonik ortalama ile $\frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}}$ bağıntısı ile hesaplanabilir.

Bir hareketlinin A noktasından B noktasına gidiş ve dönüş hızları $x^2 - 185x + 8550 = 0$ denkleminin kökleri ise A noktasından B noktasına gidip döndüğünde ortalama hızı ne olur?



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI**: SANAL DÜNYA****MODÜL/KONU**

: Analiz/Karmaşık Sayılar

KAZANIMLAR

- : 1. Karmaşık sayıları ikinci dereceden denklemlerin kökleri bağlamında açıklar.
- : 2. Karmaşık sayılarla işlem yapar.

SÜRE

: 4 ders saati

**KULLANILACAK
MATERYALLER**

: Etkinlik Formu, dinamik matematik yazılımı

Etkinliğin Amacı

Diskriminantı negatif olan ikinci dereceden denklemlerin köklerinden yola çıkarak öğrencilerin karmaşık sayıları fark etmesi amaçlanmıştır. Sanal köklere sahip ikinci dereceden denklemin sanal kökleri dinamik matematik yazılımında incelenilerek karmaşık sayının eşleniğini açıklamaları istenmektedir. Karmaşık sayılarda işlemleri dinamik matematik yazılımı yardımıyla yaparak bu işlemlerin nasıl yapıldığını keşfetmeleri hedeflenmektedir.

Başlarken...

Negatif sayıların karekökü olur mu?

Her reel sayının karesi pozitif bir sayı olduğuna göre negatif sayıların karekökü olamaz. Olduğunu varsayalım. O zaman negatif bir sayının karekökü nasıl olurdu?

$x^3 + ax = b$ üçüncü dereceden denklemlerin çözümünü Ferro ve Tarraglia şu şekilde bulmuştur;

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

Ancak Cardano, çözümlerinden biri $x=4$ olduğu görülebilen $x^3=15x+4$ denklemi için bu formülü uyguladığında bazı şeylerin ters gittiğini fark etmiştir. Sizce ters giden ne olabilir?



Kümeleri Genişletmek ve Yeni Bir Sayılar Kümesi: Karmaşık Sayılar

Matematiksel denklemler çözülürken hangi küme üzerinde işlem yapıldığı belirtilir. Örneğin $2x + 4 = 0$ denkleminin doğal sayılar kümesinde çözüm kümesi boş kümedir. Ancak tam sayılar kümesinde çalışıyorsanız bu denklemin çözüm kümesi $x = -2$ 'dir. Bu küme genişletmesine bir örnektir.

Etkinlik formu 1. soruda yer alan $3x - 2 = 32$ denkleminin çözümü $x = \frac{34}{3}$ 'tür. Burada tam sayılar kümesini kapsayan rasyonel sayılar kümesi seçilmelidir. Rasyonel sayılar kümesi yerine doğrudan reel sayılar kümesi de seçilebilir. Ancak bir sonraki soruda rasyonel sayılar kümesinden reel sayılar kümesine geçilmesi isteneceğinden reel sayıların bir altkümesi olan rasyonel sayılar kümesi ile etkinliğe devam edilir.

Kümelerin genişletilmesiyle ilgili örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1-3)

Etkinlik formu 2. soruda yer alan $x^2 + x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesi rasyonel sayılar kümesinde boş kümedir ancak reel sayılar kümesindeki çözümü $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 'dir. Yeni belirlenecek küme hem rasyonel sayıları hem de irrasyonel sayıları kapsayan reel sayılar kümesidir.

Etkinlik formu 3. soruda yer alan $x^2 + 1 = 0$ ve $x^2 - 2x + 5 = 0$ denklemlerinin çözümünde karesi -1 olan ve kareköklü ifadenin içi negatif olan ifadeler ile karşılaşılır. Sayılar doğanın birçok özelliğini yakalayan çok etkili buluşlar olsa da yapay insan icadıdır. Burada sorun çıkartan $\sqrt{-1}$ ifadesi i ile gösterilerek karmaşık sayılar şu şekilde tanımlanır.

TANIM

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $z = a + ib$ biçimindeki sayılara karmaşık sayılar denir. a 'ya karmaşık sayının reel kısmı, b 'ye de karmaşık sayının sanal kısmı adı verilir. $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$ şeklinde gösterilir. Bu sayılardan oluşan kümeye de karmaşık sayılar kümesi denir ve $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin kökleri karmaşık sayılar kümesinde bulunur.

$$(x - 1)^2 + 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 = -4$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} = -1$$

$$\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 = -1$$

Burada “Hangi sayının karesi “ -1 ” dir?” sorusu yöneltilerek $\frac{x - 1}{2}$ sayısının $\pm i$ 'ye eşit olduğu fark ettirilir.

$$\frac{x - 1}{2} = \pm i$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i \text{ olarak bulunur.}$$

**Örnek:**

Toplamları 8, çarpımları 20 olan iki sayı bulalım.

Çözüm:

Bu sayılar x_1 ve x_2 olsun $x_1 + x_2 = 8$ ve $x_1 \cdot x_2 = 20$ olacağından denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olan $x^2 - 8x + 20 = 0$ olarak söylenebilir.

Benzer şekilde $(x - 4)^2 = -4$ olur. Buradan $x_1 = 4 + 2i$ ve $x_2 = 4 - 2i$ olarak bulunur.

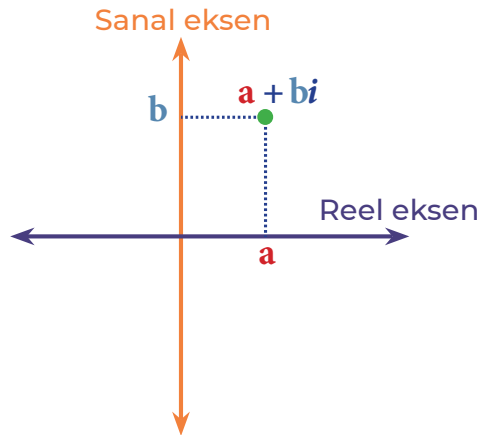
Diskriminantı sıfırdan küçük olan reel katsayılı ikinci dereceden denklemlerin karmaşık kökleri $a \pm ib$ formundadır. Bunun kök bulma formülünün bir sonucu olduğu tartışılır.

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülünde $\Delta < 0$ olduğunda karmaşık kökler gelecektir ve bu köklerin karmaşık sayı olmasına neden olan $\sqrt{\Delta}$ ifadesinin önünde $\pm$ işaretinden dolayı karmaşık kökler $a \pm ib$ formundadır.

Benzer şekilde kökleri karmaşık sayı olan reel katsayılı ikinci dereceden denklemlere yer verilir. (Etkinlik formu - 4)

Karmaşık Sayıların Eşleniği

Karmaşık sayılar daha rahat anlaşılması için koordinat düzlemde gösterilmeye çalışılmış, 1673 yılında John Wallis'in ortaya attığı sanal doğru fikrinden yaklaşık 120 yıl sonra 1797'de Casper Wessel karmaşık sayıyı koordinat düzleminde göstermiştir.



$1 - 2i$ ve $1 + 2i$ sayıları dinamik matematik yazılımı yardımıyla koordinat sisteminde nerede oldukları görülebilir. Aynı şekilde Etkinlik Formu Soru 4'teki reel katsayılı karmaşık köke sahip denklemlerin kökleri de dinamik matematik yazılımında oluşturulup bu kökler arasındaki ilişkiden yola çıkarak karmaşık sayının eşleniği kavramı tanıtılır. Koordinat düzleminde bu sayıların x eksenine göre simetrik oldukları ile ilgili çıkarım yapılması sağlanır.

TANIM

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + ib$ karmaşık sayısı verildiğinde $\bar{z} = a - ib$ 'ye z 'nin eşleniği denir.

Karmaşık sayıların eşleniklerini bulmaya yönelik alıştırımlara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5)

Karmaşık Sayılarda Dört İşlem

İki karmaşık sayının toplamı ve farkı için aşağıda yer alan işlemler dinamik matematik yazılımında yapılır ve bu toplama ve çıkarma işlemlerinin yazılım tarafından nasıl yapıldığı sorgulanır.

$$(2 + 3i) + (1 + 4i) = 3 + 7i, (2 + 3i) - (1 + 4i) = 1 - i$$

$$(2 + 3i) + (-2 + 5i) = 8i, (2 + 3i) - (-2 + 5i) = 4 - 2i$$

$$(1 + 4i) + (-2 + 5i) = -1 + 9i, (1 + 4i) - (-2 + 5i) = 3 - i$$

$$a, b, c \text{ ve } d \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } z = a + ib \text{ ve } w = c + id \text{ verilsin. } z \pm w = (a \pm b) + i(c \pm d)$$

İtalyan matematikçi Cardano 16. yy'da $i = \sqrt{-1}$ ifadesi için $(\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) = -1$ kuralı ilave edilirse karmaşık sayıların bilinen diğer sayılar gibi işlem göreceğini ifade etmiştir ve karmaşık sayılar için karesi -1 olan sayıya i denilmiştir. O zaman $i^2 = -1$ yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak i sayısının kuvvetleri bulunur. $i = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ... Buradan yola çıkarak şu sonuca ulaşılmaya çalışılır.

$$i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, i^{4k} = 1$$

i sayısının kuvvetleri ile ilgili uygulamalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 6)

Bir karmaşık sayının bir reel sayı ile çarpımı için Etkinlik Formu Soru 7'de yer alan işlemler dinamik matematik yazılımında yapılır ve bu işlemlerin yazılım tarafından nasıl yapıldığı sorgulanır. Öğrencilerden $z = a + bi$ karmaşık sayısı için $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k \cdot z$ çarpımının kuralını oluşturmaları istenir.

$$k, a \text{ ve } b \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } z = a + ib \text{ için, } k \cdot z = k \cdot a + i \cdot k \cdot b$$

İki karmaşık sayının çarpımı için Etkinlik Formu Soru 8'de yer alan işlemler dinamik matematik yazılımında yapılır ve bu işlemlerin yazılım tarafından nasıl yapıldığı sorgulanır. Öğrencilerden $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ karmaşık sayıları için $z_1 \cdot z_2$ çarpımının kuralını oluşturmaları istenir.

$$a, b, c \text{ ve } d \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } z_1 = a + ib \text{ ve } z_2 = c + di \text{ için } z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ dir.}$$



Bir karmaşık sayının eşleniği ile çarpımı özel olarak ele alınabilir.

Örnek:

$z = 2 + 3i$, $w = -1 + i$ karmaşık sayısı verilsin. $z \cdot \bar{z} = ?$, $w \cdot \bar{w} = ?$

Çözüm:

$$(2 + 3i) \cdot (2 - 3i) = 4 - 6i + 6i + 9 = 13$$

$$(-1 + i) \cdot (-1 - i) = 1 + i - i + 1 = 2$$

$z = x + iy$ karmaşık sayısı verilsin. $z \cdot \bar{z}$ ile ilgili bir kural bulunabilir mi, sorusu öğrencilere yöneltilerek bu kuralı cebirsel olarak göstermeleri istenebilir.

$$(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$$

İki karmaşık sayının bölümü için Etkinlik Formu Soru 9'da yer alan işlemler dinamik matematik yazılımında yapılır ve bu işlemlerin yazılım tarafından nasıl yapıldığı sorgulatılır. Öğrencilerden $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ ve karmaşık sayıları için $\frac{z_1}{z_2}$ bölümünün kuralını oluşturmaları istenir.

a, b, c ve $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + di$ için

$$\frac{(a + ib)}{(c + id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{(c^2 + d^2)} = \frac{(ac + bd)}{(c^2 + d^2)} + i \frac{(bc - ad)}{(c^2 + d^2)} \text{ 'dir.}$$

Karmaşık sayıların eşlenikleri ile ilgili bazı özellikler vardır ve bu özellikler öğrenciler tarafından ispatlanabilir.

Önerme:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, (z_2 \neq 0)$

5. $\frac{z + \bar{z}}{2} = \text{Re}(z)$

6. $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \text{Im}(z)$

7. $\bar{\bar{z}} = z$

İspat:

$z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 1. \quad \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \overline{z_1 - z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} \\ &= (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} - \overline{z_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_1 (x_2 - iy_2) - iy_1 (x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned}$$

$$4. \quad \overline{\overline{z_1}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot \overline{z_2} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$5. \quad \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{x + iy + x - iy}{2} = \frac{2x}{2} = \text{Re}(z)$$

$$6. \quad \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{x + iy - x + iy}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \text{Im}(z)$$

$$7. \quad \overline{\overline{z}} = \overline{(x + iy)} = \overline{(x - iy)} = x + iy = z$$

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- Karmaşık sayıların elektrik devre analizinde kullanımı yönünde araştırma yaptırılabilir.
- Bir karmaşık sayı ile eşleniği çarpıldığında çarpımın değerinin mutlak değeri karmaşık sayının orijine olan uzaklığını verir. Bunun keşfine yönelik dinamik matematik yazılımının kullanılacağı etkinlikler yaptırılabilir.
- $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun reel kökleri bu fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalardır. Ancak karmaşık köke sahip olan reel katsayılı 2. dereceden fonksiyonların grafikleri ile karmaşık kökleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Dinamik matematik yazılımı yardımıyla bu problem üzerinde çalışılabilir.
- İki karmaşık sayı büyük ve küçük olarak sıralanabilir mi? Karmaşık sayılar kümesinde sıralama bağıntısı var mı? Buna yönelik çalışmalar yapılabilir.



KAYNAKLAR

- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramlarının Künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Karaaslan, G. (2019). *Özel Yetenekli Öğrencilerin Karmaşık Sayılar Konulu Etkinlikler ile Üstbilişsel Bilgi ve Becerilerinin İncelenmesi*. Doktora Tezi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Karaaslan, G & Turanlı, N. (2018). Karmaşık Sayılar Konusundaki Kavram Yanılgıları ve Hataları Belirlemek İçin Alternatif Bir Araç: Tanılayıcı Dallanmış Ağaç. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 33 (1), 72-89.
- Stewart, I. (2017). *Matematiğin Kısa Tarihi* (2. Bs.). Alfa Bilim.
- Turgut, B. (2005). *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi* (5. Bs.). Nobel Yayınları.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Tanılayıcı Dallanmış Ağaç 1-2 Değerlendirme Formları'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. a. $\{-3\}$

b. $\emptyset$

c. $\{-1,6\}$

d. $\mathbb{Q}$

2. a. $\{-2\}$

b. $\{1/7,1\}$

c. $\emptyset$

d. $\mathbb{R}$

3. a. $\left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$

b. $\{\sqrt[3]{5}\}$

c. $\emptyset$

d. $\emptyset$

4. a. $(1 \pm 3i) / 5$

b. $\{1,2\}$

c. $\frac{\sqrt{6} \pm 3i \sqrt{6}}{6}$

5. a. $-2i$

b. $1 + 3i$

c. -5

d. $-3 - 2i$

e. $1 + 2i$

6. a. i

b. $-i$

c. 1

7. a. $3 - 3i$

b. $2/5 + 3/5i$

c. $4 - 10i$

8. a. $5 + i$

b. $3 + 7i$

c. $-19 + 4i$

9. a. $(1+5i) / 2$

b. $-2i$

c. $2 - 3i$

d. $1 + i$

**Etkinlik Formu**

1. Aşağıdaki denklemleri tam sayılar kümesinde çözünüz.

a. $5x + 23 = 8$

b. $3x - 2 = 32$

c. $x^2 - 5x - 6 = 0$

Tam sayılarda çözüm kümesi boş küme olan denklemleri belirleyin. Bu denklemler için çözüm kümesinin boş küme olmadığı bir küme belirleyin.

2. Aşağıdaki denklemleri 1. soruda belirlediğiniz kümede çözünüz.

a. $x^3 + 15 = 7$

b. $7x^2 - 8x + 1 = 0$

c. $x^2 + x - 1 = 0$

Birinci soruda belirlediğiniz kümede çözüm kümesi boş küme olan denklemler için çözüm kümesinin boş küme olmadığı bir küme belirleyin.

3. Aşağıdaki denklemleri 2. soruda belirlediğiniz kümede çözünüz.

a. $x^2 - 3x + 1 = 0$

b. $x^3 - 5 = 0$

c. $x^2 + 1 = 0$

d. $x^2 - 2x + 5 = 0$

İkinci soruda belirlediğiniz kümede çözüm kümesi boş küme olan denklemler için çözüm kümesinin boş küme olmadığı bir küme belirleyin. Eğer böyle bir küme bilmiyorsanız kendiniz bir küme inşa edebilirsiniz.

4. Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

a. $5x^2 + 2x + 2 = 0$

b. $x^2 - 3x + 2 = 0$

c. $3x^2 - \sqrt{6}x + 5 = 0$

5. Aşağıdaki sayıların eşleniklerini bulunuz.

a. $z = 2i \Rightarrow \bar{z} = ?$

b. $z = 1 - 3i \Rightarrow \bar{z} = ?$

c. $z = -5 \Rightarrow \bar{z} = ?$

d. $z = -3 + 2i \Rightarrow \bar{z} = ?$

e. $z = -2i + 1 \Rightarrow \bar{z} = ?$

6. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{1001} = ?$

b. $i^{-9} + i^{-7} + i^{-5} + i^{-3} + i^{-1} = ?$

c. $i^3 + i^8 + i^{13} + \dots i^{73} = ?$

7. Analitik düzlemde $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 3i$ ve $z_3 = -2 + 5i$ sayılarını oluşturun. Ve aşağıdaki çarpma işlemlerini dinamik matematik yazılımı yardımıyla yapınız.

a. $3 \cdot z_1 =$

b. $\frac{1}{5} \cdot z_2 =$

c. $-2 \cdot z_3 =$

Dinamik matematik yazılımından elde ettiğiniz sonuçlara göre; yazılımın ne tür bir kural kullandığını düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

$z = a + bi$ karmaşık sayısı için $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha \cdot z$ çarpımının kuralını oluşturunuz.

8. Analitik düzlemde $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 3i$ ve $z_3 = -2 + 5i$ sayılarını oluşturunuz ve aşağıdaki çarpma işlemlerini dinamik matematik yazılımı yardımıyla yapınız.

a. $z_1 \cdot z_2 =$

b. $z_1 \cdot z_3 =$

c. $z_2 \cdot z_3 =$

Dinamik matematik yazılımından elde ettiğiniz sonuçlara göre; yazılımın ne tür bir kural kullandığını düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ karmaşık sayıları için $z_1 \cdot z_2$ çarpımının kuralını oluşturunuz.

9. Dinamik matematik yazılımı ile $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 2$, $z_4 = i$ karmaşık sayıları için

a. $\frac{z_1}{z_2}$

b. $\frac{z_3}{z_4}$

c. $\frac{z_1}{z_4}$

d. $\frac{z_3}{z_2}$

işlemlerinin sonucunu bulun. Sizce dinamik matematik yazılımı bu işlemleri yaparken nasıl bir süreç izlemektedir?

$\frac{a + ib}{c + id}$ işlemi için bir kural belirleyebilir misin?



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: FONKSİYONLARDAN DİZİLERE

: Analiz/Diziler

: 1. Dizi ve fonksiyon kavramlarını ilişkilendirir.

2. Genel terimleri verilen gerçekte sayı dizileri üzerinde dört işlem yaparak yeni diziler elde eder.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

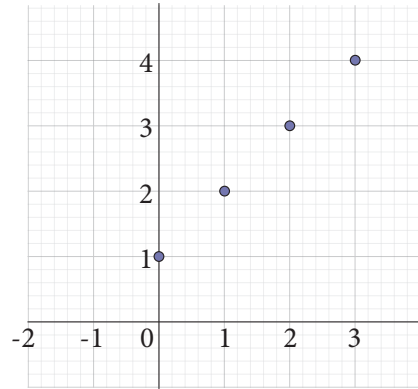
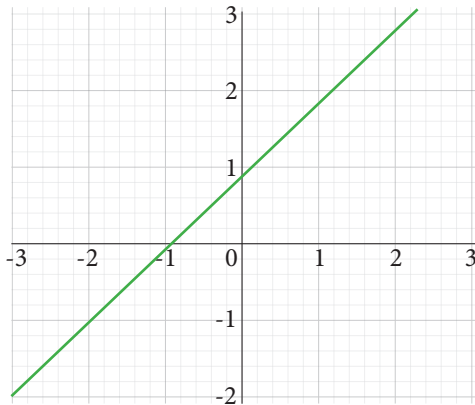
: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Dizi kavramını, fonksiyon tanımından yola çıkılarak öğrencilerin keşfetmeleri beklenmektedir. Sonlu dizi, sabit dizi ve dizilerin eşitliğini öğrencilerin incelemesi istenmektedir. Etkinlikte yer alan çalışmalarla öğrencilerin dizi ile fonksiyon arasındaki ilişkiyi cebirsel ve grafiksel olarak analiz etmesi hedeflenmektedir. Ayrıca dizilerin genel terimleri ile dört işlem yaparak yeni diziler oluşturması amaçlanmaktadır.

Başlarken...

Gerçek yaşamda olayları, fikirleri, nesneleri dizi hâline getirmenin anlamı onları mantıksal sıraya koymaktır. Fotoğraflar, resimler, dans hareketleri, yemek pişirme adımları bunlara örnek olarak gösterilebilir. Matematikte ise daha çok sayılar bir sıraya konulur ve birinci terim, ikinci terim gibi indeksleme yapılır. Matematiksel olarak dizi bir fonksiyon olarak düşünülür. Aşağıda cebirsel ifadeleri birbirine benzer olan $f(x) = x + 1$ fonksiyonu ve $a_n = n + 1$ dizisinin grafikleri yer almaktadır.



Sizce fonksiyon ile dizi arasındaki fark nedir?

Fonksiyon ile Dizi Arasındaki İlişki

A kümesinde yer alan sayıları belli bir kurala göre sıralayabilir misiniz? Kuralı cebirsel olarak yazınız.

$$A=\{5,1,26,2,37,50,17,65,82,10\}$$

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82 şeklinde sıralanabilir ve terimleri küçükten büyüğe tablo hâlinde aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

1. terim	a_1	1
2. terim	a_2	2
3. terim	a_3	5
4. terim	a_4	10
5. terim	a_5	17
6. terim	a_6	26
7. terim	a_7	37
8. terim	a_8	50
9. terim	a_9	65
10. terim	a_{10}	82

Bu dizinin kuralı $a_n = (n-1)^2 + 1$ olarak bulunabilir.

Matematiksel dizi oluşturma süreci bir fonksiyon olarak düşünülmüş ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

TANIM

Tanım kümesi $\mathbb{N}^+ = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ olan her fonksiyona **dizi** denir. Diziler, değer kümelerine göre isimlendirilir. Değer kümesi $\mathbb{R}$ olan diziye **gerçek sayı dizisi** denir. $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gerçek sayı dizisinde $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$ ile gösterilirse bu fonksiyonun görüntü kümesi $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ biçiminde ifade edilir. Burada $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere a_k ifadelerine dizinin terimleri, a_n ifadesine dizinin n. terimi ya da **genel terimi** denir. Genel terimi a_n olan bir dizi $\{a_n\}$ ya da (a_n) şeklinde gösterilir.

**Örnek:**

5,9,17,29... şeklinde verilen dizinin genel terimini bulunuz.

Çözüm:

Terimlerin artış miktarı: 4,8,12,... şeklinde olduğu için;

$$5 = 5 = a_1$$

$$9 = 5 + 4 \cdot 1 = a_1 + 4 \cdot 1 = a_2$$

$$17 = 9 + 4 \cdot 2 = a_2 + 4 \cdot 2 = a_3$$

$$29 = 17 + 4 \cdot 3 = a_3 + 4 \cdot 3 = a_4$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} + 4 \cdot (n - 1)$$

Bu yol ile dizinin genel terimi bir önceki terimine bağlı olarak bulunabilmiştir. Dizinin genel terimi için diğer bir yol ise şu şekildedir.

$$a_1 = 5 = 5$$

$$a_2 = 9 = 5 + 4 \cdot 1$$

$$a_3 = 17 = 5 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2$$

$$a_4 = 29 = 5 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3$$

...

$$a_n = 5 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \dots + 4 \cdot (n-1)$$

$$a_n = 5 + 4 (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))$$

$$= 5 + 4 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

$$= 2n^2 - 2n + 5$$

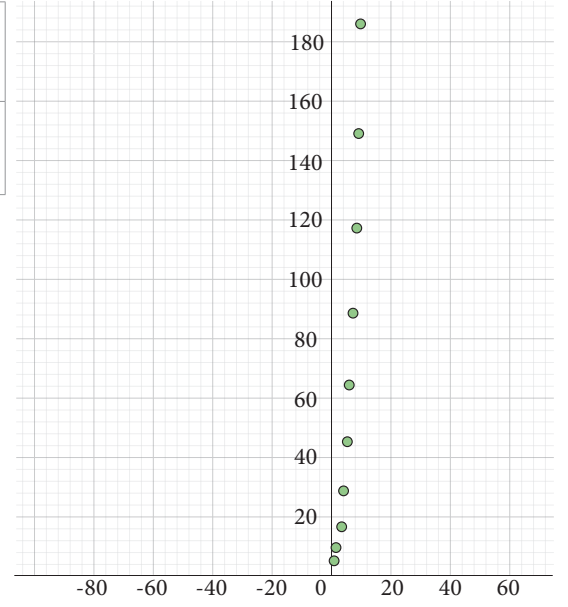
Dizinin genel terimini bulma ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 1-3).

Dizinin Grafiği

$a_n = 2n^2 - 2n + 5$ genel terimi ile verilen dizinin grafiğini dinamik matematik yazılımı ile oluşturalım.

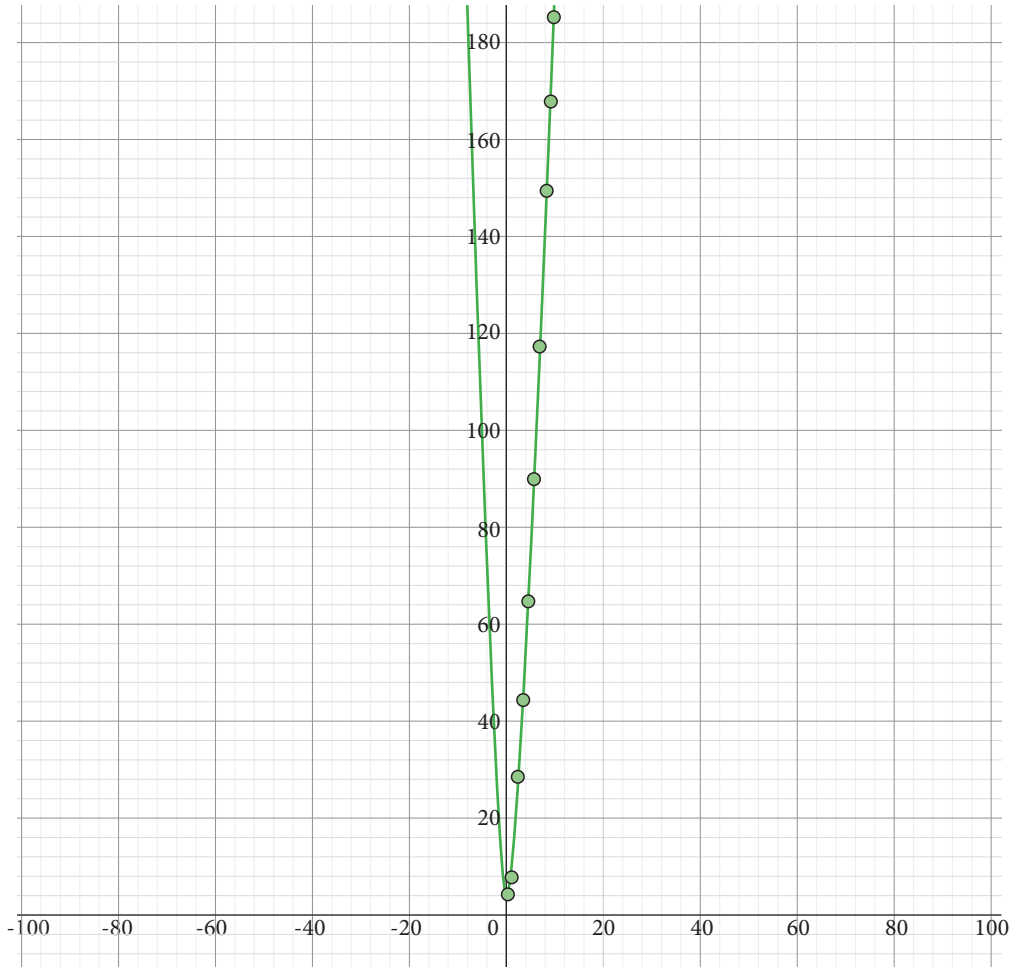
Bunun için dinamik matematik yazılımının giriş penceresine $Dizi[(n, 2n^2 - 2n + 5), n, 1, 10]$ yazılır. Buradaki 1 sayısı dizinin başlangıç terimini, 10 sayısı ise son terimi ifade etmektedir. Eğer ifadede $(n, 2n^2 - 2n + 5)$ yerine $2n^2 - 2n + 5$ yazılırsa dizinin grafiği ortaya çıkmaz, sadece dizinin ilk 10 terimi liste hâlinde görünür.

●	l1 = Dizi (n, 2n ² - 2n + 5), n, 1, 10)
	→ {(1, 5), (2, 9), (3, 17), (4, 29), (5, 45), (6, 65), (7, 89), (8, 117), (9, 149), (10, 185)}
+	Giriş...



$a_n = 2n^2 - 2n + 5$ dizisinde sonra aynı ekranda $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$ fonksiyonunun grafiğini dinamik matematik yazılımı ile oluştursak yukarıdaki grafiğe göre ne gibi değişiklikler olacaktı?

- Dinamik matematik yazılımında f fonksiyonunu oluşturduğumuzda fonksiyonu $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye tanımlayacağı için grafik bir eğri olur.



**Sonlu Dizi**

$a_n = 2n - \frac{1}{n-7}$ şeklinde genel terimi verilen ifadeyi ele alalım. (a_n) bir dizi belirtir mi?

$n = 7$ için bu ifade tanımsız olur. Ancak, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için a_n tanımlıdır. $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ den oluşan sonlu bir dizedir.

TANIM

$k \in \mathbb{N}^+$ ve A_k kümeleri $\mathbb{Z}^+$ nın alt kümeleri olmak üzere $A_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ 'ye tanımlanan her fonksiyona **sonlu dizi** denir.

$(a_n): A_k \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere (a_n) sonlu dizisinin elemanları $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$(a_n) = (\sqrt{100 - n^3})$ sonlu gerçekte sayı dizisi en çok kaç elemanlıdır?

Çözüm:

(a_n) gerçekte sayı dizisi için $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $100 - n^3 \geq 0$ olmalıdır. $n = 1, 2, 3, 4$ değerleri için (a_n) bir gerçekte sayı dizisidir. (a_n) dizisi en çok 4 elemanlıdır.

Sabit Dizi

Dinamik matematik yazılımında r adında bir sürgü oluşturun ve başlangıç değerini 1, bitiş değerini 30 ve artış miktarını 1 br olarak belirleyin.

Sürgü

Ad

r

☒ Sayısal☐ Açık☐ Tamsayı

Aralık

Sürgü

Canlandırma

Min

Maks

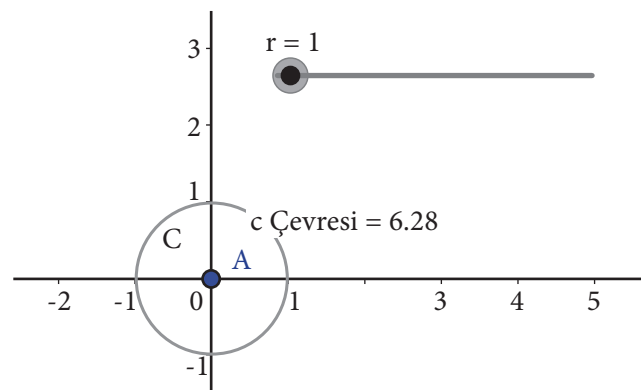
Artış

0

30

1

Yarıçap uzunluğu ile çember oluşturma aracı olan “Çember: Merkez ve Yarıçap” ile merkezi orijin ve yarıçap uzunluğu “ r ” olan bir çember oluşturun (Sürgünün 1’de olduğuna emin olun.). Bu çemberin çevresini “uzaklık veya uzunluk” aracı ile belirleyin.



Daha sonra giriş penceresine “Çevre(c)/r” değerini girerek a değerini oluşturun.

$$a = \frac{\text{Çevre (c)}}{r}$$

$$\approx 628$$

⋮



Perspektiflerden Hesap Tablosunu seçip tablonun A1 hücresine r değerini, B1 hücresine çemberin çevre uzunluğunu (Çevre(c)), C1 hücresine ise a değerini atayın. Sürgüyü birer birim arttırarak tabloyu doldurun.

Sayısal r		
	Nesneyi Göster	✓
	Etiketi Göster	✓
	Hesap Tablosuna Kaydet	✓
	Canlandırma	
	Kilitli Nesne	

1	6.28	6.28
2	12.57	6.28
3	18.85	6.28
4	25.13	6.28
5	31.42	6.28
6	37.7	6.28
7	43.98	6.28
8	50.27	6.28
9	56.55	6.28
10	62.83	6.28

Üçüncü sütundaki değerin hep sabit kaldığı öğrenciler tarafından gözlemlenir ve bu değerin hangi sayı olduğu sorulur? $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

Üçüncü sütundaki değerleri bir dizinin terimleri olarak yazacak olursak $(2\pi, 2\pi, 2\pi, \dots)$ dizinin tüm terimlerinin aynı olduğu görülür ve bu diziler özel olarak adlandırılır.

TANIM

(a_n) bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i = a$ ise o zaman (a_n) ye bir **sabit dizi** denir.

Örnek:

Genel terimi $a_n = \frac{5n+1}{3n-k}$ olan dizi bir sabit dizi ise k değeri nedir?

Çözüm:

$a_n = \frac{5\left(n+\frac{1}{5}\right)}{2\left(n-\frac{k}{3}\right)}$ olarak yazıldığında n’li ifadelerin birbirini sadeleştirilmesi gerekir. Bu nedenle $n + \frac{1}{5} = n - \frac{k}{3}$

eşitliğinden $k = -\frac{3}{5}$ bulunur.

Sabit dizi ile ilgili uygulamalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 4)

**Dizilerin Eşitliği**

$(a_n) = (-1)^n$ ile $(b_n) = \begin{cases} -1 & n \text{ tek ise} \\ 1 & n \text{ çift ise} \end{cases}$ şeklinde genel terimleri verilen dizilerin ilk 10 terimini yazınız ($n \in \mathbb{N}^+$).

$$a_n = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1\}$$

$$b_n = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1\}$$

TANIM

(a_n) ve (b_n) birer dizi olmak üzere her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i = b_i$ oluyorsa (a_n) ve (b_n) dizileri birbirine eşittir.

a_n ve b_n dizilerinin ilk 10 terimi eşit olarak bulunmuştur. Genel terimlerine dikkat edilecek olursa $\forall i \in \mathbb{N}^+$ için $a_i = b_i$ olduğu görülür. Bu nedenle a_n ve b_n dizileri birbirine eşittir.

Dizilerde Dört İşlem

Dizilerin genel terimleri üzerinde dört işlem yapılabilir ve böylece yeni diziler elde edilebilir.

Genel terimleri $a_n = 2^n$ ve $b_n = n^2 - n + 1$ şeklinde verilen diziler için $(c_n) = (a_n) + (b_n)$ dizisinin genel terimini ve ilk beş terimini şu şekilde belirleyebiliriz.

$$c_n = 2^n + n^2 - n + 1$$

$$\{3, 7, 15, 29\}$$

Örnek:

Genel terimleri $a_n = n^2 - 2n - 3$ ve $b_n = n + 1$ şeklinde olan diziler ile ilgili aşağıdaki işlemleri yaparak yeni diziler oluşturun ve bu dizilerin ilk beş terimlerini yazın.

a. $(c_n) = (a_n) - (b_n)$

b. $(d_n) = (a_n) \cdot (b_n)$

c. $(e_n) = \frac{(a_n)}{(b_n)}$

Çözüm:

a. $(c_n) = (a_n) - (b_n) = n^2 - 2n - 3 - n - 1 = n^2 - 3n - 4$

$\{-6, -6, -4, 0, 6\}$ dizinin ilk beş terimidir.

b. $(d_n) = (a_n) \cdot (b_n) = (n^2 - 2n - 3) \cdot (n + 1) = n^3 - n^2 - 5n - 3$

$\{-8, -9, 0, 25, 72\}$ dizinin ilk beş terimidir.

c. $(e_n) = \frac{(a_n)}{(b_n)} = \frac{n^2 - 2n - 3}{n + 1} = \frac{(n - 3)(n + 1)}{n + 1} = n - 3$

$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dizinin ilk beş terimidir.

Örnek:

$(a_n) = \begin{cases} 2n - 1, & n \geq 2 \\ n^2 - 3, & n < 2 \end{cases}$ ve $(b_n) = \begin{cases} n^3 + 2, & n \geq 0 \\ 4, & n < 0 \end{cases}$ dizileri için $(c_n) = (a_n) - (b_n)$ dizisini bulalım.

Çözüm:

$$(c_n) = (a_n) - (b_n) = \begin{cases} n^2 - 3 - 4, & n < 0 \\ n^2 - 3 - n^3 - 2, & 0 \leq n < 2 \\ 2n - 1 - n^3 - 2, & 2 \leq n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n^2 - 7, & n < 0 \\ -n^3 + n^2 - 5, & 0 \leq n < 2 \\ -n^3 + 2n - 3, & 2 \leq n \end{cases}$$

Dizilerde işlemler ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 5, 6).

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- 1,2,4,8,15,31,... şeklinde verilen dizinin genel terimi farklar dizisi yardımıyla bulunabilir.
- Kısmi toplamlar dizisi hakkında çalışmalar yapılabilir.
- Archimedes'in dizi kavramı ile ilgili çalışmaları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramların Künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.

Nesin, A. (2014). *Analiz 1*. Nesin Matematik Köyü.

Yeşildere, S. & Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreci. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 141-153.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceli Puanlama Anahtarı Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlik Formu Cevapları

1. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)$

2. $a_n = n^2 + 2n$

3. 302

4. 6

5. 17

6. $\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} = \begin{cases} n^2 + n + 1, & n < 0 \\ n! + (n + 1)^2, & 0 \leq n < 3 \\ n! + n^2 - 1, & 3 \leq n \end{cases}$

Etkinlik Formu

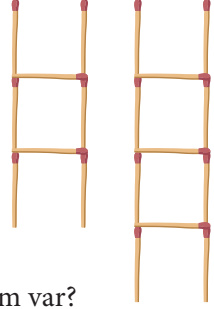
1. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ dizisinin genel terimini bulunuz.

2. 3,8,15,24... dizisinin genel terimini bulunuz.

3. 8 kibrit çöpüyle yandaki gibi iki basamaklı bir merdiven yapabiliyorum.

11 kibrit çöpüyle yandaki gibi üç basamaklı bir merdiven yapabiliyorum.

Buna göre 100 basamaklı merdiven yapmak için kaç tane kibrit çöpüne ihtiyacım var?



4. Genel terimi $a_n = (k - 2) \cdot n^2 + (m - 3) \cdot n + m \cdot k$ olan dizi sabit dizi olduğuna göre $a_{(k+m)} = ?$

5. $(a_n) = \{n \text{ sayısına kadar } (n \text{ dahil}) \text{ asal sayıların toplamı}\}$ ve

$(b_n) = \{n \text{ sayısına kadar } (n \text{ dahil}) \text{ olan karesel sayıların toplamı}\}$ olmak üzere

$(c_n) = (a_n) - (b_n)$ dizisi için $c_5 + c_8$ değerini hesaplayın.

6. $(a_n) = \begin{cases} n!, & n \geq 0 \\ -n, & n < 0 \end{cases}$ ve $(b_n) = \begin{cases} n^2 - 1, & n \geq 3 \\ (n + 1)^2, & n < 3 \end{cases}$ dizileri için $(c_n) = (a_n) + (b_n)$ dizisini oluşturun.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: ÖZEL DİZİLER

: Analiz/Diziler

: 1. Özel dizilerle işlem yapar.

2. Genelleştirilmiş toplama ve çarpma sembollerini kullanarak işlem yapar.

3. Aritmetik ve geometrik diziler ile modellenebilecek problemler kurar ve çözer.

SÜRE

: 4 ders saati

**KULLANILACAK
MATERYALLER**

: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Özel diziler olarak aritmetik, geometrik, öz yinelemeli (Rekürsif) ve yinelemeli (iteratif) dizilerle işlem yapması istenmektedir. Bu diziler ile günlük yaşam durumlarındaki çokluklar arası ilişkileri modellemeleri beklenmektedir. Genelleştirilmiş toplama ve çarpma sembollerine neden ihtiyaç duyduklarını keşfetmeleri ve bu semboller ile örüntüleri eşleştirme çalışmaları yapmaları hedeflenmektedir. Aritmetik ve geometrik diziler ile modellenebilecek problemler kurması ve çözmesi amaçlanmaktadır.

Başlarken...

Mısırlılar ve Sümerler hesap yapabilmeyi daha pratik hâle getirmek için sayı dizilerini geliştirmişlerdir. Aritmetik ve geometrik diziler binaların inşasında, sanatsal yapılarda, finansal matematikte, nüfus artışı ve azalışında karşımıza çıkmaktadır. MÖ 1550 yıllarına ait olduğu rivayet edilen Ahmes papirüsünde 100 somun ekmeğin 5 kişi arasında nasıl paylaşılacağı ile ilgili bir problem yer alıyordu.

100 somun ekmek 5 kişi arasında
öyle paylaşılacak ki herkesin alacağı ek-
mek sayısı arasındaki fark eşit olacak
ve en fazla ekmek alan 3 kişinin payına
düşen toplam ekmek sayısının yedide
biri en az sayıda ekmek alan 2 kişinin
payına düşen ekmek sayısına eşit ol-
malı.

Aritmetik Dizi

Ahmes papirüsünde yer alan problemi çözmeye çalışalım.

En az sayıda ekmek alan kişinin aldığı ekmek sayısı n ve aradaki fark da x olmak üzere, 5 kişinin aldığı ekmek sayısını küçükten büyüğe doğru yazacak olursak;

$$n, n + x, n + 2x, n + 3x, n + 4x \text{ olur.}$$

Ekmek sayılarının toplamı 100 olacağından $5n + 10x = 100$ eşitliği vardır.

Soruda verilen diğer koşulu da yazacak olursak;

$$\frac{(n + 2x) + (n + 3x) + (n + 4x)}{7} = (n) + (n + x)$$

$$3n + 9x = 14n + 7x \Rightarrow 11n - 2x = 0 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

Şimdi bu iki denklemi birlikte çözelim.

$$5n + 10x = 100$$

$$11n - 2x = 0$$

Bu denklemlerin çözümünden $n = \frac{5}{3}$, $x = \frac{55}{6}$ değerleri bulunur. Problemin çözümünden anlaşılaçağı üzere ekmeklerin parçalanarak dağıtılacağı görülmektedir.

TANIM

(a_n) bir dizi ve d bir gerçek sayı olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_{(n+1)} - a_n = d$ ise (a_n) 'ye bir **aritmetik dizi** denir ve d ifadesine ortak fark adı verilir.

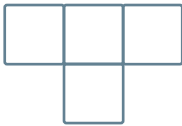
Örnek:

Aşağıdaki şekillerde fayanslar belirli bir kurala göre yerleştirilmiştir.

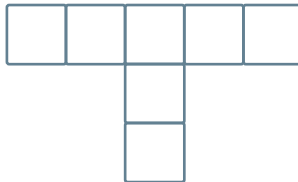
1. Şekil



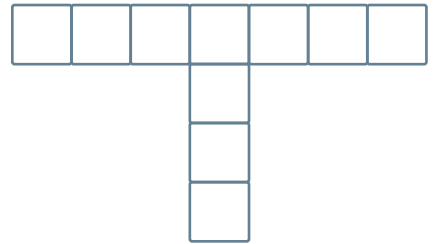
2. Şekil



3. Şekil



4. Şekil



Yukarıdaki örüntüye göre 10. şekildeki fayans sayısı kaç olabilir?

n . şekildeki fayans sayısı kaç olabilir?

**Çözüm:**

Şekillerdeki fayans sayıları 1-4-7-10- ... şeklindedir. Sayılar arasındaki fark eşit olduğu için bu dizi bir aritmetik dizi olabilir. Dizinin iki terimi arasındaki fark 3 olduğu için dizinin terimleri şu şekilde yazılabilir:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 3 \cdot 1$$

$$a_3 = 1 + 3 \cdot 2$$

$$\vdots$$

$$a_{10} = 1 + 3 \cdot 9 = 28$$

$$a_n = 1 + 3 \cdot (n - 1) = 3n - 2$$

Örnek:

Aşağıda verilen dizilerin aritmetik dizi olup olmadıklarını belirleyelim.

a. $(a_n) = (-2n + 4)$

b. $(b_n) = (n^2 - 3)$

Çözüm:

a. $a_n = -2n + 4 \Rightarrow a_{(n+1)} = -2(n+1) + 4 = -2n + 2$

$a_{(n+1)} - a_n = (-2n + 2) - (-2n + 4) = -2 \in \mathbb{R}$ olduğundan (a_n) aritmetik dizidir.

b. $b_n = n^2 - 3 \Rightarrow b_{(n+1)} = (n+1)^2 - 3 = n^2 + 2n - 2$ olur.

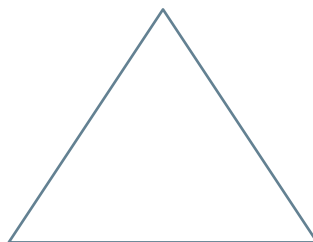
Buna göre $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$b_{(n+1)} - b_n = (n^2 + 2n - 2) - (n^2 - 3) = n^2 + 2n - 2 - n^2 + 3 = 2n + 1$ bulunur. $(2n + 1)$ sayısı, sabit bir gerçekte sayı olmayıp (b_n) aritmetik dizi değildir.

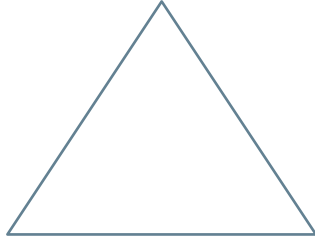
Aritmetik diziler ile ilgili uygulamalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1, 2)

Geometrik Dizi

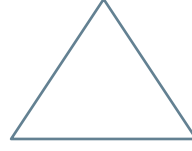
Aşağıdaki şekilde bir kenarı 12br olan bir eşkenar üçgen vardır.



Bu eşkenar üçgen her adımda kenar uzunlukları ortalanarak ikiye bölünmekte ve alt tarafı atılmaktadır.



1. Şekil



2. Şekil



3. Şekil

Buna göre bir tablo oluşturalım ve 8. şekle kadar eşkenar üçgenlerin kenar sayılarını bulalım.

n. Şekil	Eşkenar Üçgenin Kenar Uzunluğu
1. Şekil	12
2. Şekil	6
3. Şekil	3
4. Şekil	$3/2$
5. Şekil	$3/4$
6. Şekil	$3/8$
7. Şekil	$3/16$
8. Şekil	$3/32$

Tablodaki sayılar incelendiğinde ardışık iki terim arasında bir oran olduğunu fark edebilirsiniz.

TANIM

(a_n) bir dizi ve r sıfırdan farklı bir gerçekte sayı olsun. $\forall r \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$a_{n+1} = r \cdot a_n$ ise o zaman (a_n) 'ye bir **geometrik dizi** denir.

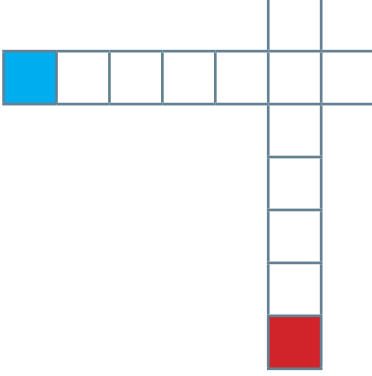
Örnek:

Yukarıdaki dizideki 40. şekilde eşkenar üçgenin kenar uzunluğu kaç br olur?

Çözüm:

$$a_1 = 12, a_2 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right), a_3 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots, a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{olduğu için } a_{40} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{39} \text{ olur.}$$

**Sayı Yerleştirme Etkinliği****Etkinlik Formu Soru 3**

Yandaki şekilde öyle sayılar yerleştirin ki soldan sağa doğru aritmetik, yukarıdan aşağıya doğru ise geometrik bir dizi oluştursun. Mavi renkli hücre aritmetik dizinin 1. terimi, kırmızı renkli hücre ise geometrik dizinin 7. terimi olacaktır.

Oluşturulacak aritmetik dizi (a_n) , geometrik dizi ise (b_n) olsun. $a_6 = b_2$ olması gerektiğine dikkat ediniz.

Örnek bir durum için $a_1 = 5$, $b_7 = 640$ için tablonun nasıl yerleştirileceğini öğrencilere sorabiliriz.

Bu durumda $(a_n) = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$ ve

$(b_n) = \{10, 20, 40, 80, 160, 320, 640\}$ olacaktır.

Geometrik dizi ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 4).

Özyinelemeli Diziler**Etkinlik Formu Soru 5**

Bir 0-1 dizisi 0 ve 1'lerden oluşan bir dizidir. 0-1 dizileri bilgisayar dilindeki binary kodlarda kullanıldığı için, bir olayın olup olmama gibi günlük hayat durumlarının modellenmesinde kullanılabilir. Dizideki 0-1'lerin sayısı dizinin uzunluğunu belirtir. Aşağıdaki tabloda n uzunluğundaki 0-1 dizilerinde 00'ın yan yana gelmediği durumların bulunulması istenmektedir.

Dizinin Uzunluğu	00'ın Yan Yana Gelmediği Durumlar	00'ın Yan Yana Gelmediği Durum Sayısı
1	0,1	2
2	01,10,11	3
3	010,011,101,110,111	5
4	0101,0110,0111,1010,1011,1101,1110,1111	8
:		
n		$a_{n-1} + a_{n-2}$

Bu bağıntının ispatı öğrencilere verilebilir.

n uzunluğunda bir dizinin son rakamı 0 ya da 1'dir. Eğer bu dizinin son terimi 1 ise ve bu 1'i silersek içinde 00 bulundurmayan $n-1$ uzunluğunda bir dizi elde ederiz. Eğer bu dizinin son terimi 0 ise sondan bir önceki terim kesinlikle 1 olmalıdır yani bu dizi 10 ile bitmelidir. Bu diziden son 2 terimi silersek içinde 00 bulundurmayan $n-2$ uzunluğunda bir dizi elde ederiz.

Bu durumda $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ bağıntısına ulaşırız.

Yukarıdaki dizinin genel terimi Fibonacci dizinin genel terimi ile aynıdır ve bu şekilde ifade edilen dizilere özyinelemeli diziler denir.



Fibonacci dizisinin özyinelemeli dizi olmasını kullanarak metin tabanlı yazılım programı ile n . terimi bulan bir program yazınız ve 10. terimini bulunuz.

```
def fibonacci(n):
    if n <= 2:
        return 1
    else:
        return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)
print(fibonacci(10))
```

Program çıktısı

55

TANIM

A ve B reel sayılar olmak üzere $a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2}$ formundaki dizilere **özyinelemeli (Rekürsif) diziler** denir. $\lambda \in \mathbb{R}$ için $a_n = \lambda^n$, $a_{n-1} = \lambda^{n-1}$, $a_{n-2} = \lambda^{n-2}$ olup

$a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2}$ formundaki dizi $\lambda^n = A \cdot \lambda^{n-1} + B \cdot \lambda^{n-2}$ yazılabilir. Buradan denklem λ^{n-2} 'ye bölünerek $\lambda^2 - A\lambda - B = 0$ ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denkleme

$a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2}$ yineleme dizisinin **karakteristik denklemi** denir.

i. $\lambda^2 - A\lambda - B = 0$ denkleminin λ_1 ve λ_2 gibi iki reel kökü varsa,

$a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ olur.

ii. $\lambda^2 - A\lambda - B = 0$ denkleminin $\lambda_1 = \lambda_2$ gibi çakışık kökü varsa,

$a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_1^n$ olur.

**Örnek:**

$a_1 = 3, a_2 = 10$ olmak üzere $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ eşitliğini sağlayan (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

Çözüm:

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ dizisinin karakteristik denklemi $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ olduğundan kökler $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ olur. $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n$ yazılır.

$$a_1 = c_1 + 2 \cdot c_2 = 3$$

$$a_2 = c_1 + 4 \cdot c_2 = 10$$

Bu iki denklemden $c_1 = -4, c_2 = \frac{7}{2}$ bulunur.

$$a_n = -4 \cdot 1^n + \frac{7}{2} \cdot 2^n = -4 + \frac{7}{2} \cdot 2^n$$

Özyinelemeli diziler ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 6, 7).

Yinelemeli Diziler**Etkinlik Formu Soru 8**

Aşağıdaki tabloda n uzunluğundaki 0-1 dizilerinde 001'in yan yana gelmediği durumların bulunulması istenmektedir.

Dizinin Uzunluğu	001'in Yan Yana Gelmediği Durumlar	00'ın Yan Yana Gelmediği Durum Sayısı
1	0,1	2
2	00,01,10,11	4
3	000,010,011,100,101,110,111	7
4	0000,0100,0101,0110,0111,1000,1010,1011,1100,1101,1110,1111	12
:		
n		$a_{n-1} + a_{n-2} + 1$

Bu bağıntının ispatı öğrencilere verilebilir.

n uzunluğundaki bir dizi 0 ya da 1 ile başlar.

1 ile başlarsa; a_{n-1}

0 ile başlarsa 0'dan sonra 01 gelemeyeceğinden bu diziye b_{n-1} diyelim.

Böylece $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ olur.

01..... şeklindeki diziye a_{n-2} diyelim,

00000... şeklindeki dizi de 1 tane olduğu için $b_{n-1} = a_{n-2} + 1$ olur.

Bu durumda $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ 'dir.

TANIM

A, B reel sayılar ve $T(n)$ sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere

$a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2} + T(n)$ formundaki dizilere **yinelemeli (iteratif) diziler** denir.

TANIM

Her terimi kendisinden önceki bir veya birkaç terim ve n'e bağlı ifadeler ile tanımlanabilen dizilere **indirgemeli diziler** denir. Özyinelemeli ve yinelemeli diziler aynı zamanda indirgemeli dizilerdir.

Örnek:

$a_1 = 2$ ve $a_n = 3a_{n-1}$ indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisinin genel terimini ve 15. terimini bulalım.

Çözüm:

$$a_1 = 2 \text{ ve } a_n = 3a_{n-1} \text{ ise}$$

$$a_2 = 3a_1$$

$$a_3 = 3a_2$$

$$a_4 = 3a_3$$

⋮

$$a_n = 3a_{n-1}$$

Yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$a_n = 3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3 \cdot a_1 = a_1 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ dizinin genel terimi elde edilir.}$$

Bu dizinin 15. terimi ise $a_{15} = 2 \cdot 3^{15-1} = 2 \cdot 3^{14} = 9.565.938$ olarak bulunur.

Bu diziyi yinelemeli bir dizi olma özelliğini kullanarak metin tabanlı yazılım programı ile oluşturarak 15. terimini bulalım.



```
def dizi(n):
    if n == 1:
        return 2
    else:
        return 3 * dizi(n-1)

print(dizi(15))
```

Program çıktısı

9565938

Örnek:

Bir (a_n) dizisi $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre a_{17} kaçtır? (UMO 2008)

Çözüm:

$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ denkleminde n yerine $n+1$ yazarsak $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 7$ denklemi elde edilir. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 3a_n - a_{n-1} = 0$ denklemi elde edilir ve bu denklemin karakteristik denklemi $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ şeklindedir.

$(r-1)^3 = 0$ olup $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ 'dir. Bu nedenle dizinin genel terimi

$$A(1)^n + Bn(1)^n + Cn^2(1)^n = A + Bn + Cn^2$$

şeklinde elde edilir.

$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ denkleminde $n = 2$ için $a_3 - 2 \cdot 5 + 1 = 7 \Rightarrow a_3 = 16$ bulunur.

A, B ve C sayılarını bulmak için $a_n = A + Bn + Cn^2$ ifadesinde sırasıyla $n = 1, 2, 3$ değerleri verilir.

$$A + B + C = 1$$

$$B + 3C = 4$$

$$2C = 7$$

$$A + 2B + 4C = 5$$

$$B + 5C = 11$$

$$C = \frac{7}{2}, B = -\frac{13}{2}, A = 4$$

$$A + 3B + 9C = 16$$

$a_n = 4 - \frac{13n}{2} + \frac{7n^2}{2}$ genel terimi elde edilir.

$a_{17} = 4 - \frac{221}{2} + \frac{2023}{2} = 905$ bulunur.

Yinelemeli diziler ile ilgili uygulamalara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 9)

Genelleştirilmiş Toplama ve Çarpma Sembolleri

$1+4+7+10+ \dots +301$ ile verilen toplama işlemini ifadenin içerisinde yer alan sayıların kuralından yararlanarak daha kısa bir şekilde göstermeye çalışalım.

Bunun için öncelikle yukarıdaki örüntünün genel terimini bulmaya çalışalım. Bu örüntü aritmetik bir dizi olduğu için $a_n = 1 + 3 \cdot (n-1) = 3n - 2$ olarak yazılabilir. Şimdi toplama işlemlerini yazmak için genelleştirilmiş toplam sembolünü kullanalım.

$$(3 \cdot 1 - 2) + (3 \cdot 2 - 2) + \dots + (3 \cdot 101 - 2) = \sum_{n=1}^{101} 3n - 2$$

TANIM

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

şeklinde gösterilen sembole **toplam sembolü** denir. Burada k değişken (indis), 1 alt sınır, n ise üst sınırdır.

Örnek:

$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right) + \left(-\frac{1}{20}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{240}\right)$ şeklinde verilen işlemin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} - \dots - \frac{1}{15 \cdot 16} = \sum_{k=3}^{17} \frac{-1}{(k-1) \cdot (k-2)}$$

$$\frac{-1}{(k-1)(k-2)} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k-2} \Rightarrow A(k-2) + B(k-1) = -1 \Rightarrow A = 1, B = -1$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{17} \frac{-1}{(k-1) \cdot (k-2)} &= \sum_{k=3}^{17} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - 1 \\ &\quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{16} - \frac{1}{15} \\ &= \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16} \end{aligned}$$



Bu ifadeyi metin tabanlı yazılım programı ile oluşturarak toplamını bulalım.

```
a=0
for k in range(3,18):
    ak=-1/((k-1)*(k-2))
    a+=ak
print(a)
Program çıktısı
-0.9374999999999999
```

Toplam sembolü ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 10).

1.2.3...20 işlemini $20!$ olarak kısa bir şekilde yazabiliyoruz. 12.13...20 işlemini de $\frac{20!}{11!}$ şeklinde göstermeyi biliyoruz. Peki 3.5.7.9...23 işlemini daha kısa nasıl gösterebiliriz.

$\frac{24!}{2.4.6...24} = \frac{24!}{2^{12} 12!}$ bir yöntem olarak düşünülebilir. Ancak işlemde yer alan sayılar bir örüntü oluşturduğu için bu örüntüyü kullanarak aynı toplama işleminden yola çıkarak toplam sembolü kullandığımız gibi çarpma işleminden yola çıkarak çarpma sembolünü kullanabiliriz. Örüntünün genel terimi $2n+1$ şeklinde olduğundan

$$3.5.7.9 \dots 23 = \prod_{n=1}^{11} (2n+1)$$

şeklinde gösterilebilir.

TANIM

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^n a_k$$

şeklinde gösterilen sembole **çarpım sembolü** denir. Burada k değişken (indis), 1 alt sınır, n ise üst sınırdır.

Örnek:

Aşağıdaki çarpım sembolü ile verilen işlemin sonucunu bulunuz.

$$\prod_{k=1}^{20} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{20} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{20} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{21}{20} = 21$$

olarak bulunur.

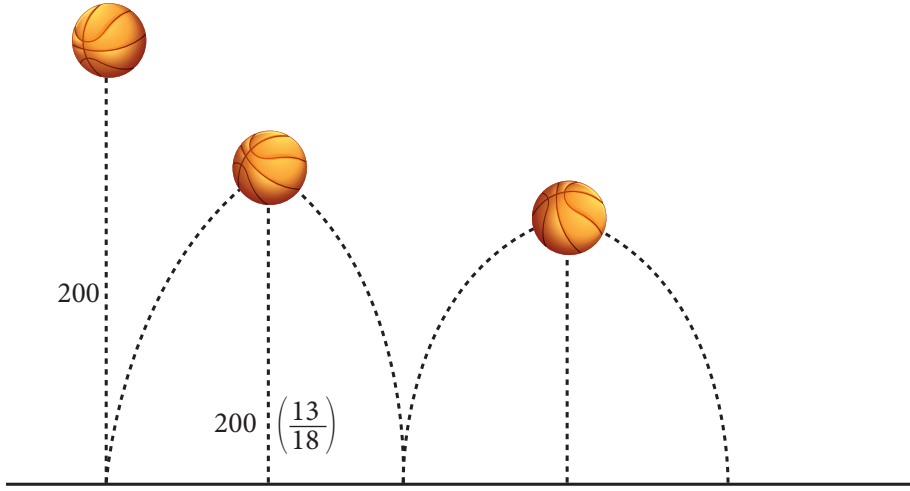
Aritmetik ve Geometrik Dizi ile Modellenebilen Problemler

Basketbol topunun yeterince iyi şişmiş olduğunu nasıl anlarız?

Standartlara uygun olarak şişirilmiş bir basketbol topu 180 cm yükseklikten bırakıldığında 130 cm yükselmektedir. Bu bırakılan yüksekliğe göre zıplama oranının sabit olduğunu kabul edersek iyi şişirilmiş bir basketbol topunu 200 cm'den yere doğru bırakırsak 5. yere vuruşundan sonra kaç cm yükselir? 5. yere vuruşuna kadar dikey olarak kaç cm yol alır?



İyi şişirilmiş basketbol topu her yere vuruşunda bırakıldığı yüksekliğin $\frac{13}{18}$ 'i kadar yükseliyor. 200 cm yükseklikten bırakıldığında 1. yere vuruşunda $200 \cdot \frac{13}{18}$, 2. yere vuruşunda $200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^2$, ..., n. yere vuruşunda ise $200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^n$ cm yükselir. Bu nedenle basketbol topu 5. yere vuruşunda $200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^5 \cong 39,3$ cm yükselir.



Yukarıdaki şekilde basketbol topunun 5. yere vuruşuna kadar dikey olarak aldığı yollar verilmiştir.

$$\begin{aligned} & 200 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right) \cdot 2 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^2 \cdot 2 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^3 \cdot 2 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^4 \cdot 2 \\ &= \left(200 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right) + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^2 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^3 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^4\right) \\ &+ \left(200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right) + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^2 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^3 + 200 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^4\right) \end{aligned}$$



TANIM

Birinci terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan ($r \neq 1$) bir (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı

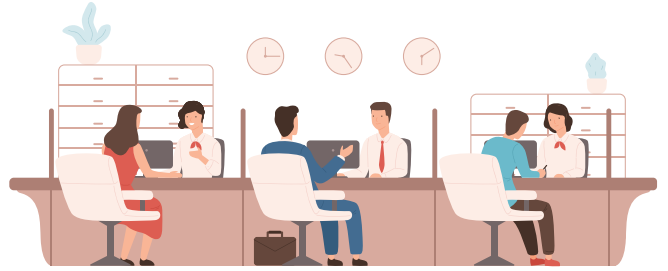
$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \text{ olur.}$$

Yukarıdaki işlemde 2 tane geometrik dizi varmış gibi düşünersek birinci dizinin ilk terimi 200, ortak çarpanı $\frac{13}{18}$, ikinci dizinin ilk terimi $200 \cdot \frac{13}{18}$, ortak çarpanı ise yine $\frac{13}{18}$ dir.

$$200 \cdot \frac{1 - \left(\frac{13}{18}\right)^5}{1 - \frac{13}{18}} + 200 \cdot \frac{13}{18} \cdot \frac{1 - \left(\frac{13}{18}\right)^4}{1 - \frac{13}{18}} = 957,05 \text{ cm}$$

Örnek:

Ev almak için bankaya kredi çekmeye giden Ali 150.000 TL'ye ihtiyacı olduğunu belirtir. Banka çalışanı şu an için uygun bir kampanya olduğunu ve ilk ay 2000 TL olmak üzere aylık ödemelerin her ay 50 TL artacak şekilde 60 ayda ödeyebileceğini söylemiştir. Ali 60 ay sonunda çektiği 150.000 TL ev kredisi için bankaya toplam kaç TL ödeme yapacaktır?



Çözüm:

Ali'nin aylık ödemeleri $a_1 = 2000$, $a_2 = 2050$, ..., $a_n = 2000 + (n - 1) \cdot 50$ şeklinde aritmetik bir dizi şeklindedir. $a_{60} = 2000 + 59 \cdot 50 = 4950$ 'dir.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{60} = \frac{a_{60} + a_1}{2} \cdot 60 = \frac{4950 + 2000}{2} \cdot 60 = 208.500$$

TANIM

Birinci terimi a_1 olan (a_n) aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamı $S_n = n \cdot \frac{(a_n + a_1)}{2}$ olur.

Aritmetik ve geometri dizi ile modellenebilen problemlere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 11, 12)

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Diziler kullanılarak sayı yerleştirme oyunları geliştiriniz.
- Fibonacci dizisinin genel terimini bulunuz.
- Lucas dizilerini araştırınız.
- Fibonacci sayılarının genelleştirilmesi üzerine yapılan çalışmaları araştırınız.
- Birinci terimi a ve ortak çarpanı r olan bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamının olduğunu gösteriniz.

KAYNAKLAR

- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramların Künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Bukova Güzel, E. (2016). Örüntü ve Dizi. A. N. Elçi, E. Bukova Güzel, B. Cantürk Günhan, E. Ev Çimen (Ed.), *Temel Matematiksel Kavramları ve Uygulamaları Öğrenenler ve Öğretenler İçin* (s.1-12). Pegem Akademi.
- Nesin, A. (2010). *Sezgisel Kümeler Kuramı*. Nesin Yayıncılık: İstanbul.
- Özdemir, M. (2013). *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 4*. Altın Nokta Yayınevi.
- TÜBİTAK (2008). *Ulusal Matematik Olimpiyatı*.
- Yeşildere, S. & Akkoç, H. (2011). Matematik Öğretmen Adaylarının Şekil Örüntülerini Genelleme Süreci. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 141-153.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

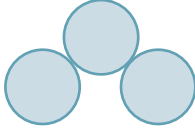
**Etkinlik Formu Cevapları**

1. 44
2. 51
3. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
4. 3/512 br.
5. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
6. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$
7. $a_n = 3 - 4_n$
8. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
9. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$
10. -531/380
11. $2^{64} - 1$
12. 16

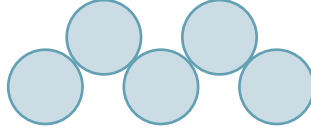
Etkinlik Formu

1. 5 ile 95 sayıları arasına bu sayılar ile birlikte aritmetik dizi oluşturacak 29 sayı ekleniyor. Buna göre bu dizinin 14.terimi kaçtır?

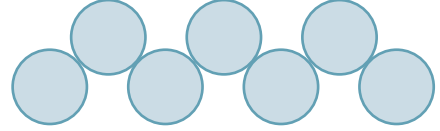
2.



1. Şekil



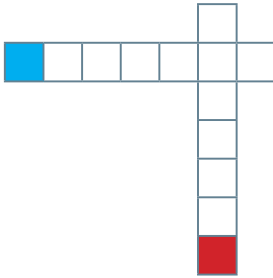
2. Şekil



3. Şekil

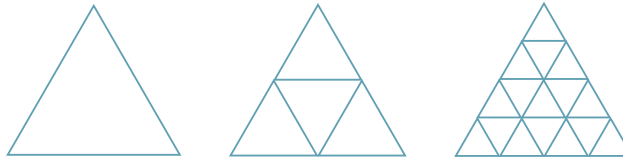
Yukarıdaki örüntüye göre 25. şekildeki dairelerin sayısını bulunuz.

3.



Yandaki şekilde öyle sayılar yerleştirin ki sağdan sola doğru aritmetik, yukarıdan aşağıya doğru ise geometrik bir dizi oluştursun. Mavi renkli hücre aritmetik dizinin 1. terimi, kırmızı renkli hücre ise geometrik dizinin 7. terimi olacaktır.

4. Aşağıdaki şekilde bir eşkenar üçgen her adımda kenarlarının orta noktası birleştirilerek yeni eşkenar üçgenler elde edilmektedir. Buna göre 10. şekildeki en küçük eşkenar üçgenin çevresi kaç br olur?



5. n birim uzunluğundaki 0-1 dizilerinde 00'in yan yana gelmediği durumların sayısını veren bir bağıntı bulunuz.

Dizinin Uzunluğu	00'in Yan Yana Gelmediği Durumlar	00'in Yan Yana Gelmediği Durum Sayısı
1		
2		
3		
4		
⋮		
n		



6. n birim uzunluğundaki 0-1 dizilerinde 000'in yan yana gelmediği durumların sayısını veren bir bağıntı bulunuz.
7. $a_1 = 2, a_2 = -1$ olmak üzere $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}$ eşitliğini sağlayan (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.
8. n birim uzunluğundaki 0-1 dizilerinde 001'in yan yana gelmediği durumların sayısını veren bir bağıntı bulunuz.

Dizinin Uzunluğu	001'in Yan Yana Gelmediği Durumlar	00'in Yan Yana Gelmediği Durum Sayısı
1		
2		
3		
4		
5		
:		
n		

9. n birim uzunluğundaki 0-1 dizilerinde 011'in yan yana gelmediği durumların sayısını veren bir bağıntı bulunuz.

10. $-\frac{2}{3} - \frac{2}{8} - \frac{2}{15} - \frac{2}{24} - \dots - \frac{2}{360} = ?$

11. Satranç ile ilgili meşhur hikâyeyi biliyorsunuzdur. Rivayete göre satrancı bulan kişiyi ödüllendirmek isteyen kral, adama ne istediğini sorunca şöyle bir cevap almıştır: "Satranç tahtasının ilk karesine 1 buğday tanesi konulduktan sonra her kareye bir önceki kareye konulmasının 2 katı kadar buğday tanesi konulsun. Bu şekilde 64 kareye konulacak kadar buğday tanesi istiyorum." Sizce bu adam ne kadar buğday tanesi istemektedir?



12. Kendisini 10 km koşu yarışına hazırlayan bir sporcu gün aşırı koşma antrenmanları yapmaktadır. İlk gün 7 km koşan yarışmacı her antrenmanda koşu mesafesini 200 metre arttırmaktadır. Bu yarışmacı kaçınıcı antrenmanda 10 km koşar?





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: TRİGONOMETRİ
MODÜL/KONU	: Analiz/Trigonometri
KAZANIMLAR	: 1. Yönlü açığı açıklayarak açı ölçü birimlerini inceler. : 2. Trigonometrik fonksiyonları birim çember yardımıyla oluşturur.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu, dinamik matematik yazılımı

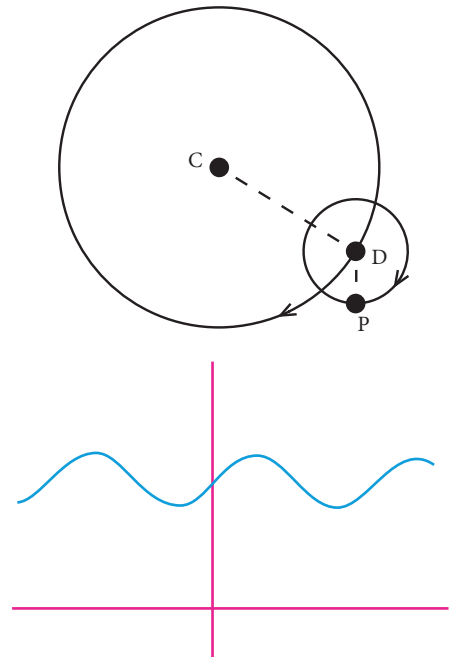
Etkinliğin Amacı

Yönlü açı ve derecenin alt birimleri tanıtıldıktan sonra dik üçgen üzerinde trigonometrik oranlar verilir ve bu trigonometrik oranların birim çember yardımıyla trigonometrik fonksiyonlara dönüştürülmesi amaçlanmaktadır. Etkinlikte, birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonlar tanımlanırken sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının tanım ve değer kümelerinin belirlenmesi ve trigonometrik fonksiyonlar arasındaki temel özdeşliklerin incelenmesi hedeflenmiştir.

Başlarken...

Johannes Kepler, yörüngelerin elips şeklinde olduğunu keşfetmeden önce, gezegenlerin hareketleriyle ilgili yapılan çalışmaların temelini Ptolemaious'un (Batalmyus) çalışmaları oluşturuyordu. Ptolemaious'un modelinde küçük çember merkezinin büyük çemberin üstünde döndüğünü göstermiştir. Dış çember şeması ile dairesel hareketleri birleştiren Ptolemaious'un modelinde P noktası D noktası etrafında hareket ederken, D noktası da C noktası etrafında düzgün hareket ediyor. Zamanın gök bilimcileri P noktasının hareketini incelediklerinde (P noktasının C noktasına olan uzaklığı) aşağıdaki gibi bir grafik elde etmişlerdir.

Sizce bu hangi fonksiyonun grafiği olabilir ve bu fonksiyonun değerleri nasıl hesaplanabilir?





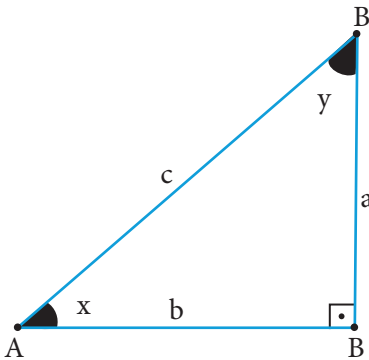
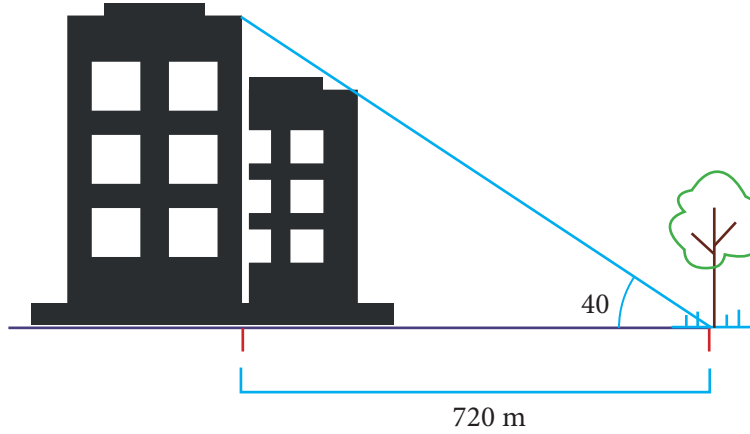
Trigonometrik Oranlar

Resimdeki binaların yükseklikleri ile ilgili bir problem üzerinde çalışan bir mühendis çözüme ulaşmak için aşağıdaki çizimi yapmıştır ve çizdiği doğru parçasının zemin ile yaptığı açığı 40° olarak hesaplamıştır.



Bu çizim, gerçek dünyada yer aldığı için mühendis şekildeki ağaçtan uzunluğunu belirlemek istediği sol-daki binanın uzunluğunu telefonundaki navigasyon uygulaması ile yürüyerek hesaplamıştır. Bu bilgileri kullanarak mühendis sol taraftaki binanın yüksekliğini nasıl hesaplayabilir?

Mühendisin bu binanın yüksekliğini hesaplayabilmesi için trigonometrik oranları kullanması gerekir. Trigonometrik oranlar bir dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki oranlardır.



$$\sin \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}}$$
$$\cos \alpha = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}}$$
$$\tan \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}}$$

$$\sin x = \frac{a}{c}, \sin y = \frac{b}{c}$$
$$\cos x = \frac{b}{c}, \cos y = \frac{a}{c}$$
$$\tan x = \frac{a}{b}, \tan y = \frac{b}{a}$$
$$\cot x = \frac{b}{a}, \cot y = \frac{a}{b}$$

Açılarına göre özel üçgenlerin ($30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ve $45^\circ-45^\circ-90^\circ$) kenar uzunlukları oranları bilindiği için bu açıların trigonometrik oranları belirlemeye yönelik çalışmalar yapılabilir (Etkinlik Formu 1).

Binanın yüksekliğini ölçme probleminde mühendisin 40 derecelik bir açının trigonometrik oranlarını bilmesi gerekiyor. Bunun için hesap makinesinden ya da trigonometri cetvelinden yararlanılır.

	Sinüs	Kosinüs	Tanjant
39	0.62932	0.777146	0.809784
40	0.642788	0.766044	0.8391
41	0.656059	0.75471	0.869287

Yukarıdaki şekilde trigonometri cetvelinden bir bölüm yer almaktadır. Artık mühendis bu tablodan yararlanarak binanın uzunluğunu bulabilir.

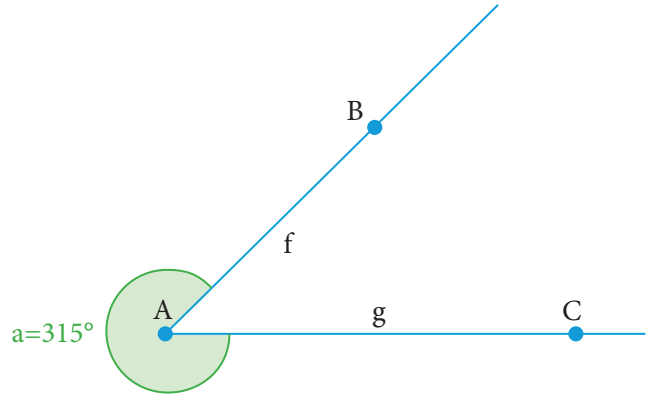
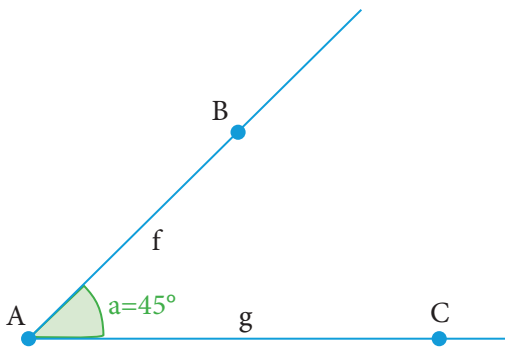
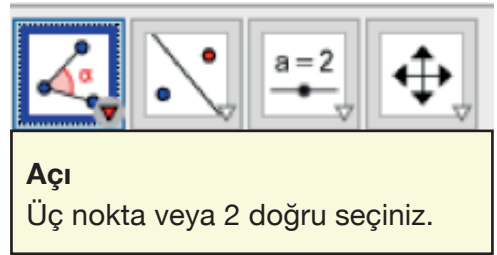
$$\tan 40^\circ = \frac{\text{binanın yüksekliği}}{720 \text{ m}} \Rightarrow \text{binanın yüksekliği} = (720) \cdot (0,8391) = 604,152 \text{ m}$$

Etkinlik Formunda yer alan benzer problemler çözülür (Etkinlik Formu 2, 3).

Yönlü Açılar

Dinamik matematik yazılımında açı ölçme ya üç nokta ya da iki doğru seçilerek gerçekleştir.

Aşağıdaki şekildeki verilen A, B ve C noktaları ile açı ölçerken eğer C, A, B noktaları sırasıyla seçilirse (ya da sırasıyla g ve f ışınları seçilirse) CAB açısı 45° değerini alır. Eğer B, A, C noktaları sırasıyla seçilirse BAC açısı $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ değerini alır.

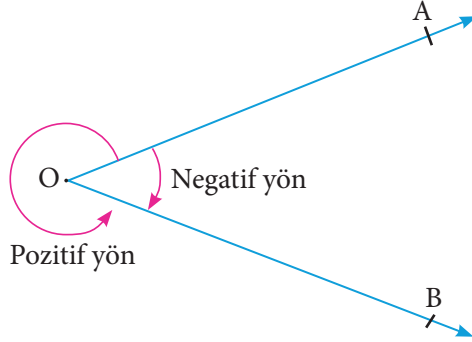


Dinamik matematik yazılımında açı ölçümü yapılırken açının kollarından birisi başlangıç, diğeri bitiş olarak belirlenmektedir. Bu açılar yönlü açılardır.

**TANIM**

Kollarından birisi başlangıç, diğeri bitiş olarak belirlenmiş olan açıya yönlü açı denir.

Açının köşesi etrafında başlangıç noktasından bitim kenarına iki türlü gidilebilir. Saatin dönme yönünün tersi pozitif yön, saatin dönme yönü ise negatif yöndür.



Yönlü açılarının başlangıç kenarı, bitim kenarı ve yönü ile ilgili etkinlikler yaptırılabilir (Etkinlik Formu 4).

Açı Ölçü Birimleri

Bir çemberin $\frac{1}{360}$ 'ını gören merkez açıya **1 derece** denir. Bir çemberde yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** denir. Bir çemberin ölçüsü 360° veya 2π radyan olduğundan $\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi}$ ilişkisi vardır.

Örnek:

Aşağıda birbirinden farklı ölçüler ile verilmiş açıları birbirine dönüştürün.

- Ölçüsü 120° olan açı kaç radyandır?
- Ölçüsü $\frac{3\pi}{4}$ radyan olan açı kaç derecedir?

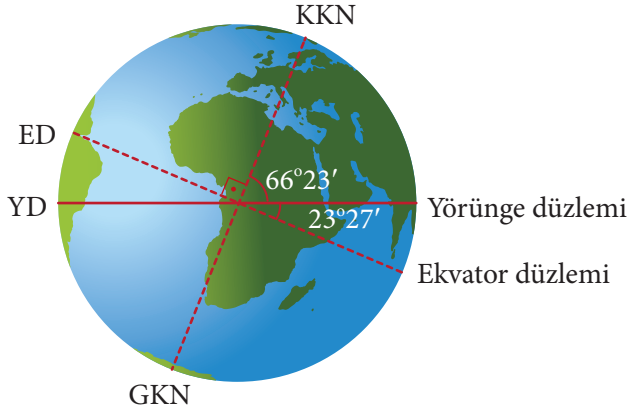
Çözüm:

a. $\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi}$ eşitliğinde $D = 120^\circ$ yazılırsa $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$ radyan bulunur.

b. $\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi}$ eşitliğinde $R = \frac{3\pi}{4}$ yazılırsa $\frac{D}{360^\circ} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2\pi} \Rightarrow D = 135^\circ$

Açı ölçü birimlerinin birbirine dönüştürüldüğü uygulamalar yapılabilir (Etkinlik Formu 5).

Derecenin Alt Birimleri



Dünya'nın elips şeklindeki yörüngesinden geçen düzleme yörünge (eliptik) düzlem, Ekvator'dan geçen düzleme ise Ekvator düzlemi denir. Bu iki düzlem 21 Mart ve 23 Eylül tarihleri hariç birbirleriyle çakışmaz. Çünkü yer eksenini yörünge düzlemine tam dik değildir. Başka bir ifadeyle yer eksenini ile yörünge düzlemi arasında $66^{\circ} 33'$ lık bir açı vardır.

Yandaki şekilde Ekvator düzlemi ile Yörünge düzlemi arasındaki açıya yazan $23^{\circ} 27'$ açı değerinde $27'$ ifadesinin 27 dakika olduğu belirtilir. Bir derecenin 60 dakika, 1 dakikanın da 60 saniye olduğu ifade edilir ($1^{\circ} = 60' = 3600''$).

Derece dakika ve saniye ile ilgili uygulamalar yaptırılabilir (Etkinlik Formu 6).

Trigonometrik Fonksiyonlar

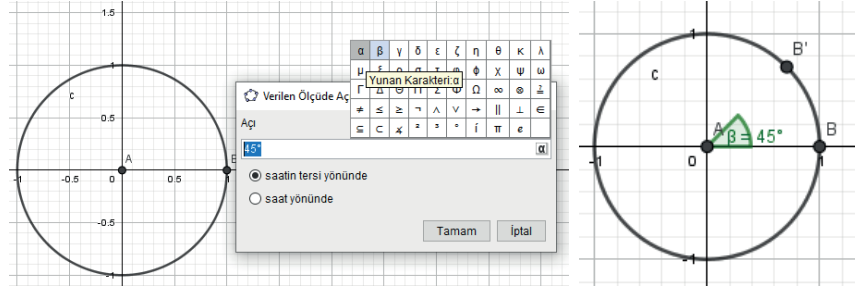
Dinamik matematik yazılımında birim çember çizilerek birim çember üzerinde oluşturulan dik üçgende sinüs ve kosinüs tanımlanır.

1.	Çember menüsündeki araçlar kullanılarak birim çember çizilir ve sürgü aracı ile sürgü oluşturulur.	
-----------	---	--



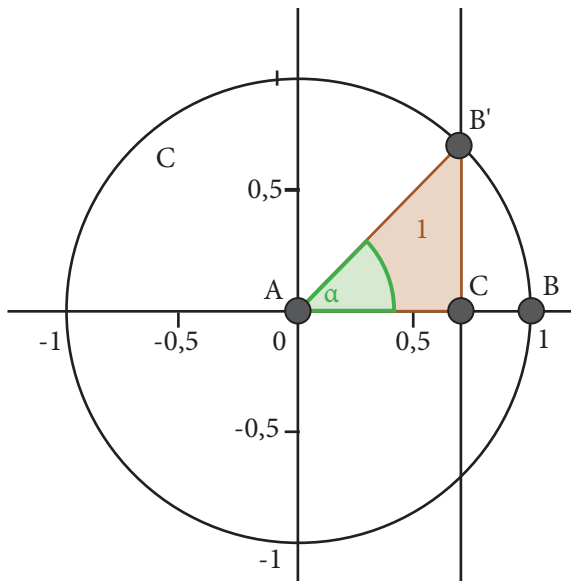
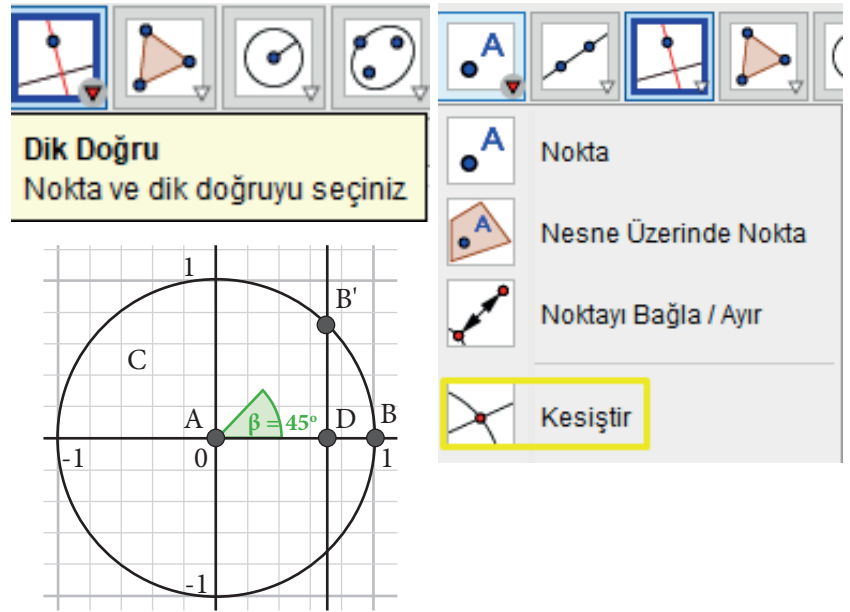
2. “Verilen ölçüde açı” aracı ile birim çember üzerinde açı oluşturulur.

B, başlangıç noktası; A ise köşe noktası olarak seçildikten sonra açılan pencereden açının değeri sürgününün adı olan α olarak belirlenir.



3. “Dik Doğru” aracı ile B' noktası ve x eksenini seçilerek B' noktasından x eksenine dik bir doğru çizilir.

Daha sonra “Kesıştır” aracı ile dik doğru ile x ekseninin kesişim noktası (D) belirlenir. Daha sonra “Çokgen” aracı ile köşeleri A,D ve B' noktaları olan dik üçgen oluşturulur.



$$\sin \alpha = \frac{|B'C|}{1}, \cos \alpha = \frac{|AC|}{1}$$

Burada birim çember üzerinde oluşturulan dik üçgenin dik kenarları ($|B'C|=|\sin\alpha|$, $|AC|=|\cos\alpha|$) α açısının trigonometrik oranları olduğu için birim çember üzerindeki B' noktasının koordinatları α açısının trigonometrik oranları olarak ifade edilir; $B'(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

AB'C dik üçgeninde Pisagor bağıntısı kurularak $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ özdeşliği elde edilir. Ayrıca bu özdeşlik birim çemberin denkleminde de ($x^2 + y^2 = 1$) elde edilebilir. B' noktası birim çember üzerinde olduğu için B' noktasının koordinatları $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlar.

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ özdeşliği ile ilgili uygulamalar yaptırılabilir (Etkinlik Formu 7).

Radyanın doğrudan gerçek sayı karşılığı vardır. Açı ölçü birimlerinden radyanın derecenin gerçek sayı karşılığına ise radyana dönüştürerek ulaşılır. Bu nedenle açıların gerçek sayı karşılıklarına ulaşmak için radyanın kullanılması daha kullanışlıdır. Birim çember üzerinde tanımlanan açının tüm reel sayılarda tanımlı olabileceğini öğrencilere fark ettirmek için dinamik matematik yazılımında oluşturulan açı sürgüsünün özelliklerinden açı tanım aralığı genişletilebilir.

α reel sayısının $\cos\alpha$ ya dönüştüren fonksiyona kosinüs fonksiyonu, $\sin\alpha$ ya dönüştüren fonksiyona ise sinüs fonksiyonu denir. Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri ise şu şekildedir:

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \sin \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının değer kümesini vermeden önce öğrencilerin bu fonksiyonların aldıkları değerlerden değer kümesi hakkında tahminde bulunmalarını sağlamak için Dinamik matematik yazılımında oluşturulan α açı sürgüsünü hareket ettirerek B' noktasının değerlerini gözlemlemeleri istenir.

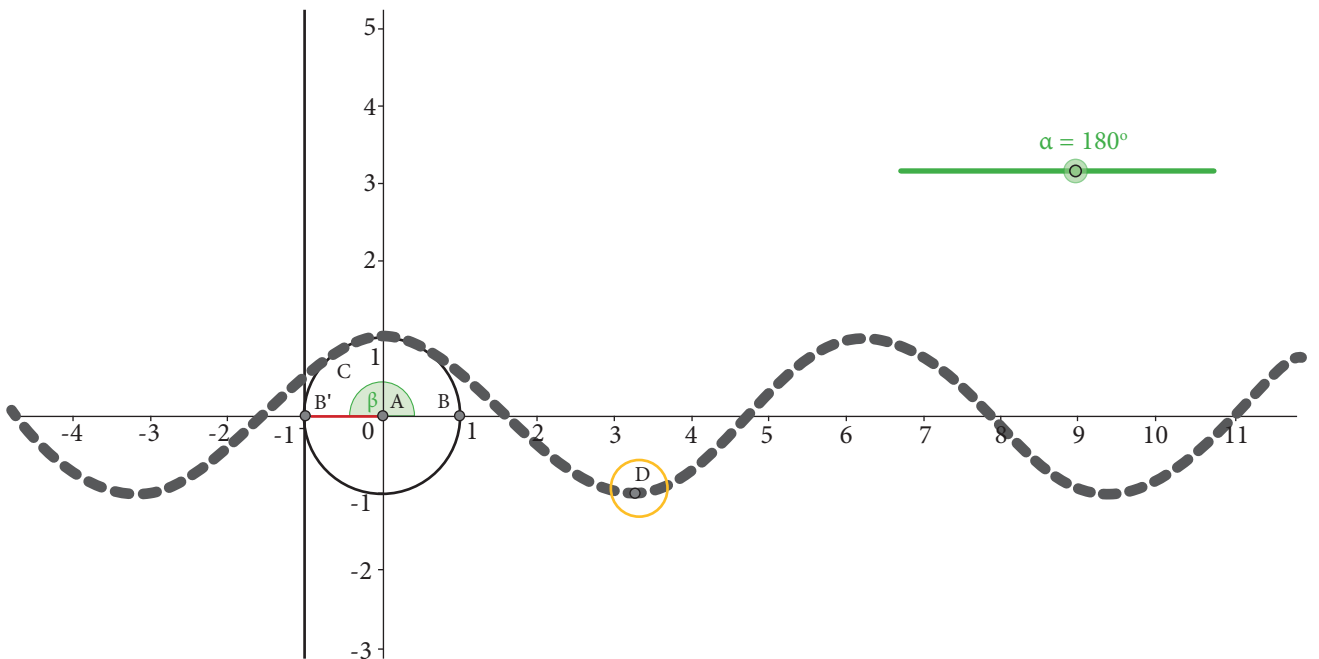
Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının koordinat sistemindeki bölgelerde pozitif, negatif, artan ve azalan olduklarını belirlemelerine yönelik Etkinlik Formu 8 ya da benzeri bir etkinlik yaptırılır. Etkinlik Formu 8'de Dinamik matematik yazılımındaki α açısı sürgü yardımıyla hareket ettirilerek B' noktasının koordinatları yardımıyla öğrencilerin bu tabloyu doldurmaları istenir.

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının grafikleri dinamik matematik yazılımında giriş ekranına doğrudan bu fonksiyonlar girilerek oluşturulabilir. Diğer bir seçenek ise birim çember üzerindeki B' noktasının koordinatları yardımıyla kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının grafikleri öğrenciler ile birlikte oluşturulmasıdır. Kosinüs fonksiyonun grafiğinin çizilmesi için aşağıdaki adımlar sırası ile uygulanmalıdır.



1.	Giriş ekranına apsisi alfa (sembolle yazılsın), ordinatı B' noktasının apsisini veren $x(B')$ ifadesi yazılarak bir D noktası oluşturulur.	Giriş: $(\alpha, x(B'))$
2.	Oluşturulan D noktasının özelliklerinden iz özelliği aktif hâle getirilir.	Nokta D Kutupsal Koordinatlar Nesneyi Göster Etiket göster İzi Aç
3.	Sürgünün özelliklerinden canlandır seçeneği seçilir.	Açı α_1 Nesneyi Göster Etiket göster Canlandır Nesneyi sabitle Ekrandaki mutlak yer

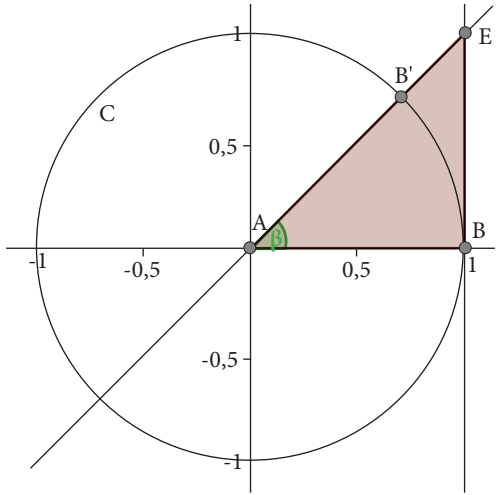
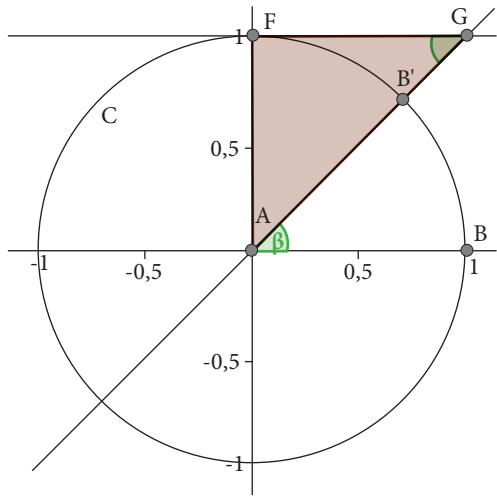
Bu adımlar sonrasında Dinamik matematik yazılımı yardımıyla kosinüs fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.



Dinamik matematik yazılımında yapılan bu etkinlik ile derece ve radyan arasındaki ilişkiye ve neden trigonometrik fonksiyonlarda radyan kullanıldığına yönelik tartışmalar yaptırılabilir. Şekilde sürgüdeki açı 180° iken D noktasının apsisi olan aynı açının koordinat sistemindeki değeri radyan cinsinde yer almaktadır.

Sinüs fonksiyonun grafiği de aynı şekilde Dinamik matematik yazılımında öğrenciler tarafından oluşturulur (Etkinlik Formu 9).

Birim çember üzerinde oluşturulan α açısı ve birim çemberin yarıçapı kullanılarak tanjant ve kotanjant değerleri üçgenin kenarlarından biri olacak üçgenler oluşturulur. Bu üçgenlerin oluşturulması adımları aşağıda verilmiştir. Bu adımlar ilk olarak öğrencilere sorularak öğrencilerin yorum yapmaları sağlanabilir.

1. B noktasından x eksenine dik bir doğru çizilir. β açısının bitiş doğrusu oluşturulur ve bu doğru ile B noktasından x eksenine dik olan doğrunun kesişim noktası (E) bulunur. Köşeleri A, B ve E olan üçgen oluşturulur. $\tan \beta = \frac{ EB }{ AB } = EB $ β açısı 1.bölgede iken $\tan \beta = EB$'dir. β açısı sürgü yardımıyla değiştirildiğinde E noktasının ordinatı β açısının tanjant değerini verir.	
2. Birim çember üzerindeki (0,1) noktası (F) işaretlenir. F noktasından y eksenine dik bir doğru çizilir. β açısının bitiş doğrusu ile bu doğrunun kesişim noktası (G) bulunur. Köşeleri A, F ve G olan üçgen oluşturulur (β açısının FGA açısına eşit olduğu belirtilir.). $\cot \beta = \frac{ GF }{ AF } = GF $ β açısı 1.bölgede iken $\cot \beta = GF$'dir. β açısı sürgü yardımıyla değiştirildiğinde G noktasının apsisi β açısının kotanjant değerini verir.	



α gerçek sayısının $\tan \alpha$ ya dönüştüren fonksiyona tanjant fonksiyonu, $\cot \alpha$ ya dönüştüren fonksiyona ise kotanjant fonksiyonu denir. Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri ise ($k \in \mathbb{Z}$) şu şekildedir:

$$\tan: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \cot: \mathbb{R} - \{k\pi\} \Rightarrow \mathbb{R}$$

Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının değer kümesini vermeden önce, öğrencilerin bu fonksiyonların aldıkları değerlerden değer kümesi hakkında tahminde bulunmalarını sağlamak için Dinamik matematik yazılımı yazılımında oluşturulan α açısı sürgüsünü hareket ettirerek E ve G noktalarının değerlerini gözlemlemeleri istenir.

Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafikleri sinüs ve kosinüs fonksiyonun grafiği gibi Dinamik matematik yazılımı yazılımında E ve G noktalarının koordinatlarından yararlanılarak oluşturulabilir (Etkinlik Formu 10).

Ek Etkinlik Önerisi-Araştırma Soruları

- Birim çemberi somut nesnelerle elde ederek bir trigonometri cetveli oluşturunuz.
- El Biruni'nin dünyanın çevresini nasıl ölçtüğünü araştırınız.
- Trigonometrik fonksiyonların ters fonksiyonlarını elde etmeye çalışın. Bunun için Dinamik matematik yazılımı yazılımında trigonometrik fonksiyonların grafiklerinden ve bir fonksiyonun tersi ile kendisinin grafiği arasındaki ilişkiden yararlanabilirsiniz.
- Trigonometrinin günlük hayat uygulamalarını araştırınız.

Kaynaklar

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramlarının Künyesi*, Ankara: Gazi Kitabevi.

Stewart, I. (2017). *Matematiğin Kısa Tarihi* (2. Bs.). İstanbul: Alfa Bilim.

Ölçme ve Değerlendirme Aracı

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$
 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cot 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\cot 45^\circ = 1$
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\cong 81,915$

3. Burdur $\cong 63,393$ km

Denizli - Isparta $\cong 135,676$ km

Afyonkarahisar - Denizli $\cong 321,676$ km

Isparta - Afyonkarahisar $\cong 291,537$ km

4.

$\widehat{CBA}$	[BC	[BA	pozitif
$\widehat{KLM}$	[KL	[LM	pozitif
$\widehat{XYZ}$	[YX	[YZ	negatif

5. a) π radyanz b) $\frac{4\pi}{3}$ c) 120° d) 30

6. a) $26^\circ 36' 35''$ b) $17^\circ 39' 25''$ c) $90^\circ 51' 40''$

7. a) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $\frac{1-B}{3}$

8.

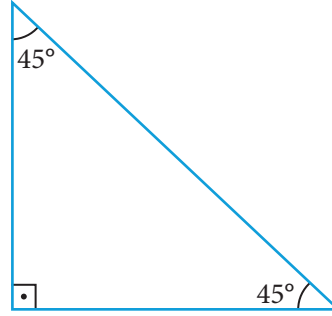
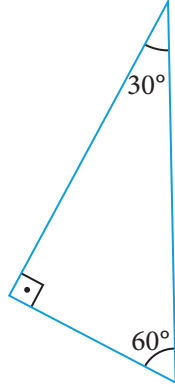
Pozitif / Pozitif	Azalan / Artan
Negatif / Pozitif	Azalan / Azalan
Negatif / Negatif	Artan / Azalan
Pozitif / Negatif	Artan / Artan

9. Uygulama

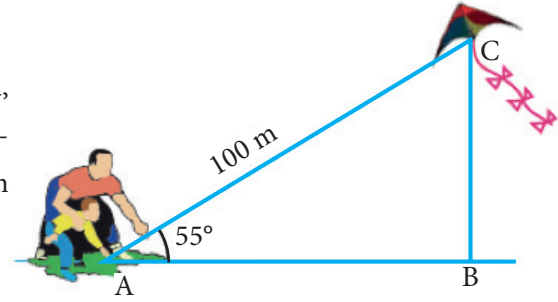
10. Uygulama

**Etkinlik Formu**

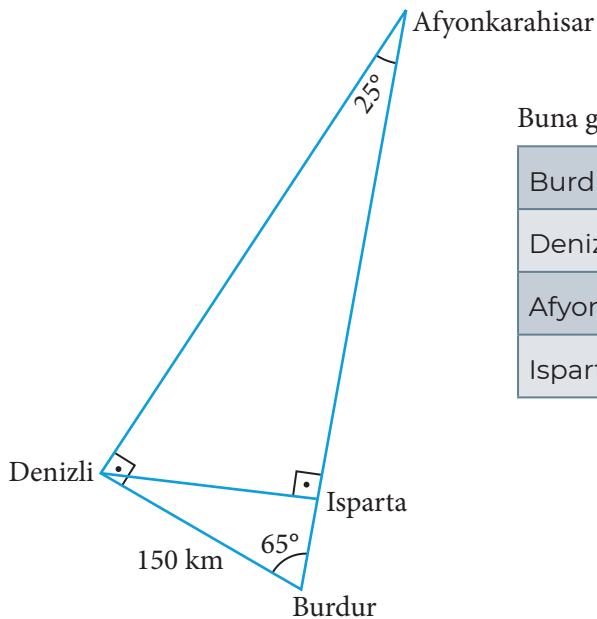
1. Aşağıdaki özel üçgenlerin dik olmayan açılarının trigonometrik oranlarını hesaplayınız.



2. Kaan ile babası uçurtma uçururlarken 100 m uzunluğundaki ipin tamamını bıraktıklarında, uçurtma ipinin zemin ile 55° lik açı yaptığını belirlemişlerdir. Buna göre uçurtma yerden kaç m yükseğe çıkmıştır?



3. Aşağıdaki şekilde bir haritada yer alan şehirlerin doğru parçaları ile birleştirilmiş hâli yer almaktadır.



Buna göre şehirler arasındaki mesafeleri belirleyiniz.

Burdur - Isparta	
Denizli - Isparta	
Afyonkarahisar - Denizli	
Isparta - Afyonkarahisar	

4. Aşağıdaki tablodaki boş alanları uygun şekilde doldurunuz.

Şekli	Sembol Gösterimi	Başlangıç Kenarı	Bitiş Kenarı	Yönü
	$\widehat{AOB}$	[OA	[OB	Negatif

5. Aşağıda birbirinden farklı ölçüler ile verilmiş açılar birbirine dönüştürün.

- Ölçüsü 180° olan açı kaç radyandır?
- Ölçüsü 240° olan açı kaç radyandır?
- Ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$ olan açı kaç derecedir?
- Ölçüsü $\frac{\pi}{6}$ olan açı kaç derecedir?



6. Derecenin alt birimlerine yönelik aşağıdaki soruları cevaplayınız.
- Bir A açısı $79^{\circ}49'15''$ ise A açısının üçte birinin değeri kaçtır?
 - $m(\widehat{A}) = 30^{\circ}12'10''$ ve $m(\widehat{B}) = 12^{\circ}32'45''$ olduğuna göre $m(\widehat{A}) - m(\widehat{B})$ açısı kaç derece, kaç dakika ve kaç saniyedir?
 - Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 46^{\circ}32'5''$, $m(\widehat{B}) = 42^{\circ}36'15''$ olduğuna göre C açısının ölçüsü kaç derece, kaç dakika ve kaç saniyedir?
7. Aşağıdaki trigonometrik ifadeler ile ilgili soruları çözünüz.
- $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$ olmak üzere $\sin x + \cos x$ ifadesinin eşiti nedir?
 - $\sin^6 x + \cos^6 x = B$ ise $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ ifadesinin B cinsinden eşiti nedir?
8. Dinamik matematik yazılımında birim çember çizin. Birim çember üzerinde sürgü yardımıyla bir α açısı belirleyin. Ve bu α açısının kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının koordinat sistemindeki bölgelerde pozitif, negatif, artan ve azalan olduklarını birim çember üzerindeki açı bitim noktasının koordinatları yardımıyla belirleyin.
- | Koordinat Sistemindeki Bölgeler | Pozitif / Negatif | | Pozitif / Negatif | |
|----------------------------------|-------------------|-------|-------------------|-------|
| | Kosinüs | Sinüs | Kosinüs | Sinüs |
| $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ | | | | |
| $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ | | | | |
| $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ | | | | |
| $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ | | | | |
9. Dinamik matematik yazılımı yardımıyla sinüs fonksiyonun grafiğini oluşturun.
10. Dinamik matematik yazılımı yardımıyla tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiğini oluşturun.

SONLU MATEMATİK

3. Ünite



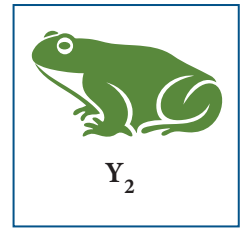
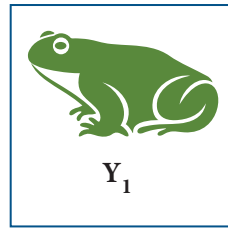
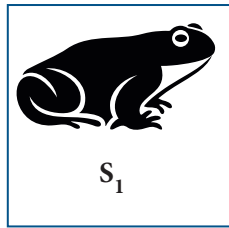
Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: SAYMA VE FAKTÖRİYEL
MODÜL/KONU	: Sonlu Matematik/Temel Sayma Yöntemleri
KAZANIMLAR	: Saymanın temel ilkelerini açıklar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu, farklı boyutlarda ızgaralar (1x7, 1x9 gibi farklı boyutlar elde edilebilecek şekilde uç uca eklenebilen ızgaralar), hamle nesneleri (2 farklı renkte taşlar)

Etkinliğin Amacı

Saymanın temel ilkeleri olan eşleştirme, toplama ve çarpma yolu ile saymaya ait çalışmalara yer verilir. Faktöriyel kavramı verilerek öğrencilerin saymanın temel ilkesi ile ilişki kurması hedeflenmektedir.

Başlarken...



Yukarıdaki şekilde 4 adet kurbağa bulunmaktadır. Sol tarafta bulunan kurbağalar ile sağ tarafta bulunan kurbağaları yer değiştirmeniz gerekmektedir. Hamle kuralları aşağıdaki gibidir;

1. Eğer önündeki kare boş ise önündeki kareye,
2. Eğer dolu ise ondan sonraki ilk kareye o karenin de boş olması koşuluyla hareket eder.
3. Kurbağayı başlangıçta bulunduğu noktaya yakınlaştıran hamlelere izin verilmemiştir.

Kurbağalar kaç hamlede aşağıdaki şekildeki duruma gelirler?





Yönlendirilmiş Hamleler Oyunu

Izgarada (1×5) karşılıklı duran yeşil ve siyah renkte ikişer kurbağanın belirtilen hamle koşullarına göre en az kaç hamlede yer değiştirebileceği denir ve denemeler sırasında hamle sayıları not edilir. Somut materyallerle ızgara üzerinde hamle kurallarına göre taşlar yönlendirilir, farklı yerleşimler sayılır ve denemeler yapılır.

Siyah kurbağanın ilk hamleyi yaptığı durumdaki hamleler ve toplam hamle sayısı aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	Kurbağaların Pozisyonları					Hamle Yapan Kurbağa	Renklere Göre Hamle Sayısı	Hamle Sayısı Toplamı
1						S_1	1	$\frac{2 \times 3}{2}$
2						Y_1	2	
3						Y_2		
4						S_1	2	2
5						S_2		
6						Y_1	2	$\frac{2 \times 3}{2}$
7						Y_2		
8						S_2	1	
							8	$2 \cdot \frac{2 \times 3}{2} + 2$



Tabloda gösterildiği gibi 4 kurbağa 8 hamlede yer değiştirmiştir. Tabloda aynı renkte kurbağaların art arda yaptıkları hamle sayıları incelendiğinde Gauss yöntemi ile toplam hamle sayısı 8 olarak hesaplanmıştır. Kurbağa atlatma oyununu yönlendirilmiş hamleler oyunu şeklinde taşlarla oynadığımızda da benzer durumlar görülmektedir.

Izgarada karşılıklı duran farklı renkte farklı sayılarda taşların hamle koşullarına göre en az kaç hamlede yer değiştirebileceği ile ilgili sorulara yer verilir. n tane yeşil ve n tane siyah kurbağa için hamle sayısının $n.(n + 1) + n$ olduğunu bulmaya yönelik çalışmalar yapılır. (Etkinlik Formu Soru 1-3)

Bu oyunda ızgara ve taş sayısı arttırılırsa sonucun hesaplanması denenerek bulunamayacak kadar çoktur. Bu gibi durumların hesaplanmasında saymanın temel ilkeleri olan eşleştirme, toplama ve çarpma yolu ile sayma kullanılır.

Saymanın Temel İlkeleri

Eşleştirme Yolu ile Sayma

$A = \{-154, -153, -152, \dots, -1, 0, 1, \dots, 132, 133, 134\}$ kümesinin eleman sayısını hesaplayınız. Tabloda belirtildiği gibi A kümesinin elemanlarının her birine 155 eklenildiğinde -154 'ten başlanarak sırasıyla her bir eleman ile 1, 2, 3, ..., 289 sayıları arasında eşleştirme yapılabildiği ve eşleştirme yoluyla bu kümenin eleman sayısının $134 + 155 = 289$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Tablo. Eşleştirme yoluyla sayma

A kümesinin elemanları	-154	-153	-152	...	-1	0	1	...	132	133	134
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	+155	+155	+155	...	+155	+155	+155	...	+155	+155	+155
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
A kümesinin eleman sayıları	1	2	3	...	154	155	156	...	287	288	289

$B = \left\{3\frac{2}{3}, 4\frac{1}{3}, 5, \dots, 26\frac{1}{3}, 27, 28\frac{2}{3}, 29\frac{1}{3}\right\}$ kümesinin eleman sayılarının kaç olduğu sorulur.

Kümenin elemanları $B = \left\{\frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \frac{15}{3}, \dots, \frac{79}{3}, \frac{81}{3}, \frac{83}{3}, \frac{85}{3}\right\}$ şeklinde yazılır. A kümesinin elemanlarının

payındaki sayılar olan 11,13,15,...,79,81,83,85 sayılarının sırasıyla 1, 2, 3, ..., 38 sayılarının 2 katının 9 fazlası olduğu ve bu şekilde yapılan eşleştirme yoluyla bu kümenin eleman sayısının 38 olduğu sonucuna ulaşılır.

Önceki etkinliklerden hatırlatma: Terim sayısı = $\frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Ortak fark}} + 1$ olduğundan

B kümesinin eleman sayısı = $\frac{85 - 11}{2} + 1 = 38$ olarak hesaplanabileceğini gösterir.

Toplama Yolu İle Sayma

TANIM

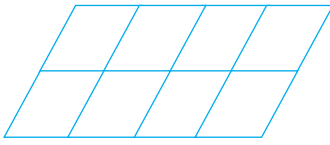
Ayrık ve sonlu n tane kümenin birleşimindeki eleman sayısı, bu kümelerin eleman sayılarının toplamına eşittir. O hâlde ayrık iki olaydan biri a farklı şekilde, diğeri b farklı şekilde gerçekleştirilebiliyor ise bu olaylardan biri veya diğeri $a + b$ farklı şekilde gerçekleştirilebilmektedir. A ve B sonlu ve ayrık iki küme olsun. Bu durumda $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olduğu açıktır.

Örnek

Gökyüzü gözlem kampındaki her katılımcının bir haftalık süreçte katıldığı etkinlik sayısı 1 ile 3 arasında değişmektedir. A_1, A_2 ve A_3 sırasıyla tam olarak 1, 2, 3 ve etkinliğe katılan katılımcıların kümesini ifade etmektedir. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ gözlem kampındaki tüm katılımcıların kümesini ifade etmektedir. A_1, A_2 ve A_3 kümeleri ayrık kümeler olduğu için,

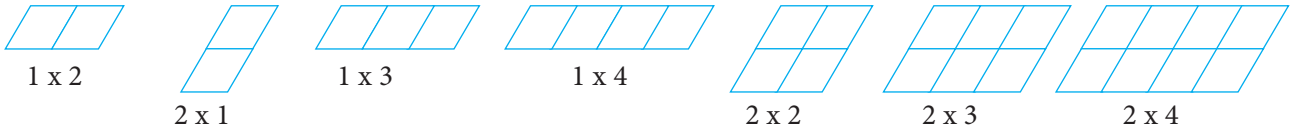
$$s(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = s(A_1) + s(A_2) + s(A_3) \text{ olur.}$$

Örnek



Yandaki şekil gösterildiği gibi birleştirilmiş 8 özdeş küçük paralelkenardan oluşmaktadır.

Sekiz küçük paralelkenar da dahil olmak üzere, bu şekilde kaç tane paralelkenar vardır? (CEMCGAUSS2018)



1x1	1x2	2x1	1x3	1x4	2x2	2x3	2x4
8	6	4	4	2	3	2	1

Tablo incelendiğinde paralelkenar sayısı $8 + 6 + 4 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1 = 30$ olarak hesaplanır.

**Etkinlik Formu Soru 4**

Sadece sağa ($\rightarrow$), sağ üst çapraz ($\nearrow$) ve sol üst çapraz ($\nwarrow$) gitmek koşuluyla A noktasındaki turistin kaç farklı şekilde sahile ulaşabileceğini hesaplayınız.

			1	→	SAHİL	DENİZ	
		1	3	→			
	1	2	6	→			
A		1	3	7			→
	1	2	6	→			
		1	3	→			
			1	→			

Turistin sahile çıkabileceği farklı yolların sayısı aşağıdaki şekil üzerinden $1 + 3 + 6 + 7 + 6 + 3 + 1 = 27$ olarak hesaplanabilir.

Çarpma Yolu ile Sayma**TANIM**

Bir A işi $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ aşamalarının sırasıyla uygulanmasından oluşmaktadır. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ aşamalarının gerçekleştirilebileceği yolların sayısı $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ şeklinde gösterilsin. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ aşamalarının her birinin gerçekleştirilebileceği yolların sayısı, kendinden önceki aşamalardan bağımsızdır. Bu durumda A işi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ farklı şekilde gerçekleştirilebilir. Matematiksel olarak A ve B sonlu iki küme ise $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ şeklinde ifade edebiliriz.



- a. Asya, Başak, Cemre, Doruk ve Ekin'in bulunduğu 5 kişilik grubun elemanları başkanlık, başkan yardımcılığı ve sekreterlik görevlerini kaç farklı şekilde paylaşabilirler?



Görev paylaşımının gerçekleştirilmesi,

1. Aşama	Başkanlık seçimi	Birinci aşama 5 farklı yolla gerçekleştirilebilir.
2. Aşama	Başkan yardımcısı seçimi	Kim başkan olursa olsun yardımcısının seçilmesi 4 farklı yoldan gerçekleştirilebilir.
3. Aşama	Sekreterlik seçimi	Son aşama da ilk ikisinden bağımsız şekilde 3 farklı yoldan gerçekleştirilir.

Buna göre sonuç $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olarak hesaplanır.

- b. Asya, Başak, Cemre, Doruk ve Ekin'in bulunduğu 5 kişilik grubun elemanları Asya başkan seçilmemek koşuluyla başkanlık, başkan yardımcılığı ve sekreterlik görevlerini kaç farklı şekilde paylaşabilirler?

Görev paylaşımının gerçekleştirilmesi,

1. Aşama	Başkanlık seçimi	Birinci aşamada Asya haricinde başkanlık seçimi 4 farklı yolla gerçekleştirilebilir.
2. Aşama	Başkan yardımcısı seçimi	Kim başkan olursa olsun yardımcısının seçilmesi de Asya eklendiği için 4 farklı yoldan gerçekleştirilebilir.
3. Aşama	Sekreterlik seçimi	Son aşama da ilk ikisinden bağımsız şekilde 3 farklı yoldan gerçekleştirilir.

Buna göre sonuç $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ olarak hesaplanır.



$A = \{a_1, a_2, a_3 \dots a_n\}$ olan kümenin tüm alt kümelerinin sayısını hesaplayınız.

$\forall a_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) elemanı için alt kümede bulunup bulunmayacağı n aşamada incelenir.

1. Aşama	a_1 'in alt kümede yer alıp almayacağına karar verilmesi	2 seçenek
2. Aşama	a_2 'nin alt kümede yer alıp almayacağına karar verilmesi	Önceki aşamadan bağımsız olarak 2 seçenek.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n . Aşama	a_n 'nin alt kümede yer alıp almayacağına karar verilmesi	Önceki aşamalardan bağımsız olarak 2 seçenek.



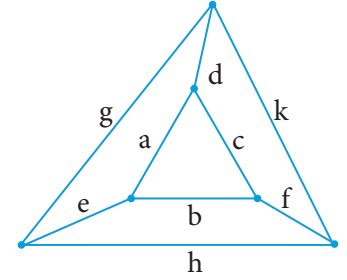
TANIM

Alt Küme Sayısı: Bu durumda n elemanlı A kümesinin tüm alt kümelerinin sayısı n tane 2 'nin çarpımı yani 2^n dir.

Etkinlik Formu Soru 5

Şekilde 9 doğru parçası, ortak bir köşeye sahip iki doğru parçası farklı renkte olacak şekilde, 3 renk kullanılarak boyanmak isteniliyor. Bu boyama kaç farklı şekilde yapılabileceği incelenir.

Boyamaya herhangi bir kenardan başlayabiliriz. Örneğin a kenarından başlarsak bu kenarı 3 renkten birisi ile boyayabiliriz. Daha sonra b kenarını boyayabileceğimiz 2 farklı renk seçeneğimiz kalır. Bunu dışındaki tüm kenarlar (c, d, e, f, g, h, k) a ve b kenarlarının rengine göre tek türlü boyanabilir. Bu sebeple boyama işlemi $3 \cdot 2 = 6$ farklı şekilde gerçekleştirilebilir



Örnek:

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} rakamları kullanılarak kaç tane

- Rakamları birbirinden farklı olan dört basamaklı çift sayı,
- Dört basamaklı 4 ile tam bölünebilen sayı,
- Rakamları birbirinden farklı 20 ile tam bölünebilen 5 basamaklı sayı yazılabileceği hesaplanır.

Çözüm

- a) Birler basamağının 0 olması ve olmaması durumları incelenir. Birler basamağındaki rakamın 0 olması durumu aşağıdaki tabloda incelenir.

Basamak	Binler	Yüzler	Onlar	Birler
Yazılabilecek farklı rakamların sayısı	6	5	4	1
Yazılabilecek rakamlar	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	"0" ile binler basamağına yazılan haricindeki 5'inden biri gelebilir.	"0" ile binler ve yüzler basamağına yazılanlar haricindeki 4'ünden biri gelebilir.	{0}

Basamak	Binler	Yüzler	Onlar	Birler
Yazılabilecek farklı rakamların sayısı	5	5	4	3
Yazılabilecek rakamlar	Birler basamağına "0" yazılamayacağından bu basamağa birler basamağına yazılan dışında 5 rakamdan biri gelebilir.	Binler ve birler basamağına yazılanlar haricinde 5'inden biri gelebilir.	Binler, yüzler ve birler basamağına yazılanlar haricinde 4'ünden biri gelebilir.	{2, 6}

Sonuç olarak

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ farklı sayı yazılabileceği hesaplanır.

Birler basamağındaki rakamın 0 olmaması durumu aşağıdaki tabloda incelenir ve $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ farklı sayı yazılabileceği hesaplanır.

Her iki durumda ulaşılan sayılar toplanarak $300 + 120 = 420$ cevabına ulaşılır.

- b) Birler basamağındaki rakam çift olmalıdır. Dört ile bölünen bir sayının birler basamağındaki rakam 2 veya 6 ise onlar basamağı tek, 0 veya 4 ise onlar basamağı çift rakam olmalıdır. Bu iki durum aşağıdaki tablolar üzerinden incelenir.

Basamak	Binler	Yüzler	Onlar	Birler
Yazılabilecek farklı rakamların sayısı	6	7	3	2
Yazılabilecek rakamlar	Binler basamağına "0" yazılamayacağından geriye kalanlar gelebilir.	Tüm rakamlar gelebilir.	{1, 3, 5}	{2, 4, 6}

Tablo incelendiğinde sonuç $6 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 = 252$ olarak hesaplanır.

Basamak	Binler	Yüzler	Onlar	Birler
Yazılabilecek farklı rakamların sayısı	6	7	4	2
Yazılabilecek rakamlar	Binler basamağına "0" yazılamayacağından geriye kalanlar gelebilir.	Tüm rakamlar gelebilir.	{0, 2, 4, 6}	{0, 4}

Tablo incelendiğinde sonuç $6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 = 336$ olarak hesaplanır. Her iki durumun toplamında

$336 + 252 = 588$ sayı yazılabilir.

- c) Yirmiye bölünen bir sayının birler basamağında "0" ve onlar basamağında ise çift rakam bulunur. Aşağıdaki tablo incelenerek sonuç $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 180$ olarak hesaplanır.



Basamak	Onbinler	Binler	Yüzler	Onlar	Birler
Yazılabilecek farklı rakamların sayısı	5	4	3	3	1
Yazılabilecek rakamlar	Birler ve onlar basamağındaki rakamlar haricinde geri kalan 5'i gelebilir.	Geri kalan 4'ü gelebilir.	Geri kalan 3'ü gelebilir.	{2,4,6}	{0}

Örnek

{0, 1, 2, 3, 4, 5} rakamlarını kullanarak 3 ile tam bölünebilen kaç tane dört basamaklı sayı yazılabileceği hesaplanır.

Basamak	Binler	Yüzler	Onlar	Birler
Yazılabilecek farklı rakamların sayısı	5	6	6	2
Yazılabilecek rakamlar	Binler basamağına "0" yazılamayacağından geriye kalanlar gelebilir.	Tüm rakamlar gelebilir.	Tüm rakamlar gelebilir.	Binler, yüzler ve onlar basamaklarına yazılan rakamlar toplamı X ve birler basamağındaki rakam a olursa $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a \in \{0, 3\} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a \in \{1, 4\} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow a \in \{2, 5\} \end{cases}$ her durumda a'nın yani birler basamağının alabileceği iki değer vardır.

İstenilen sonuç $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360$ olarak hesaplanır.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ kümesinde kaç tane simetrik ve ters simetrik bağıntı tanımlanabileceği hesaplanır.

Çözüm:

Simetrik bir bağıntıda sıralı ikili çiftlerinin (örneğin (5, 6) ve (6, 5) ya ikisinin birden bulunması ya da ikisinin birden bulunmaması gereklidir. (1, 1), (2, 2), (3, 3), ..., (n, n) ikililerinin her birisi için de benzer şekilde iki durum söz konusudur. Sıralı ikililerin simetrik bir bağıntıda bulunma durumu aşağıdaki tabloda incelenir.

Sıralı ikili	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	...	(n, n)	(1, 2) (2, 1)	(1, 3) (3, 1)	...	(n-1, n) (n, n-1)
Simetrik bağıntıda bulunma durumu	2	2	2	...	2	2	2	...	2

A kümesinde yazılabilecek tüm sıralı ikililerin sayısı n^2 dir. Bunların n tanesi $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (n, n)\}$ dışında kalan $n^2 - n$ tane ikiliden iki tanesi için tabloda bir hücre olduğundan

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Sonuç olarak n elemanlı bir A kümesinde $2 \cdot \frac{n^2 + n}{2}$ tane farklı simetrik bağıntı tanımlanabilir.

Ters simetrik bir bağıntıda ise sıralı ikili çiftleri (örneğin (5,6) ve (6,5)) için üç durum vardır (ikisinin birden bulunmaması, sadece birinin bulunması ve sadece diğerinin bulunması). (1, 1), (2, 2), (3, 3), ..., (n, n) ikililerinin her birisi için iki durum (bulunması ya da bulunmaması) söz konusudur. Sıralı ikililerin ters simetrik bir bağıntıda bulunma durumu aşağıdaki tabloda incelenir.

Sıralı ikili	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	...	(n, n)	(1, 2) (2, 1)	(1, 3) (3, 1)	...	(n-1, n) (n, n-1)
Ters simetrik bağıntıda bulunma durumu	2	2	2	...	2	3	3	...	3

Tabloda n tane 2 ve $\frac{n^2 - n}{2}$ tane 3 olduğu için istenilen cevap $2^n \cdot 3^{\frac{n^2 - n}{2}}$ olarak hesaplanır.

Saymanın temel ilkeleri ile ilgili sorulara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 6-9)

Faktöriyel Kavramı

n pozitif bir tam sayı ise, $n!$ (n faktöriyel) 1 ile n dahil 1'den n 'e kadar olan tam sayıların çarpımını ifade etmek için kullanılır.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1$$

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \times 1 \\ 3! &= 3 \times 2 \times 1 \\ 4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ 5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ 6! &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ 7! &= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ 8! &= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ 9! &= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ 10! &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$



Her hangi n pozitif tam sayısı için ardışık n tane bileşik sayı $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + n + 1$ olarak yazılabilir. Hiçbiri asal olmayan ardışık 1000 sayı $1001! + 2, 1001! + 3, 1001! + 4, \dots, 1001! + 1001$ olarak yazılır.

$n!$ 'de bir p asal çarpanının kaç tane olduğunu bulunabilmesi için nasıl işlem yapılması gerektiği tartışılır. n sayısının p ile bölünüp çıkan bölüm yine p sayısı ile bölündüğü ve bu işleme p 'den küçük bölüm bulununcaya kadar devam edildiği bulunur. Elde edilen tüm bölümlerin toplanması gerektiğine ulaşılır.

Bir n sayısının sonundaki 0 sayısının, $n - 1$ sayısının sonundaki 9 sayısına eşittir. Ardışık n tane tam sayının çarpımı $n!$ ile tam bölünür.

Faktöriyel kavramı ile ilgili çalışmalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 10)

(1-1 ve Örten Fonksiyonların Sayısı) $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, n elemanlı Y kümesine tanımlı 1-1 ve örten herhangi bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun kaç farklı şekilde tanımlanabileceği sorulur. Bu sorunun çözümünde aşağıdaki tablo yardımıyla faktöriyel kavramı ilişkilendirilme yapılması sağlanır.

$f(x_n)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$
$f(x_n)$ 'in alabileceği farklı değerlerin sayısı	n	$n - 1$	$n - 2$	...	1

Her adımında $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ değerlerinin sırayla $n, n - 1, n - 2, \dots, 1$ farklı şekilde belirlenebileceği açıklanır. Tüm fonksiyonların sayısı $n!$ olarak hesaplanır.

Örnek:

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 99 \cdot 99!$ toplamının 97 ile bölümünden elde edilen kalan hesaplanır.

Çözüm:

$k \cdot k! = (k + 1 - 1) \cdot k! = (k + 1) \cdot k! - k! = (k + 1)! - k!$ olarak ifade edilebileceği için

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 1! = 2! - 1! \\ 2 \cdot 2! = 3! - 2! \\ 3 \cdot 3! = 4! - 3! \\ \dots \\ 99 \cdot 99! = 100! - 99! \end{array} \right.$$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 99 \cdot 99! = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + 100! - 99! = 100! - 1$$

$100! - 1$ ifadesinde $100!$ sayısı zaten 97'ye tam olarak bölündüğü için kalan 96 olarak hesaplanır.

Örnek:

$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!}$ toplamının eşiti hesaplanır.

Çözüm:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \\ \frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \\ \frac{3}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \Rightarrow \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!} = 1 - \frac{1}{100!} \text{ olarak hesaplanır.} \\ \dots \\ \frac{99}{100!} = \frac{1}{99!} - \frac{1}{100!} \end{array} \right.$$

Örnek

$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 40!$ çarpımından en az kaç adet çarpan atılırsa bir tamkare ifade elde edilebileceği hesaplanır.

Çözüm

İfadede yer alan bazı çarpanlar aşağıdaki şekilde ifade edilerek yerine yazılır.

$$2! = 2 \cdot 1!$$

$$4! = 4 \cdot 3!$$

$$6! = 6 \cdot 5!$$

...

$$40! = 40 \cdot 39!$$

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 40! = 1! \cdot (2 \cdot 1!) \cdot 3! \cdot (4 \cdot 3!) \cdot 5! \cdot (6 \cdot 5!) \cdot \dots \cdot 39! \cdot (40 \cdot 39!) = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 39!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 40 = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 39!)^2 \cdot 2^{20} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 20) = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 39!)^2 \cdot 2^{20} \cdot 20! \text{ olarak hesaplanır.}$$

Çarpımdan sadece $20!$ çarpanı atılırsa çarpım bir tamkare olur.

Örnek:

x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere, $51 \cdot 52 \cdot 53 \dots 100 = 7^x \cdot y$ eşitliğini sağlayan en büyük x hesaplanır.

Çözüm:

$100!$ sayısı içinde kaç tane 7 çarpanı olduğu, $\frac{100}{7}$ kesrinin tam kısmı olan 14 ile $\frac{100}{49}$ kesrinin tam kısmı olan 2 toplanarak bulunur. ($14 + 2 = 16$)

$50!$ sayısı içinde kaç tane 7 çarpanı olduğu, $\frac{50}{7}$ kesrinin tam kısmı olan 7 ile $\frac{50}{49}$ kesrinin tam kısmı olan 1 toplanarak bulunur. ($7 + 1 = 8$)

Bu durumda en büyük x değeri $16 - 8 = 8$ olarak hesaplanır.



Faktöriyel kavramı ile ilgili sorulara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 11-14)



5! ifadesinin değerini blok ya da metin tabanlı kodlama programı kullanarak hesaplayınız.

```
def faktoriyel (sayı):
```

```
    ilksayı = sayı
```

```
    faktoriyel = 1
```

```
    if (sayı == 0 or sayı == 1):
```

```
        print("Faktoriyel",faktoriyel)
```

```
    else:
```

```
        while (sayı >= 1):
```

```
            faktoriyel *= sayı
```

```
            sayı -=1
```

```
        print("{} Faktoriyel= {}".format(ilksayı, faktoriyel))
```

```
faktoriyel(5)
```

Program Çıktısı

5 Faktoriyel= 120

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- İçerme dışarma prensibi: Sonlu sayıda elemana sahip A ve B kümelerinin birleşimindeki eleman sayılarının şeklinde hesaplanabileceği tartışılır. Üç tane küme olduğunda bu ilişkinin şeklinde olduğu konuşulur. Kümelerin sayısı arttıkça nasıl ifade edilebileceği, n tane kümenin birleşimindeki eleman sayısının nasıl hesaplanabileceği tartışılır.
- 500'den küçük kaç tane tam sayı, iki farklı pozitif tam küp sayının toplamı olarak yazılabilir sorusu sorularak cevabının araştırılması istenilir.
- Yönlendirilmiş hamleler oyununda ızgara üzerinde yer değişimlerde gereklilik karesi sayısı, ızgarada bulunan kol sayısı (ızgara biçimi), kollarda bulunan taş sayısı değişkenlerini değiştirerek oluşan durumlarda en az hamle sayısı hesaplanır. Genelleştirilmiş çözüme ulaşmaya yönelik çalışmalar yapılır.

KAYNAKLAR

- Doğanaksoy A., Sulak, F. & Uğuz, M. (2009). *Yarışmalara Hazırlananlar İçin Çözümlü Matematik Problemleri*, Oyak (OYAK Liselerarası Matematik Yarışması).
- Nash, J. (1956). *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds*. Mathematics Department, Princeton University.
- Nesin, A. (2016). *Matematik ve Oyun*. Nesin Yayınevi, İstanbul.
- Nesin, A. (2019). *Sayma-Kombinasyon Hesapları*. Nesin Yayıncılık.
- On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, 25 Nisan 2021 tarihinde <https://oeis.org/> adresinden alındı.
- Singh, S. (2016). *Simpsonlar ve Matematiksel Gizemleri*, Sibel Özkan (çev.), İstanbul: Kassandra Yayınları.
- TÜBİTAK BİDEB (Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı) 2204-A Kodlu Programı, 2204-A 52. Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Bölge Yarışması (proje ismi: Miniyol) Proje Danışmanı: Gülnur Özbek, Öğrenciler: Demir Selçuk Sakmak ve Ayşe Nur Özkan.
- TÜBİTAK BİDEB (Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı) 2204-B Kodlu Programı, Ortaokul Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması (2017, başvuru numarası: 1689B011719949, proje ismi: Matematik Bilen Kurbağalar, Üçüncülük Derecesi), Proje Danışmanı: Gülnur Özbek, Öğrenciler: Süleyman Baha Dikici, Miraç Başakın.
- Uğurel, I. & Moralı, S. (2008). Matematik ve Oyun Etkileşimi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(3), 75-98.
- Umay, A. (2002). Öteki Matematik. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, Sayı: 23, 275-281.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlik Formu Cevapları

1. 15

2. 24

3. 35

4. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

5. Etkinlik içerisinde verilmiştir.

6. 50

7. 60

8. 90

9. 42

10. a. 318

b. 478

c. 478

d. 1

11. 4

12. E)

$$20! = 19! \cdot 20$$

$$20! \cdot 19! = (19! \cdot 20)(19!) = ((19!)^2) \cdot 20$$

13. A) $2007! - 1$

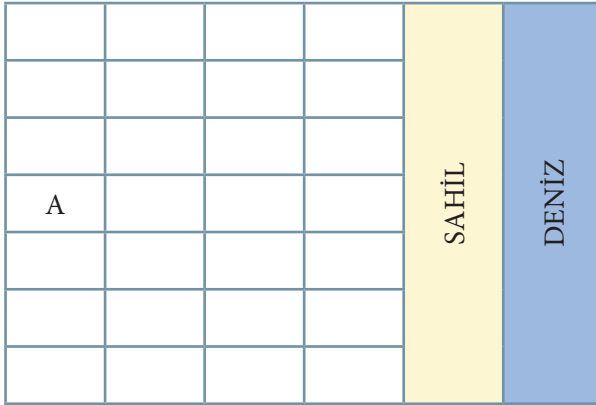
14. C) 30

Etkinlik Formu

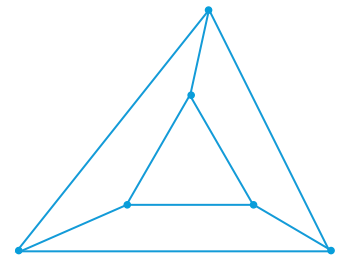
1. Yönlendirilmiş hamleler oyunundan hareketle ızgarada (1×7) karşılıklı duran farklı renkte beşer taşın eğer önündeki kare boş ise önündeki kareye, eğer dolu ise boş olması koşuluyla ondan sonraki ilk kareye hareket ederek karşılıklı yer değişiminin en az kaç hamlede gerçekleştirilebileceğini bulunuz.



2. Yönlendirilmiş hamleler oyunundan hareketle ızgarada (1×9) karşılıklı duran farklı renkte beşer taşın eğer önündeki kare boş ise önündeki kareye, eğer dolu ise boş olması koşuluyla ondan sonraki ilk kareye hareket ederek karşılıklı yer değişiminin en az kaç hamlede gerçekleştirilebileceğini bulunuz.
3. Yönlendirilmiş hamleler oyunundan hareketle ızgarada (1×11) karşılıklı duran farklı renkte altışar taşın eğer önündeki kare boş ise önündeki kareye, eğer dolu ise boş olması koşuluyla ondan sonraki ilk kareye hareket ederek karşılıklı yer değişiminin en az kaç hamlede gerçekleştirilebileceğini bulunuz.
4. Sadece sağa ($\rightarrow$), sağ üst çapraz ($\nearrow$) ve sağ alt çapraz ($\searrow$) gitmek koşuluyla A noktasındaki turist kaç farklı şekilde sahile ulaşabileceği hesaplayınız.



5. Şekilde 9 doğru parçası, ortak bir köşeye sahip iki doğru parçası farklı renkte olacak şekilde, 3 renk kullanılarak boyanmak isteniyor. Bu boyama kaç farklı şekilde yapılabilir?





6. Soldan ilk rakamı çift olan 3 basamaklı sayılardan kaç tanesinin rakamları soldan sağa doğru azalan sıradadır? (Örneğin 421, 873 gibi)
7. Beş kişinin yarıştığı bir turnuvada birincilik, ikincilik ve üçüncülük ödülleri kaç şekilde verilebilir?
8. İleri veya geri okunduğunda basamakları aynı olan pozitif bir tam sayıya palindrom denir. Örneğin 474 ve 222 palindrom sayılardır. 100 ile 1000 arasında kaç tane palindrom sayı var?
9. Rakamları farklı ve rakamlar toplamı 20'den büyük olan üç basamaklı kaç tane doğal sayı vardır?
10. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.
- a. $1923!$ sayısının içinde kaç tane 7 çarpanı vardır?
- b. $1923!$ sayısının sonunda kaç tane 0 vardır?
- c. $1923! - 1$ sayısının sonunda kaç tane 9 vardır?
- d. $1923! - 2$ sayısının sonunda kaç tane 8 vardır?
11. $4! + 5! + 6! + \dots + 20!$ İşleminin sonucunda oluşan sayının birler basamağı kaçtır?
12. Aşağıdakilerden hangisi bir tamkareye eşittir?
- A) $\frac{(20!)(19!)}{1}$ B) $\frac{(20!)(19!)}{2}$ C) $\frac{(20!)(19!)}{3}$ D) $\frac{(20!)(19!)}{4}$ E) $\frac{(20!)(19!)}{5}$
13. $S = 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + 2006 \cdot (2006!)$ sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- a. $2007! - 1$
- b. $2007! + 1$
- c. $2008! - 1$
- d. $2006 \cdot (2007!)$
- e. $2006 \cdot 2007 \cdot (2007!) + 1$
14. $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot 400 = 11^k \cdot n$; (k, n doğal sayı) eşitliğini sağlayan en büyük k sayısı kaçtır?
- a. 26 b. 29 c. 30 d. 31 e. 32



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK	: PERMÜTASYON
MODÜL/KONU	: Sonlu Matematik/Temel Sayma Yöntemleri
KAZANIMLAR	: Permütasyon kavramını açıklar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu, farklı boyutlarda ızgaralar (1x6, 1x8 gibi boyutlar elde edilebilecek şekilde uç uca eklenebilen ızgaralar), hamle nesneleri (3 farklı renkte pul)

Etkinliğin Amacı

n çeşit nesne ile oluşturulabilecek r'li dizilişlerin (permütasyonların) kaç farklı şekilde hesaplanabileceği ile ilgili çalışmalardan yola çıkarak permütasyon kavramını açıklaması hedeflenmektedir.

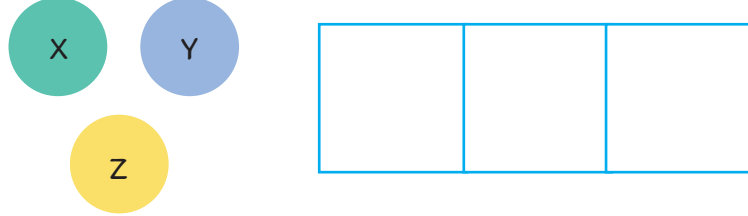
Başlarken...

Permütasyon kelimesi Fransızca "karşılıklı ya da sıralı olarak yer değiştirme, matematikte bir kavram" sözcüğünden gelmektedir. Günlük hayatımızda çeşitli iş kollarında "sayma ve sıralama" hesaplamalarında sayma kuralları kullanılır. Bir kuyrukta sıramızın kaç farklı şekilde olacağı bile bu kurallar ile bulunabilir. Biyologlar insan vücudunda bulunan 33 omurdan herhangi ikisi art arda gelmeyen 4 omurda türeyebilen virüs türüne rastlamıştır. Bu virüs 4 omura belirtilen şekilde yerleştiğinde omuriliğe zarar verebilmektedir. Kromozom permütasyonu cinsiyet hücrelerinin oluşumu sırasında kromozomların oluşan hücreler arasında rastgele dağıtılması şeklinde açıklanabilir. Çeşitli bilim alanları gizil olarak da olsa bu kurallardan faydalananak problemlerine çözümler üretilebilir.



**Örnek: Pul Yerleştirme Oyunu-1****Etkinlik Formu Soru 1**

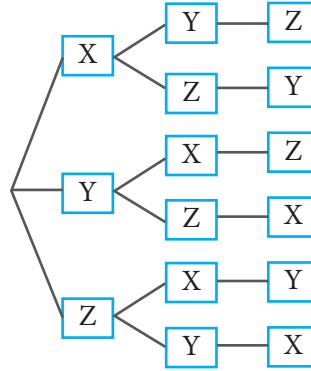
Aşağıdaki şekilde gösterilen 1x3'lük bir ızgara üzerine 3 pulun kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.



Eğer 3 pul başlangıçta ızgara üzerinde sırasıyla X, Y, Z şeklinde dizili ise hiçbirinin kendi yerinde olmadığı 3'lü dizilişlerin sayısını hesaplayınız.

Çözüm:

X, Y, Z pullarının aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi 3'lü dizilişleri olan 6 farklı (XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX) diziliş oluşturulur.



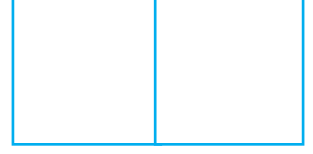
Deneme yapmadan ve tüm dizilişleri yukarıdaki şekilde verildiği gibi yazmadan bu sonuç aşamalı olarak hesaplanır. Aşağıdaki tablo çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak oluşturulur ve üç pulun 3'lü dizilişi $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ olarak hesaplanır.

Izgara kareleri	1.	2.	3.
Yerleşebilecek pul sayısı	3 puldan hangi biri yerleşebilir.	Kalan 2'sinden biri yerleşebilir.	Kalan biri yerleşebilir.

Örnek: Pul Yerleştirme Oyunu-2

Etkinlik Formu Soru 2

Yandaki şekilde gösterilen 1×2 'lük bir ızgara üzerine 3 pulun kaç farklı şekilde yerleştirilebileceğini sayınız.



Çözüm:

X, Y, Z pullarının 2'li dizilişlerinin YZ, ZY, XY, YX, ZX, XZ şeklinde olduğu belirlenir. Tüm dizilişleri yazmadan bu sonuç aşamalı olarak hesaplanır. Aşağıdaki tablo çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak oluşturulur ve üç pulun 2'li dizilişi $3 \cdot 2 = 6$ olarak hesaplanır.

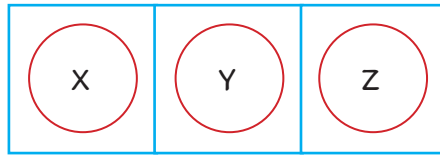
Izgara kareleri	1.	2.
Yerleşebilecek pul sayısı	3 puldan hangi biri yerleşebilir.	Kalan 2'sinden biri yerleşebilir.

m tane pulun $1 \times n$ ızgaraya ($m \geq n$) kaç farklı şekilde dizilebileceği m'in n'li dizilişini verir.

Örnek: Pul Yerleştirme Oyunu-3

Etkinlik Formu Soru 3

Eğer 3 pul başlangıçta aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ızgara üzerinde sırasıyla X, Y, Z şeklinde dizili ise hiçbirinin kendi yerinde olmadığı 3'lü 2 farklı (YZX, XZY) diziliş oluşturulur.



Çözüm:

Deneme yapmadan bu dizilişlerin sayısı aşamalı olarak hesaplanır. Aşağıdaki tablo çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak oluşturulur ve sonuç $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ olarak hesaplanır.

Izgara kareleri	1.	2.	3.
Yerleşebilecek pul sayısı	X pulu dışında herhangi biri yerleşebilir.	Sadece biri yerleşebilir.	Sadece biri yerleşebilir.



Pul yerleşim durumları ile ilgili çeşitli örneklere yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 4, 5)

Pulların kendi yerinde (ızgarada başlangıçtaki yerinde) olmayacak şekilde kaç farklı şekilde dizilebileceği gibi durumların hesaplanmasında şaşkın dizilişlere ileri araştırma konusu olarak yer verilir.

Örnek: Permütasyon Kavramı

Etkinlik Formu Soru 6

$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak ve olacak $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r \in A$ ve $r \leq n$ olacak şekilde $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ sıralı r 'lilerinin kaç farklı şekilde oluşturulduğu hesaplanır.

Çözüm:

Tablo çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak doldurulur.

Sıralı r 'liler	a_1	a_2	a_3	...	a_r
Alabileceği farklı değerlerin sayısı	n	$n-1$	$n-2$	...	$n-r+1$

a_1 'in alabileceği n farklı değer, a_2 'nin alabileceği $n-1$ farklı değer, a_3 'ün alabileceği $n-2$ farklı değer, ..., a_r 'nin alabileceği $n-r+1$ farklı değer vardır. Çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak sonuç

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ olarak hesaplanır.}$$

TANIM

n nesnenin r 'li bir permütasyonunu (dizilişini) oluşturmak, bu nesnelerin r tanesini sıralı r konuma yerleştirmekle eşdeğerdir. Bu permütasyonların (dizilişlerin) sayısı $P(n, r)$ veya P_r^n şeklinde gösterilir ve n elemanlı bu kümenin r 'li bir permütasyonu olarak ifade edilir. Birinci konuma n nesneden herhangi birisi yerleştirilebilir; ikinci konum için $n-1$ seçeneğimiz vardır, bu şekilde devam ettiğimizde r 'inci konum için $n-r+1$ farklı seçenek kalır. Çarpma prensibi kullanılarak

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \text{ bulunur.}$$

$r = n$ durumunda $P(n, n) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ bulunur. n nesnenin permütasyonlarının sayısına eşit olan 1 den n 'e kadar pozitif sayıların çarpımına, n faktöriyel denir ve bu sayı $n!$ şeklinde gösterilir. Pozitif tam sayılar için tanımlı olan faktöriyel, işlem ve ifadelerde kolaylık sağlaması bakımından 0 sayısı için ayrıca $0! = 1$ olarak tanımlanmıştır. Faktöriyel gösterimini kullanarak $(0 \leq r \leq n)$ tam sayıları için $P(n, r)$ 'nin nasıl ifade edilebileceği açıklanır. Bu ifade

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ olarak yazılır.}$$

Örnek:

Öğrenciler sosyal medya gruplarında maskeli dört karakteri birbirlerine tüm farklı dizilimleriyle göndermek istemişlerdir. Zeynep eğer alfabetik sırada yaparlarsa kendisi son kişi olduğu için farklı bir dizilim yapamayacağını söylemiştir. Sizce sınıfta kaç kişi vardır?

Çözüm:

$P(4, 4) = 24$ farklı dizilim olduğundan Zeynep 25. sıradadır.

**Pozitif Tam Bölenlerinin Sayısı**

4500 sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı kaçtır? Herhangi bir doğal sayının pozitif tam bölenlerinin sayısını nasıl buluruz?

Çözüm:

$$2250 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

4500 sayısının çarpanları (bölenleri);

$\{2^0, 2^1, 3^0, 3^1, 5^0, 5^1, 5^2, 5^3\}$ sayıları ve bu sayıların birbiri ile çarpımından oluşan sayılardır.

2 tane 2'nin kuvvetleri, 3 tane 3'ün kuvvetleri, 4 tane 5'in kuvvetleri olduğundan;

2250 sayısının $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ tane pozitif tam böleni vardır.

Verilen doğal sayı $A = p^x \cdot q^y \cdot r^z \dots$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılırsa bu sayının Pozitif Tam Bölenlerinin Sayısı $x, y, z, \dots$ cinsinden nasıl hesaplanır?

Verilen doğal sayı $A = p^x \cdot q^y \cdot r^z \dots$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılırsa

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r \in A$ ve olacak şekilde $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ sıralı r lilerinin kaçında 1, 2, 3 ve 4'ün herhangi üçünün arka arkaya bulunmadığını hesaplayınız.

**Çözüm:**

$n!$ permütasyondan 1, 2, 3 ve 4'ten üçünün bir arada, geriye kalan elemanın da ayrı sayıldığı durumlar çıkarılmalıdır. 1, 2, 3 ve 4'ten bir tanesini 4 farklı şekilde seçebiliriz. Kalan 3 sayı $3! = 6$ farklı şekilde dizilebilir. Bu şekilde her durum $(n - 2)!$ permütasyon içermektedir. O hâlde 1, 2, 3 ve 4'ten üçünün bir arada, geriye kalan elemanın da ayrı sayıldığı 24 $(n - 2)!$ durum olduğu hesaplanır. Bu çıkarma işleminde 1, 2, 3 ve 4'ün blok hâlinde oldukları iki kere çıkarılmış olduğundan istenilen sonuç $n! - 24(n - 2) + 24(n - 3)!$ olarak hesaplanır.

Etkinlik Formu Soru 8

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin dörtlü permütasyonlarının kaçında 5 elemanı bulunur?

Sıralı 4'lüler	a_1	a_2	a_3	a_4
Alabileceği farklı değerlerin sayısı				

Çözüm:

5 elemanı mutlaka bulunacağı için yukarıda belirtilen 4 farklı yerden birine yazılabilir. Bu 4 yerden herhangi birisine yazıldığında geriye üç boş yer ve beş eleman kalır. Bu üç yer $P(5, 3) = 60$ farklı şekilde doldurulabileceğinden istenilen sonuç $4 \cdot 60 = 240$ olarak hesaplanır.

Bu soruda istenilen sonuç tüm dörtlü permütasyonların sayısından içerisinde 5 bulunmayan dörtlü permütasyonların sayısı çıkarılarak da hesaplanabilir. Dörtlü permütasyonların sayısı $P(6, 4) = \frac{6!}{2!} = 360$ şeklinde hesaplanır. İçinde 5 elemanı bulunmayan dörtlü permütasyon sayısı kümeden 5 elemanın atılması durumunda geriye kalan 5 eleman ile yazılabilecek dörtlü permütasyonların sayısına eşittir. Bu durum $P(5, 4) = 120$ olarak hesaplanabilir. İstenilen sonuç $360 - 120 = 240$ olarak hesaplanır.

Etkinlik Formu Soru 9**Fonksiyonların Sayısı**

$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, m elemanlı Y kümesine tanımlı herhangi bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun kaç farklı şekilde tanımlanabileceği hesaplanır. Her adımında $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ değerlerinin sırayla m farklı şekilde belirlenebileceği tablo yardımı ile belirlenir. Tüm fonksiyonların sayısı m^n olarak hesaplanır.

$f(x_n)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$
$f(x_n)$ 'in alabileceği farklı değerlerin sayısı	m	m	m	...	m

Etkinlik Formu Soru 10

$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, m elemanlı Y kümeleri ($n \leq m$) verildiğinde, 1-1 bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun tanınması, her adımda sırasıyla $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ değerlerinden birisinin tayin edildiği bir işlem olarak düşünülebilir.

$f(x_n)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$
$f(x_n)$'in alabileceği farklı değerlerin sayısı	m	$m - 1$	$m - 2$	...	$m - n + 1$

İlk adım için m , ikinci adım için $m - 1$ şeklinde devam edildiğinde son adım için $m - n + 1$ farklı yol bulunmaktadır. Çarpma ilkesi kullanılarak, 1 - 1 fonksiyonların sayısının **P (m, n)** olduğu görülür.

Permütasyon kavramı ile ilgili ek sorulara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 11, 12)



4'ün 2'li permütasyonlarını blok ya da metin tabanlı kodlama programı kullanarak bulunuz.

```
import itertools
```

```
liste=list(itertools.permutations([1, 2, 3, 4], 2))
```

```
print("4'ün 2'li permütasyonları {}".format(liste))
```

Program Çıktısı

4'ün 2'li permütasyonları [(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)]



EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- **Şaşkın dizilişlerin (Derangement) sayısı:** $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin bir $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ permütasyonunda her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\sigma_i \neq i$ ise, bu permütasyona şaşkın diziliş denir. Bu şaşkın dizilişlerin sayısı D_n olarak ifade edilirse nasıl hesaplanabileceği sorulur ve araştırılması sağlanır. Şaşkın diziliş farklı durumların çözümünde model olarak karşımıza çıkar.
- **0/1 Dizileri:** Farklı durumların çözümünde her terimi 0 ya da 1 olan diziler model olarak kullanılabilir. m tane 1 ve n tane 0 sembolü kullanılarak oluşturulan dizilerle ilgili araştırma yapınız. Tekrarlı permütasyona örnek olarak 0/1 dizilerinin sayısının nasıl hesaplanabileceğine ilişkin çıkarımlarda bulununuz.

KAYNAKLAR

- Alizade, R. & Ufuktepe, Ü. (2014). *Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri*, Altın Nokta Yayınevleri.
- Doğanaksoy A., Sulak, F. & Uğuz, M. (2009). *Yarışmalara Hazırlananlar İçin Çözümlü Matematik Problemleri*, Oyak (OYAK Liselerarası Matematik Yarışması).
- Nesin, A. (2016). *Matematik ve Oyun*. Nesin Yayınevi, İstanbul.
- Nesin, A. (2019). *Sayma-Kombinasyon Hesapları*. Nesin Yayıncılık.
- Öztürk, F. (1995). *Kombinatorik (Sayma Problemleri)*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.
- TÜBİTAK BİDEB (Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı) 2018 yılı 2204-A Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması (Proje İsmi: Hamle Kuralları ve Sayıları ile Kombinatorik, Öğrenciler: Baturalp Taha Yılmaz ve Emre Akdoğan, Proje Danışmanı: Gülnur Özbek).
- Uğurel, I. & Moralı, S. (2008). Matematik ve Oyun Etkileşimi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(3), 75-98.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

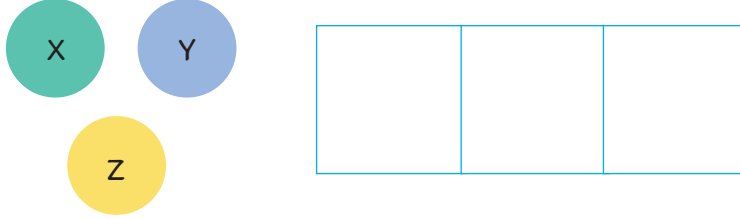
Etkinlik Formu Cevapları

1. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
2. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
3. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
4. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
5. $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$
6. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
7. a. İ b. 35
8. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
9. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
10. Etkinlik içerisinde verilmiştir.
11. $P(10, 10) = 10! = 3628800$ farklı kelime (anamlı veya anlamsız) yazılabileceği hesaplanır.
12. Ege isimli gözlemci için 2 farklı seçenek vardır. Ege ya başa ya da sona yerleştikten sonra sırada 5 farklı yer ve 7 gözlemci kalır. Bu durumda istenilen cevap $2 \cdot P(7,5) = 2 \cdot \frac{7!}{2!} = 7!$ olarak hesaplanır.



Etkinlik Formu

1. (Pul yerleştirme oyunu) Şekilde gösterilen 1×3 'lük bir ızgara üzerine 3 pulun kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloyu çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanarak doldurunuz.

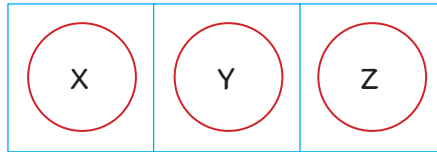


Izgara kareleri	1.	2.	3.
Yerleşebilecek pul sayısı			

2. (Pul yerleştirme oyunu) 1×2 'lik bir ızgara üzerine 3 pulun kaç farklı şekilde yerleştirilebileceğini sayınız. Sonucu hesaplamak için tabloyu çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanarak doldurunuz.

Izgara kareleri	1.	2.
Yerleşebilecek pul sayısı		

3. (Pul yerleştirme oyunu) 3 pul başlangıçta aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ızgara üzerinde sırasıyla X, Y, Z şeklinde dizili ise hiçbirinin kendi yerinde olmadığı 3'lü dizilişlerin sayısını hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloyu çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanarak doldurunuz.



Izgara kareleri	1.	2.	3.
Yerleşebilecek pul sayısı			

4. (Pul yerleştirme oyunu) 1×4 'lük bir ızgara üzerindeki 4 pulun kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloyu çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanılarak doldurunuz.

Izgara kareleri	1.	2.	3.	4.
Yerleşebilecek pul sayısı				

5. (Pul yerleştirme oyunu) 1×4 'lük bir ızgara üzerindeki 4 pulun hiçbir pulun kendi yerinde (ızgara-da başlangıçtaki yerinde) olmayacak şekilde kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloyu çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanılarak doldurunuz.

Izgara kareleri	1.	2.	3.	4.
Yerleşebilecek pul sayısı				

6. $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r \in A$ ve $r \leq n$ olacak şekilde $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ sıralı r 'lilerinin kaç farklı şekilde oluşturduğunu hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloyu çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanarak doldurunuz ve sonucu hesaplayınız.

Sıralı r 'liler	a_1	a_2	a_3	...	a_r
Alabileceği farklı değerlerin sayısı					

7. B, İ, L, S, E, M harflerinin 6'lı permütasyonlarından oluşan kelimeler alfabetik sıraya göre diziliyor.

B İ L S E M

- a. 100. kelimenin son harfi nedir?
- b. BİLSEM kelimesi kaçınıcı sırada bulunur?



8. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin dörtlü permütasyonlarının kaçında 5 elemanı bulunduğunu aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurarak hesaplayınız.

Sıralı 4'lüler	a_1	a_2	a_3	a_4
Alabileceği farklı değerlerin sayısı				

9. **(Fonksiyonların Sayısı)** $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, m elemanlı Y kümesine tanımlı herhangi bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun kaç farklı şekilde tanımlanabileceğini hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloyu çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanılarak doldurunuz ve sonucu hesaplayınız.

$f(x_n)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$
$f(x_n)$ 'in alabileceği farklı değerlerin sayısı				...	

10. **(1-1 Fonksiyonların Sayısı)** $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X ve m elemanlı Y kümeleri ($n \leq m$) verildiğinde, 1-1 bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun tanımlanması, her adımında sırayla $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ değerlerinden birisinin tayin edildiği bir işlem olarak düşünülebilir. Bu fonksiyon kaç farklı şekilde tanımlanabileceğini aşağıdaki tablo yardımıyla hesaplayınız.

$f(x_n)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$
$f(x_n)$ 'in alabileceği farklı değerlerin sayısı	m	$m - 1$	$m - 2$	...	$m - n + 1$

11. PERMÜTASYON kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek kaç farklı kelime (anlamli veya anlamsız) yazılabilir?

12. 3 kadın 5 erkek gözlemciden oluşan bir grup gözlem yapmak için teleskop sırasına Efe isimli erkek gözlemcinin ya başta ya da sonda olması şartıyla kaç farklı şekilde dizilebilirler?





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: TEKRARLI VE DÖNEL PERMÜTASYON
MODÜL/KONU	: Sonlu Matematik/Temel Sayma Yöntemleri
KAZANIMLAR	: 1. Tekrarlı permütasyon kavramı ile ilgili uygulamalar yapar. 2. Dönel permütasyon kavramı ile ilgili uygulamalar yapar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu, farklı boyutlarda ızgaralar (1x6, 1x8 gibi farklı boyutlar elde edilebilecek şekilde uç uca eklenebilen ızgaralar), hamle nesneleri (farklı renklerde pullar)

Etkinliğin Amacı

Tekrarlı ve dönel permütasyon kavramlarının açıklanmasının hedeflendiği etkinlikte, öğrencilerin tekrarlı ve dönel permütasyonların hesaplamaları ile ilgili çalışmalar yapması amaçlanmıştır.

Başlarken...

Pul yerleştirme oyunu belli koşullar altında istenilen dizilimin kaç farklı şekilde hesaplanabileceği ile ilgilidir (Oyunun ilk aşamasına permütasyon etkinliğinde yer verilmiştir.). Oyunun ikinci aşamasında bir kısmı eş olan n tane pulun (X, Y, Z,) $1 \times n$ 'lik bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde yerleştirilebileceğinin hesaplanması gerekmektedir. Daha az sayıda pul ve daha küçük boyutta ızgara üzerinde bu dizilimin kaç farklı şekilde hesaplanabileceğini somut materyaller kullanılarak deneyiniz. Şekilde verilen 4 pulun (X, X, Y, Z) 1×4 'lük bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.



Oyunun ilerleyen aşamalarında dört pul (X, Y, Z, U) bir çember etrafına dizilmek istenilirse düz sıralamaya göre neler değişmektedir?

**Tekrarlı Permütasyon****Etkinlik-Pul Yerleştirme Oyunu İkinci Aşama**

Şekilde verilen 4 pulun (X, X, Y, Z) 1x4'lük bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde dizilebileceği somut malzemeler kullanılarak sayılır. Özdeş olmayan X pulları (farklı renkte olmaları durumu vb.) ile özdeş X pullarının sıralanması arasında nasıl bir farklılık olduğuna ilişkin çıkarımlar yapılması tabloda boş bırakılan yerlerin doldurulması ile sağlanır.

Özdeş olmayan X pulları (farklı renkte olmaları durumu vb.)	Özdeş X pulları
X, X, Y, Z	X, X, Y, Z
X, X, Y, Z	
Y, X, X, Z	Y, X, X, Z
Y, X, X, Z	
...	...
Farklı dizilişlerin sayısı: 24	Farklı dizilişlerin sayısı: 12

X, X, Y, Z pullarının 4'lü her dizilişinde özdeş X pullarının kendi arasında yer değişimi aynı sıralamayı verdiği için 2 kere sayılır. O hâlde 4 pulun (X, X, Y, Z) 1x4'lük bir ızgara üzerine $\frac{4!}{2!} = 12$ farklı şekilde dizilebileceği hesaplanır.

TANIM

Tekrarlı Permütasyon: Birinci çeşitten n_1 , ikinci çeşitten n_2 , x 'inci çeşitten n_x tane bulunan x çeşit nesnenin kaç farklı şekilde sıralanabileceğini ifade eden sayıya tekrarlı permütasyonlarının sayısı denir. Toplam $n_1 + n_2 + \dots + n_x = n$ nesne varsa bu sonuç $\frac{n!}{(n_1! \cdot n_2! \dots n_x!)}$ olarak hesaplanır.

Pul yerleştirme oyununun ikinci aşamasında pul sayılarını arttırarak sonuçların hesaplanması-na yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 2-4)

Pul yerleştirme oyununun ikinci aşamasında pul sayılarını genelleştirerek sonucun matematiksel olarak ifade edilmesine yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5)

Pul yerleştirme oyunundan elde ettiğiniz çıkarımlardan hareketle m tane 1'in ve n tane 0'ın bir sırada kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.

$\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$ sonucu üzerinden 0/1 dizilerinden bahsedilir



ARAŞTIRMA

İleri Araştırmaya Yönlendirme: Farklı durumların çözümünde her terimi 0 ya da 1 olan diziler (**0/1 Dizileri**) model olarak kullanılabilir. Araştırınız.

Örnek:

Asya, Başak ve Can toplamda yedi kişinin bulunduğu bir market kuyruğunda beklemektedirler.

- Bu kuyruktaki farklı sıralamaların kaçında Asya, Başak'a göre kasaya daha yakındır?
- Bu kuyruktaki farklı sıralamaların kaçında kasaya yakınlık sıralamasında Asya, Başak ve Can sıralaması vardır?



Çözüm:

Permütasyon kavramından 7 kişinin yan yana sıralanmasının $7!$ farklı şekilde olabileceği hesaplanır.

- İki kişinin kendi aralarındaki sıralaması $2!$ olup fazla sıralamayı saymamak için (Asya Başak'a göre kasaya daha yakın olacağı için kendi aralarında sıralamalarının değişmemesi) bölme işlemi yapılır. Sonuç $\frac{7!}{2!}$ olarak hesaplanır.
- Üç kişinin kendi aralarındaki sıralaması $3!$ olup fazla sıralamayı saymamak için (Asya, Başak ve Can isimli kişilerin kendi aralarında sıralamalarının değişmemesi) bölme işlemi yapılır. Sonuç $\frac{7!}{3!}$ olarak hesaplanır.

Örnek:

Matematik kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek kaç farklı kelime (anlamli veya anlamsız) yazılabilir?



Çözüm:

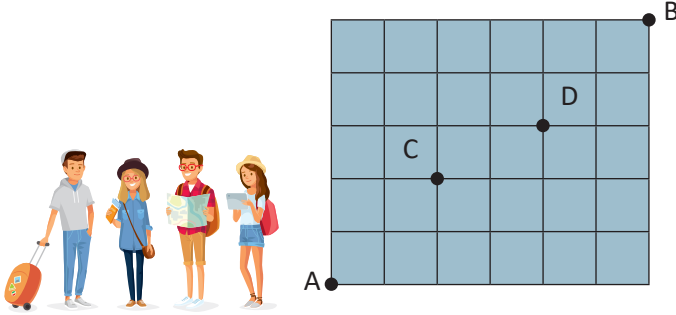
Tekrarlı permütasyon ile sonuç $\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ olarak hesaplanır.



Tekrarlı permütasyon ile ilgili benzer sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 6)

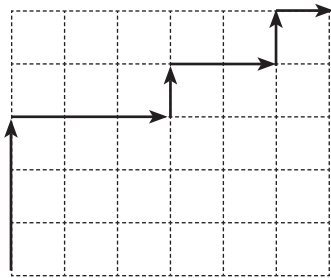


Aşağıdaki çizgiler antik kentin birbirini dik kesen sokaklarını temsil etmektedir.



- a. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız.

A'da bulunan turistin antik kente en kısa yoldan gidebilmesi için sadece kuzey (K) ↑ ve doğu (D) → yönlerini kullanması gerekir.



Bu yollardan bir tanesi sırasıyla KKKDDDKDDKD yönlerinde ilerlemesi olabilir. Farklı yollar yazılması ve bu yolların hepsinde 6 adet D ve 5 adet K kullanıldığının görülmesi sağlanır. Bu durumda istenilen cevap 6 adet D ve 5 adet K harfinin yan yana kaç farklı şekilde sıralanabileceğinin bulunmasıdır. İstenilen cevap $\frac{11!}{6! \cdot 5!} = 462$ olarak hesaplanır.

Sayma Yoluyla Hesaplama

1	6	21	56	126	252	462
1	5	15	35	70	126	210
1	4	10	20	35	56	84
1	3	6	10	15	21	28
1	2	3	4	5	6	7
	1	1	1	1	1	1

- b. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin C'deki meydana uğramak şartıyla kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız.

Aşağıdaki tablo A-C ve C-B yollarının kaç farklı şekilde gidilebileceğini göstermektedir. Çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak A-B yolunun kaç farklı şekilde gidilebileceği $\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 210$ olarak hesaplanır.

Yollar	A-C	C-B
Kaç farklı şekilde gidilebilir?	$\frac{4!}{2! \cdot 2!}$	$\frac{7!}{4! \cdot 3!}$

Sayma Yoluyla Hesaplama

		6	24	60	120	210
		6	18	36	60	90
		6	12	18	24	30
1	3	6	6	6	6	6
1	2	3				
	1	1				

- c. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin C'deki meydana ve D'deki müzeye uğramak şartıyla kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız.

Aşağıdaki tablo A-C, C-D ve D-B yollarının kaç farklı şekilde gidilebileceğini göstermektedir. Çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak A-B yolunun kaç farklı şekilde gidilebileceği $\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 108$ olarak hesaplanır.

Yollar	A-C	C-D	D-B
Kaç farklı şekilde gidilebilir?	$\frac{4!}{2! \cdot 2!}$	$\frac{3!}{2!}$	$\frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Sayma Yoluyla Hesaplama

				18	54	108
				18	36	54
		6	12	18	18	18
1	3	6	6	6		
1	2	3				
	1	1				



- d. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin D'deki müzeye uğramamak şartıyla kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız.

Aşağıdaki tablo A-B ve A-D-B yollarının kaç farklı şekilde gidilebileceğini göstermektedir.

Çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak A-D ve D-B yolunun kaç farklı şekilde gidilebileceği

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Tüm yolların sayısından D'ye uğranan yolların sayısı çıkarılarak sonuç $\frac{11!}{6! \cdot 5!} - \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2!}$ hesaplanır.

Yollar	A-B	A-D	D-B
Kaç farklı şekilde gidilebilir?	$\frac{11!}{6! \cdot 5!}$	$\frac{7!}{4! \cdot 3!}$	$\frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Tekrarlı permütasyon ile ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 7)



Kavşak Geçişi

Şekilde bir kısmı görünen kavşakta sarının arkasında 3 sarı, kırmızının arkasında 4 kırmızı ve mavinin arkasında 2 mavi araba beklemektedir. Aynı renk arabaların birbirini geçmemesi ve beyaz araba sabit kalmak şartı ile diğer tüm yönlerdeki arabaların beyaz arabanın bulunduğu yola kaç farklı şekilde ilerleyebileceklerini hesaplayınız.

İlerleyecek arabaların sayısı $4+5+3=12$ olur. Tekrarlı permütasyon ile istenilen cevap $\frac{12!}{4! \cdot 5! \cdot 3!}$ olarak hesaplanır.



Tekrarlı permütasyon ile ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 8-11)



Boy Sırası

Her biri farklı boyda olan n kişi, en uzun kişinin her iki yönünde de boy uzunlukları azalacak şekilde sıralanacaktır. Bu sıralama kaç farklı şekilde yapılabilir?

En uzun kişi ile en kısa kişi arasındaki her iki sırada da boy uzunluklarının azalacağı şekilde bir daire kaç farklı şekilde oluşturabilir? Daire olması durumunda düz sıralamaya göre neler değişmektedir?

Kişiler	En uzun kişi	İkinci en uzun kişi	Üçüncü en uzun kişi	...	En kısa kişi
Yerleşebileceği farklı taraf sayısı	1	2	2	...	2
Açıklama	Sadece ortada durabilir.	İkinci en uzun kişi en uzun kişinin her iki tarafına da geçebilir.	Üçüncü en uzun kişi en uzun kişinin her iki tarafına da geçebilir.		Her iki tarafa da geçebilir.

Tablo yardımıyla istenilen cevap 2^{n-1} olarak hesaplanır.

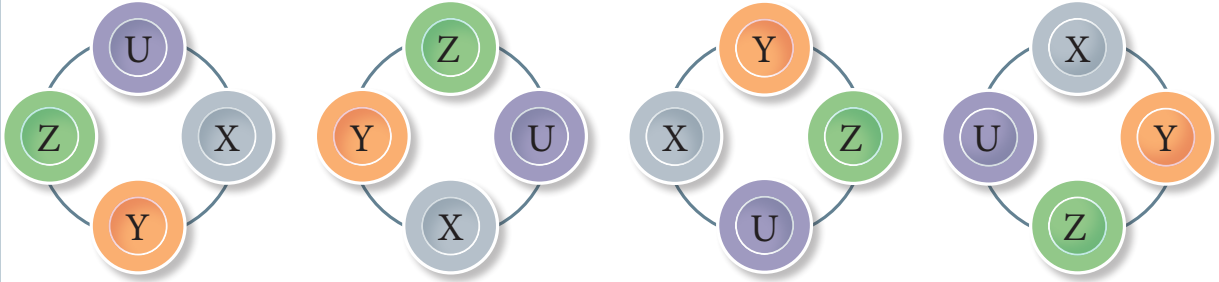
Kişiler	En uzun kişi	En kısa kişi	İkinci en uzun kişi	Üçüncü en uzun kişi	...	En kısa ikinci kişi
Yerleşebileceği farklı taraf sayısı	1	1	2	2	...	2
Açıklama	Dairede ilk yerleştirilir.	Dairede en uzun kişiden sonra yerleştirilir.	İkinci en uzun kişi en uzun kişinin her iki tarafına da geçebilir.	Üçüncü en uzun kişi en uzun kişinin her iki tarafına da geçebilir.		Her iki tarafa da geçebilir.

Tablo yardımıyla istenilen cevap 2^{n-2} olarak hesaplanır.

**Dönel Permütasyon****Pul Yerleştirme Oyunu Üçüncü Aşama**
(Etkinlik Formu Soru 12)

Şekilde verilen 4 pulun (X, Y, Z, U) bir çember etrafına kaç farklı şekilde dizilebileceklerini hesaplayınız. Çember üzerinde pulların farklı dizilişleri somut materyallerle deneme yapılarak hesaplanır.

U, X, Y, Z pullarının bir çember etrafına UXYZ, XYZU, YZUX ve ZUXY şeklinde dizilişleri aşağıdaki şekiller üzerinden incelenerek aynı kabul edilir. Fakat YXUZ dizilişinin farklı bir diziliş olduğu belirlenir.



Elimizdeki nesnelerin bir çember etrafına dizilişinde, dikkate alınan tek husus yerleştirilen nesnelerin birbirlerine göre konumu ise dönel permütasyon adı verilir. Aksi belirtilmedikçe yansımayla elde edilenler hesaba katılmaz. Örneğin n farklı nesneden herhangi birisi çember üzerinde sabitlenip referans noktası olarak kabul edilirse, geri kalan $n - 1$ nesnenin mümkün her dizilişi ile bu n nesnenin bir dönel permütasyonunu elde ederiz. Böylece, n nesnenin dönel permütasyonlarının sayısı $(n - 1)!$ olarak elde edilir. Bu bağlamda istenilen pul dizilimi $(4 - 1)! = 6$ olarak hesaplanır.

TANIM

Dönel Permütasyon: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ nesnelerinin bir çember etrafına dizilimlerinde a_1 nesnesini referans kabul edersek diğer nesneler saat yönünde $(n - 1)!$ farklı şekilde sıralanabileceğinden $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ nesnelerinin çember etrafına dizilimleri sayısı da $(n - 1)!$ olarak bulunur.

Etkinlik Formu Soru 13**Pul Yerleştirme Oyunu**

Her biri farklı renkte olan 5 tane X ve 5 tane Y pulunun herhangi iki X pulu arasında bir Y pulu olması şartıyla bir çember etrafına kaç farklı şekilde dizilebileceklerini hesaplayınız.

Önce X pulları yerleştirilir ve $4!$ farklı şekilde dizilebilecekleri hesaplanır. X pullarının yerleşmesi durumunda aralarında 5 boş yer oluşur. Belirtilen şartın sağlanması beş boş yerin her birine Y pulunun yerleştirilmesi ile sağlanır. İstenilen sonuç $4! \cdot 5! = 2880$ olarak hesaplanır.

Dönel permütasyon ile ilgili benzer sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 14)

Etkinlik Formu Soru 15

Pul Yerleştirme Oyunu

Beş farklı renkte X pulu ve altı farklı renkte Y pulunun her X pulunun her iki yanında Y pulu olması şartıyla bir çember etrafına kaç farklı şekilde dizilebileceklerini hesaplayınız.

Önce X pulları yerleştirilir ve $4!$ farklı şekilde dizilebilecekleri hesaplanır. X pulları arasında 5 boş yer oluşur. Boş yerlerden bir tanesine 2, diğerlerine bir Y pulu yerleşirse istenilen şart sağlanmış olmaktadır. İki Y pulunun yerleşeceği yer 5 farklı şekilde seçilir. Bu seçimden sonra Y pulları $6!$ farklı şekilde dizilirler. İstenilen cevap $4! \cdot 5! \cdot 6! = 86400$ olarak hesaplanır.

Dönel permütasyon ile ilgili benzer sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 16)



Gökyüzü Gözlemi

7 kişilik bir gözlem grubunun 2 sene boyunca halka şeklinde gözlem yaparken her gün başka biçimde dizilmiş olmalarının mümkün olup olmadığını hesaplayınız.

Bu grubun dönel permütasyon sayısı $6! = 720$ olup 2 yılda en az 730 gün bulunduğundan, her gün başka biçimde dizilmiş olamazlar. Ama eğer halka değil sıra şeklinde dizilselerdi $7! = 5040$ farklı şekilde sıralanacaklarından, 13 sene (en fazla 4749 gün) boyunca her gün farklı bir diziliş deneyebileceklerdi.

Dönel permütasyon ile ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 17-19)



EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- **0/1 Dizileri:** Farklı durumların çözümünde her terimi 0 ya da 1 olan diziler model olarak kullanılabilir. m tane 1 ve n tane 0 sembolü kullanılarak oluşturulan dizilerle ilgili araştırma yapınız. Tekrarlı permütasyona örnek olarak 0/1 dizilerinin sayısının nasıl hesaplanabileceğine ilişkin çıkarımlarda bulununuz.

KAYNAKLAR

- Alizade, R. & Ufuktepe, Ü. (2014). *Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri*, Altın Nokta Yayınevleri.
- Doğanaksoy A., Sulak, F. & Uğuz, M. (2009). *Yarışmalara Hazırlananlar İçin Çözümlü Matematik Problemleri*, Oyak (OYAK Liselerarası Matematik Yarışması).
- Nesin, A. (2016). *Matematik ve Oyun*. Nesin Yayınevi, İstanbul.
- Nesin, A. (2019). *Sayma-Kombinasyon Hesapları*. Nesin Yayıncılık.
- Öztürk, F. (1995). *Kombinatorik (Sayma Problemleri)*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.
- TÜBİTAK BİDEB (Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı) 2018 yılı 2204-A Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması (Proje İsmi: Hamle Kuralları Ve Sayıları İle Kombinatorik, Öğrenciler: Baturalp Taha Yılmaz ve Emre Akdoğan, Proje Danışmanı: Gülnur Özbek).
- Uğurel, I. & Moralı, S. (2008). Matematik ve Oyun Etkileşimi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(3), 75-98.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

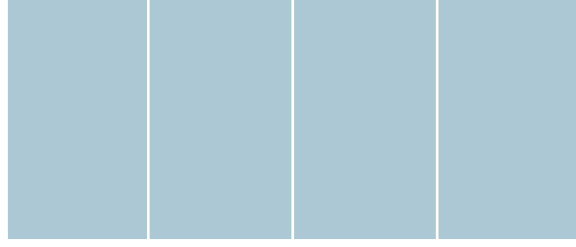
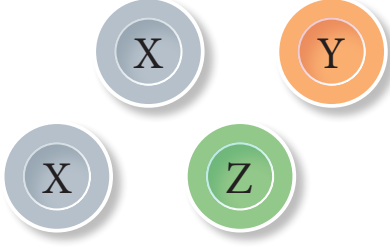
1. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.
2. 30
3. 210
4. 1260
5. $\frac{(m+n)!}{(m! \cdot n!)}$
6. $P(10, 10) = 10! = 3628800$ farklı kelime (anlamli veya anlamsız) yazılabileceği hesaplanır.
7. a. $\frac{14!}{8! \cdot 6!}$
 b. $\frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!}$
 c. $\frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$
 d. $\frac{14!}{8! \cdot 6!} - \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$
8. $\frac{11!}{3! \cdot 6! \cdot 2!}$
9. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4! = 1440$
10. Efe isimli gözlemci için 2 farklı seçenek vardır. Ege ya başa ya da sona yerleştikten sonra sırada 5 farklı yer ve 8 gözlemci kalır. Bu durumda istenilen cevap $2 \cdot P(8,5) = 2 \cdot \frac{8!}{2!} = 8!$ olarak hesaplanır.
11. Tüm rakamlar birbirinden farklı olsa $10!$ şekilde farklı 10 basamaklı sayı yazılabilir. Bu dizilimlerden herhangi birinde 1'ler kendi aralarında $2!$, 2'ler kendi aralarında $4!$ ve 3'ler kendi aralarında $3!$ farklı şekilde dizilirler ancak bu dizilimlerin hepsi aynı sayıyı verir. İstenilen cevap $\frac{10!}{2! \cdot 4! \cdot 3!} = 12600$ 'dür.
12. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.
13. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.
14. $4! \cdot 5! = 2880$
15. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.
16. $4! \cdot 5! \cdot 6! = 86400$



- 17.** Yuvarlak masa etrafına önce erkekler yerleştirilir ve $6!$ farklı şekilde oturabilecekleri hesaplanır. Erkeklerin yerleşmesi durumunda aralarında 6 boş yer oluşur. Boş yerlerden 4 tanesine birer kadın oturursa istenilen cevap $5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 43200$ olarak hesaplanır.
- 18.** Evli çiftlerin her biri ayrı bir grup kabul edilip $3!$ farklı şekilde yuvarlak masa etrafına oturabilecekleri hesaplanır. Ayrıca her çift kendi aralarında yer değişimleri sebebiyle 2 farklı şekilde oturabilirler. İstenilen cevap $3! \cdot 2^4 = 96$ olarak hesaplanır.
- 19.** Evli çiftlerin her birini bir grup kabul edersek bu gruplar yuvarlak masa etrafına $3!$ farklı şekilde oturabilirler. Sıralamanın bir kadın bir erkek şeklinde olması için eşlerden birindeki kadın erkek sıralaması ile diğerlerindeki aynı olmalı. Dolayısıyla tüm eşler kendi içlerinde sadece 2 farklı şekilde sıralanabilirler. Bu durumda cevap $3! \cdot 2 = 12$ olur.

Etkinlik Formu

1.



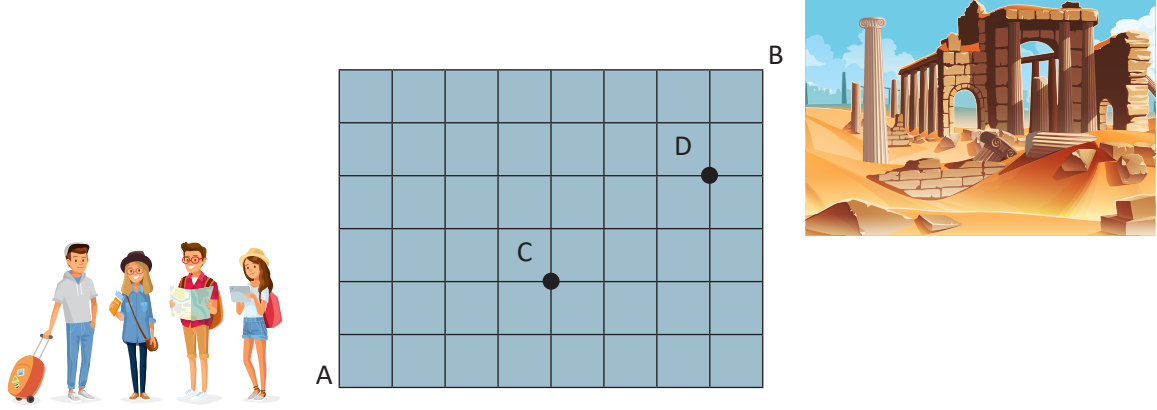
Pul yerleştirme oyununda şekilde verilen 4 pulun (X, X, Y, Z) 1x4'lük bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız. Özdeş olmayan X pulları (farklı renkte olmaları durumu vb.) ile özdeş X pullarının sıralanması arasında nasıl bir farklılık olduğunu tabloda boş bırakılan yerleri doldurarak belirleyiniz.

Özdeş olmayan X pulları (farklı renkte olmaları durumu vb.)	Özdeş X pulları
X, X, Y, Z	X, X, Y, Z
X, X, Y, Z	
Y, X, X, Z	Y, X, X, Z
Y, X, X, Z	
...	...
Sıra sizde ...	Sıra sizde ...
Farklı dizilişlerin sayısı: ...	Farklı dizilişlerin sayısı: ...

- Pul yerleştirme oyununda 5 pulun (X, X, Y, Y, Z) 1x5'lik bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.
- Pul yerleştirme oyununda 7 pulun (X, X, Y, Y, Z, Z, Z) 1x7'lik bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.
- Pul yerleştirme oyununda 9 pulun (X, X, X, Y, Y, Y, Y, Z, Z) 1x9'lük bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.
- Pul yerleştirme oyununda m tane X pulunun ve n tane Y pulunun $1 \times (m+n)$ 'lik bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.
- PERMÜTASYON kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek kaç farklı kelime (anamlı veya anlamsız) yazılabilir?



7. Aşağıdaki çizgiler antik kentin birbirini dik kesen sokaklarını temsil etmektedir. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız.



- a. Yukarıdaki şekil antik kentin birbirini dik kesen sokaklarını temsil etmektedir. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız.
- b. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin C'deki meydana uğramak şartıyla kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz ve çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanınız.

Yollar	A-C	C-B
Kaç farklı şekilde gidilebilir?		

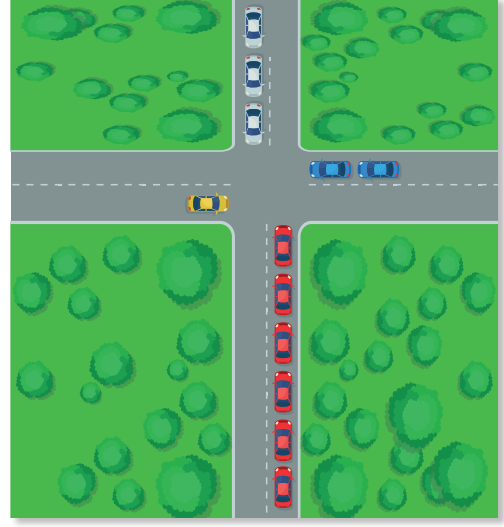
- c. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin C'deki meydana ve D'deki müzeye uğramak şartıyla kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz ve çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanınız.

Yollar	A-C	C-D	D-B
Kaç farklı şekilde gidilebilir?			

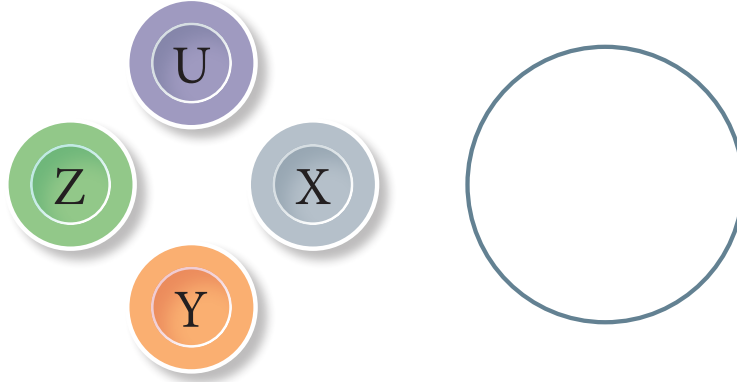
- d. A'dan B'de bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecek olan bir turistin D'deki müzeye uğramamak şartıyla kaç farklı yoldan gidebileceğini hesaplayınız. Sonucu hesaplamak için tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz ve çarpma yoluyla sayma ilkesini kullanınız.

Yollar	A-B	A-D	D-B
Kaç farklı şekilde gidilebilir?			

8. Şekilde bir kısmı görünen kavşakta beyazın arkasında 2 beyaz, kırmızının arkasında 5 kırmızı ve mavinin arkasında 1 mavi araba beklemektedir. Aynı renk arabaların birbirini geçmemesi ve sarı araba sabit kalmak şartı ile diğer tüm yönlerdeki arabaların sarı arabanın bulunduğu yola kaç farklı şekilde ilerleyebileceklerini hesaplayınız.



9. 4 erkek ve 4 kadının herhangi iki erkek yan yana olmamak şartıyla kaç şekilde sıralanabileceğini hesaplayınız.
10. 3 kadın 5 erkek gözlemciden oluşan bir grup gözlem yapmak için teleskop sırasına Efe isimli erkek gözlemcinin ya başta ya da sonda olması şartıyla kaç farklı şekilde dizilebilirler?
11. 1122223334 sayısındaki rakamlar kullanılarak kaç farklı 10 basamaklı sayı yazılabilir?



12. Pul yerleştirme oyununda şekilde verilen 4 pulun (X, Y, Z, U) bir çember etrafına kaç farklı şekilde dizilebileceklerini hesaplayınız.
13. Her biri farklı renkte olan 5 tane X ve 5 tane Y pulunun herhangi iki X pulu arasında bir Y pulu olması şartıyla bir çember etrafına kaç farklı şekilde dizilebileceklerini hesaplayınız.



14. 5 erkek ve 5 kadının herhangi iki erkek arasında bir kadın oturması şartıyla yuvarlak bir masa etrafına kaç farklı şekilde oturabileceğini hesaplayınız.
15. Beş farklı renkte X pulu ve altı farklı renkte Y pulunun her X pulunun her iki yanında Y pulu olması şartıyla bir çember etrafına kaç farklı şekilde dizilebileceklerini hesaplayınız.
16. 5 erkek, 6 kadının her erkeğin her iki yanında kadın olması şartıyla yuvarlak bir masa etrafına kaç farklı şekilde oturabileceklerini hesaplayınız.
17. 6 erkek, 4 kadının herhangi iki kadın yan yana gelmemek şartıyla yuvarlak bir masa etrafına kaç farklı şekilde oturabilirler?
18. 5 evli çift eşler yan yana olmak şartıyla yuvarlak bir masa etrafına kaç farklı şekilde oturabilirler?
19. 5 evli çift eşler yan yana olmak ve her erkeğin her iki yanında kadın olmak şartıyla yuvarlak bir masa etrafına kaç farklı şekilde oturabilirler?



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: KOMBİNASYON

: Sonlu Matematik/Temel Sayma Yöntemleri

: 1. Kombinasyon kavramını açıklar.

2. Permütasyon ve kombinasyon hesapları yapmayı gerektiren problem kurar ve çözer.

3. Kombinasyon kavramının özelliklerine ilişkin çıkarımlarda bulunur.

SÜRE
KULLANILACAK
MATERYALLER

: 4 ders saati

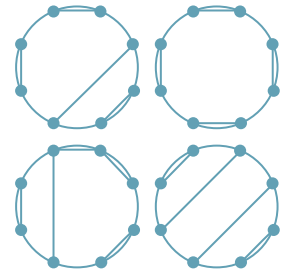
: Etkinlik Formu, halka şeklinde ızgaralar, farklı uzunluklarda çubuklar (halkaların çapını geçmeyecek şekilde uzunlukları halkalara göre ayarlanabilen)

Etkinliğin Amacı

Alt küme sayısından hareketle kombinasyon kavramının açıklanmasının hedeflendiği bu etkinlikte, n elemanlı bir kümenin r tane elemanının kaç farklı şekilde seçilebileceğine ait çalışmalar yapılacaktır. Permütasyon ve kombinasyon hesaplamaları arasındaki ilişkinin kurulması amaçlanmıştır. Bu amaç ile permütasyon ve kombinasyon hesaplamaları yapmayı gerektiren problemler kurulması ve çözülmesine yer verilmiştir. Geometrik kombinasyon ile ilgili problemler çözülmesi ve kombinasyon kavramının özelliklerinin kavratılması da hedeflenmiştir. Etkinlikte, $0!=1$ olarak kabul edilmesinin kombinasyon bağıntısının bir sonucu olduğuna ilişkin çıkarımlar yapılması beklenilmektedir.

Başlarken...

Asya 'Seçiliş' isimli oyunu oynamaktadır. Bu oyunda bir çember üzerinde 8 beyaz nokta işaretlidir. Asya bu noktalardan (daha önce birleştirilmemiş olan) herhangi iki tanesini seçer, seçtiği her iki noktayı da siyaha boyayarak bir doğru parçası ile birleştirir. Doğru parçalarının birbirleri ile kesişmemelerine dikkat eder. Oyunun ilk aşamasında bir çember üzerinde 8 farklı noktanın ikiyeşerli birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen 4 doğru parçasının kaç farklı şekilde çizilebileceğinin gösterilmesi gerekmektedir. Oyunun aşamalarında ilerledikçe çember üzerindeki nokta sayısı artmakta ve farklı koşullarda birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen geometrik şekillerin kaç farklı şekilde çizilebileceği üzerine hesaplama yapmak gerekmektedir. Asya bu oyunun ilk aşamasını nasıl çözümler?

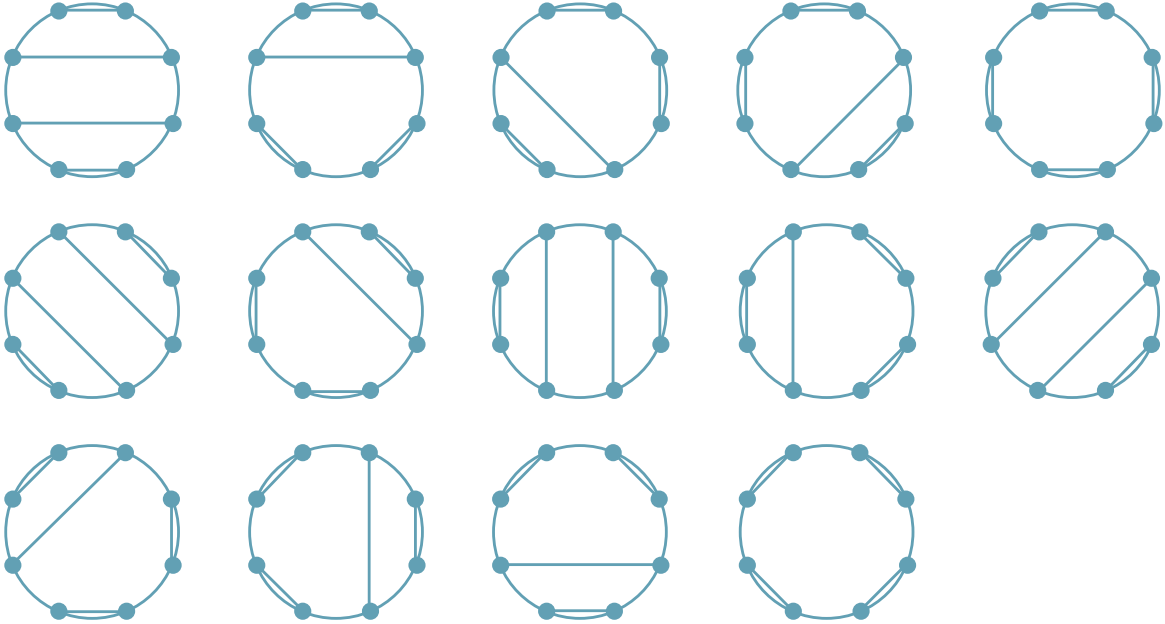




Seçiliş Oyunu

Bir çember üzerinde 8 farklı noktanın ikilerli birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen 4 doğru parçası kaç farklı şekilde çizilebilir?

Bu etkinlik için malzemeler kullanılarak farklı denemeler yapılır, tüm olası durumlar incelenir ve aşağıdaki şekilde gösterilen 14 farklı parçalanışın yapılabileceği gösterilir.



Şekil. Sekiz nokta ve 4 doğru parçası için çözüm

Bu oyunda ilerlemek için hesaplama yapmak bu noktaların ikili kaç farklı şekilde seçilebileceği ile ilgilidir. Nokta sayısının ve parçalanış biçiminin farklı olduğu durumlarda tek tek sayarak hesaplamamanın zor olacağı belirtilir. Nokta sayısının daha büyük olduğu durumlarda nasıl hesaplama yapılabileceğine ilişkin yorumlar yapılması sağlanır.

Etkinlik Formu Soru 1'e yer verilir.



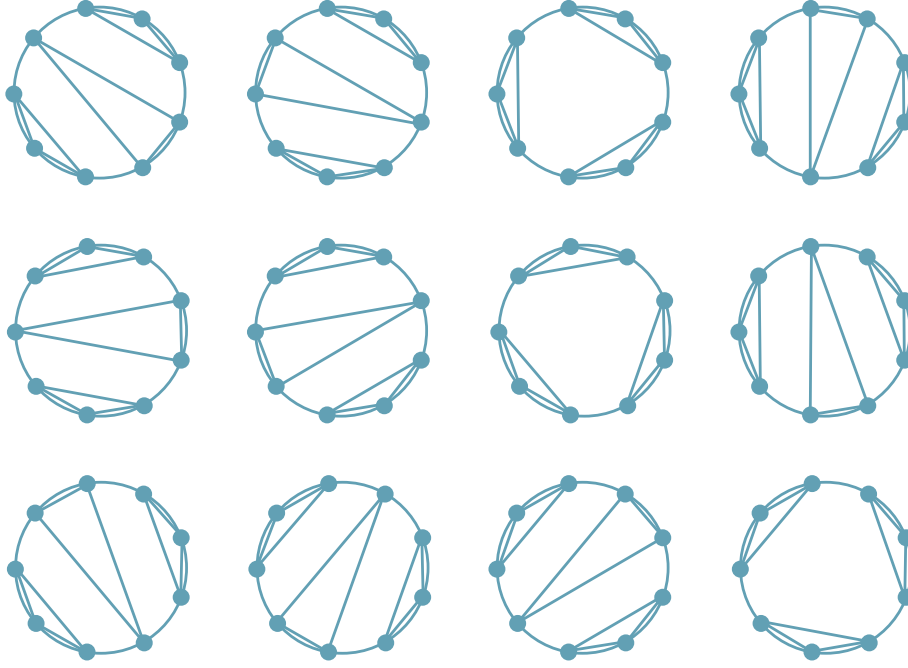
ARAŞTIRMA

Ek Etkinlik ve Araştırma Sorularına Yönlendirme: Nokta sayısının daha büyük olduğu durumlarda (10, 12...) nasıl hesaplama yapılabilir?

Etkinlik Formu Soru 2**Oyunun İkinci Aşaması**

Bir çember üzerinde 9 farklı noktanın üçerli birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen 3 üçgen kaç farklı şekilde çizilebilir?

Bu etkinlik için malzemeler kullanılarak farklı denemeler yapılır, tüm olası durumlar incelenir ve aşağıdaki şekilde gösterilen 12 farklı parçalanışın yapılabileceği gösterilir.



Şekil. Dokuz nokta ve 3 üçgen için çözüm

Bu oyunda ilerlemek için hesaplama yapmak bu noktaların üçlü olarak kaç farklı şekilde seçilebileceği ile ilgilidir. Noktaların ya da nesnelerin kaç farklı şekilde seçilebileceği kombinasyon kavramı ile ilgilidir. Nokta sayısının ve parçalanış biçiminin farklı olduğu durumlarda tek tek sayarak hesaplamak zordur. Bu etkinlikten yola çıkılarak öğrencilerin kombinasyon kavramı ile ilgili çıkarımda bulunulması sağlanır.

**ARAŞTIRMA**

Ek Etkinlik ve Araştırma Sorularına Yönlendirme: Bir çember üzerinde farklı sayıda noktanın (12, 15,...) üçerli birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen üçgenler kaç farklı şekilde çizilebilir?

Nokta sayısının ve parçalanış biçiminin (üçgen, dörtgen,...) daha farklı olduğu durumlarda nasıl hesaplama yapılabilir?

Oyunun etaplarında ilerlemek ve hesaplamayı kolaylaştıracak şekilde genellemelere ulaşılması mümkündür. Bu gibi durumların çözümünde adını matematikçi Eugène Charles Catalan (1814-1894)'dan alan Catalan sayıları model olarak karşımıza çıkmaktadır. Nokta sayısı ve noktaların hangi şekilde birleştirileceği gibi koşullar değiştirilerek farklı problemler üretiniz çözümleri inceleyiniz ve genellemeye çalışınız. Catalan sayıları ve bu oyunun nasıl ilişkili olabileceği ile ilgili araştırma yapınız.



n Elemanlı Bir Kümenin r Tane Elemanının Seçilişi

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin beş elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz?

8 elemanlı bir A kümesinin 5 elemanlı her alt kümesi, A kümesindeki elemanların 5'li bir seçilişini verir. Bu seçilişlerin sayısı $C(8,5)$ olarak ifade edilirse sonuç iki adımlı bir işlem olarak hesaplanır:

İşlem adımları	İşlem
1. Adım: A kümesinden 5 elemanın seçilmesi.	$C(8,5)$
2. Adım: Seçilen 5 elemanın dizilmesi.	$5!$

Bu iki adım sonunda 8 elemanın bir permütasyonu elde edileceğinden işlemin sonuçlanabileceği durumların sayısı $P(8,5)$ dir. Birinci adım $C(8,5)$ farklı yoldan; ikinci adım da $5!$ farklı yoldan gerçekleştirilebileceğinden, çarpma ilkesi gereğince, $P(8,5) = 5! \cdot C(8,5)$ olur ve seçilişlerin sayısı

$$C(8,5) = \frac{P(8,5)}{5!} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56 \text{ olarak hesaplanır.}$$

TANIM

Alt Küme Sayısından Hareketle Kombinasyon Tanımı: Birbirinden farklı n nesneden herhangi r tanesinin oluşturduğu topluluğa bu nesnelerin r 'li bir seçilişi (r 'li kombinasyonu) adı verilir. n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı her alt kümesine, A kümesindeki elemanların r 'li bir seçilişi (r 'li kombinasyonu) adı verilir ve $C(n, r)$ ile gösterilir. $C(n, r)$ sayısının iki adımlı bir işlem olarak hesaplayabileceği açıklanır:

İşlem adımları	İşlem
1. Adım: A kümesinden r elemanın seçilmesi.	$C(n,r)$
2. Adım: Seçilen r elemanın dizilmesi.	$r!$

Bu iki adım sonunda n elemanın bir permütasyonu elde edileceğinden işlemin sonuçlanabileceği durumların sayısı $P(n,r)$ 'dir. Birinci adım $C(n,r)$ farklı yoldan; ikinci adım da $r!$ farklı yoldan gerçekleştirilebileceğinden, çarpma ilkesi gereğince, $P(n,r) = r! \cdot C(n,r)$ olur ve kombinasyonların sayısı

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Örnek:

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin beş elemanlı alt kümelerinden kaçında c elemanı bulunur?

Çözüm:

c elemanı mutlaka bulunacağı için geriye kalan 5 elemandan 4 tanesini seçmeliyiz.

$C(5,4) = 5$ farklı şekilde seçim yapılır.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ kümesinin üç elemanlı ve elemanlarının çarpımı 4 ile bölünen alt kümelerinin sayısını bulunuz.

Çözüm:

Tüm 3 elemanlı kombinasyonlardan elemanları çarpımı 4 ile bölünmeyenler çıkarılır.

Tüm 3'lü kombinasyonların sayısı

$$C(20,3) = 1140$$

1. Durum: Çarpımları 4 ile bölünmeyen üç tam sayının hepsi tek sayı olmalıdır.

$$C(10,3) = 120$$

2. Durum: Çarpımları 4 ile bölünmeyen üç tam sayının bir tanesi dörde bölünmeyen bir çift sayı olup diğer ikisi tek sayı olmalıdır. Kümede 5 tane 4 ile bölünmeyen çift sayı vardır.

$$5 \cdot C(10,2) = 225$$

$$1140 - 120 - 225 = 795 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Örnek:

Asya, Başak, Cemre, Doruk, Ekin, Fatma'nın bulunduğu 6 kişilik gruptan 1 başkan, 1 başkan yardımcısı ve 2 sekreter kaç farklı şekilde seçilebilir?





Görev paylaşımının gerçekleştirilmesi,

1. Aşama	Başkanlık seçimi	$C(6,1) = 6$
2. Aşama	Başkan yardımcılığı seçimi	$C(5,1) = 5$
3. Aşama	Sekreterlik seçimi	$C(4,2) = 6$

Çarpma ilkesi kullanılarak sonuç $6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$ olarak hesaplanır.

Örnek:

7 erkek ve 4 kız öğrenci herhangi iki kız öğrenci yan yana oturmamak şartı ile bir sıraya kaç farklı şekilde oturabilirler?

Üç adımlı bir işlem tanımlanır:

1. Aşama	Erkek öğrencilerin sıralanması	$7!$ farklı yol
2. Aşama	Yan yana oturan erkek öğrencilerin aralarındaki 6 boşluk ile iki uçta oturanların yanlarındaki 2 boşluktan ibaret toplam 8 mümkün konum arasından kızların oturacağı 4 yerin seçilmesi $-E-E-E-E-E-E-$	$C(8, 4)$ yol
3. Aşama	Seçilen 4 konuma kız öğrencilerin yerleştirilmesi	$4!$ farklı yol

Çarpma ilkesi kullanarak sonuç $C(8,4) 7! 4! = \frac{8! 7!}{4!}$ olur.

Örnek:

Pul yerleştirme oyununda (tekrarlı permütasyon etkinliği) 9 pulun (X, X, Y, Z, A, B, C, D, E) 1×7 'lik bir ızgara üzerine kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.

Çözüm:

- Durum:** Y, Z, A, B, C, D, E pullarından ikisi dışarıda bırakıldığında, geriye kalan 7 pul $\frac{7!}{2!}$ farklı şekilde dizilebilir. Dışarıda bırakılan pullar için de $C(7,2) = 21$ farklı seçimimiz olduğundan bu tür dizilişlerin sayısı $21 \cdot \frac{7!}{2!}$ olur.
- Durum:** Dışarıda kalan pulların birisi veya her ikisi de X olduğundan geriye kalan 7! farklı biçimde dizilebilir. En az bir tanesi X olmak üzere, dışarıda kalan iki pulu seçebileceğimiz dizilişlerin sayısı da 8 olduğu için bu tür dizilişler $8 \cdot 7!$ tanedir.

Sonuç:

$$21 \cdot \frac{7!}{2!} + 8 \cdot 7! = \frac{37}{2} \cdot 7! \text{ olarak hesaplanır.}$$



4'ün 2'li kombinasyonlarını blok ya da metin tabanlı kodlama programı kullanarak bulunuz.

```
import itertools
liste=list(itertools.combinations([1,2,3,4], 2))
print("4'ün 2'li kombinasyonları {}".format(liste))
```

Program Çıktısı

4'ün 2'li kombinasyonları [(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)]

Kombinasyon kavramı ile ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3-7)



Seçiliş Oyunu (Üçüncü Aşama)

Asya ile Başak bir oyun oynamaktadırlar. Bir çember üzerinde 98 beyaz nokta işaretlidir. Asya ile Başak sırasıyla bu noktalardan (daha önce birleştirilmemiş olan) herhangi iki tanesini seçer, seçtiği her iki noktayı da siyaha boyayarak bir doğru parçası ile birleştirir. Son beyaz noktayı boyayan oyuncu oyunu kazanır. İlk hamleyi Asya yaptığına (oyuna ilk başladığına) göre hangi oyuncu galibiyeti garanti edecek bir yol izleyebilir?

Sona kalan üç beyaz noktadan herhangi bir tanesine dokunan oyuncu oyunu kaybeder. Bu durum iki aşamada açıklanır:

- Eğer bu noktalardan iki tanesini birleştirirse öbür oyuncu sona kalan beyaz noktayı seçer ve oyunu kazanmayı garantiler.
- Eğer bu noktalardan birisini daha önceden seçilmiş olan noktalardan birisi ile birleştirirse öbür oyuncu geriye kalan iki beyaz noktayı seçer ve oyunu kazanmayı garantiler.

95 nokta ile kaç farklı doğru parçası çizilebileceği $C(95,2) = \frac{94 \cdot 95}{2} = 4795$ olarak hesaplanır.

Sonuç tek sayı olduğundan Asya ilk 95 noktanın tamamlandığı bütün doğru parçaları çizilinceye kadar oyunu sürdürür. Böylece Başak'ı son üç beyaz noktadan birisini seçmeye zorlar. Oyunu kazanmayı garantiler.



Kombinasyon ile ilgili oyun sorularına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 8)

Dışbükey Çokgenin Köşegen Sayısı

Örnek:

20 kenarlı bir dışbükey çokgenin köşegen sayısını hesaplayınız?

Çözüm:

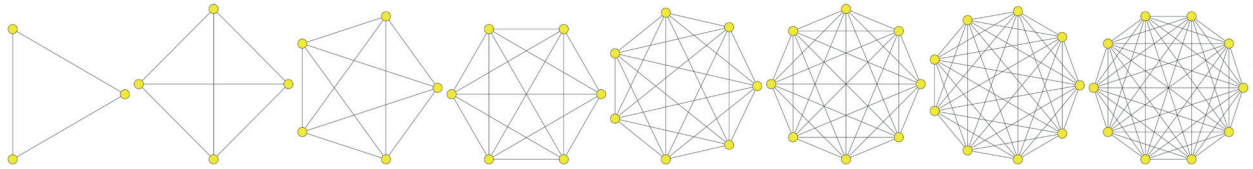
Çokgenin herhangi iki köşesinin seçimi $C(20,2)$ olarak hesaplanır. Ardışık köşelerin seçilmiş olması durumunda ise bu seçimler çokgenin kenarlarıdır. Öyleyse tüm seçimlerden çokgenin kenar sayısının çıkarılması gerekir. İstenilen sonuç $C(20,2) - 20 = \frac{20 \cdot 17}{2} = 170$ olarak hesaplanır.

Çokgenlerin köşegen sayıları ile ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 9)

TANIM

n Kenarlı Bir Dışbükey Çokgenin Köşegen Sayısı: Herhangi iki köşenin kaç farklı şekilde seçilebileceği belirlenir ve bu sonuçtan kenar sayısı çıkarılır. İstenilen sonuç

$$C(n,2) - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2} \text{ olarak hesaplanır.}$$



Kombinasyon Kavramının Temel Özellikleri

1. $C(n, r)$ ile $C(n, n - r)$ sonuçlarını hesaplayarak karşılaştırınız.

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ ve } C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \text{ olarak hesaplandığından}$$

$$C(n, r) = C(n, n-r) \text{ olur.}$$

- $C(n, r) = C(n, n-r)$

Alt Küme Sayısıyla İlişkilendirme

Örneğin $r = 1$ durumu: n elemanlı kümenin bir elemanlı alt kümelerinden her birisi, kümenin bir tek elemanından oluştuğu için $C(n, 1) = n$ olur. Bir eleman ayrıldığında, geriye $n-1$ eleman kalacağından, $n - 1$ elemanlı alt kümelerin sayısı da n olur.

2. $C(n, r) + C(n, r - 1)$ toplamı ile $C(n + 1, r)$ sonuçlarını hesaplayarak karşılaştırınız.

$$\begin{aligned} C(n, r) + C(n, r - 1) &= \frac{n!}{r!(n - r)!} + \frac{n!}{(r - 1)!(n - (r - 1))!} = \frac{n!}{r!(n - r)!} + \frac{n!}{(r - 1)!(n + 1 - r)!} \\ &= \frac{n!}{(r - 1)!(n - r)! r} + \frac{n!}{(r - 1)!(n - r)! (n + 1 - r)} = \frac{n! (n + 1 - r + r)}{(r - 1)!(n - r)! r(n + 1 - r)} = \frac{n! (n + 1)}{r!(n + 1 - r)!} \\ &= \frac{(n + 1)!}{r!(n + 1 - r)!} = C(n + 1, r) \text{ olarak hesaplandığından } C(n, r) + C(n, r - 1) = C(n + 1, r) \end{aligned}$$

$$\bullet C(n, r) + C(n, r - 1) = C(n + 1, r)$$

Alt Küme Sayısıyla İlişkilendirme

Elemanlarından birisi a olan $n + 1$ elemanlı kümeden r elemanlı alt küme seçme işlemi iki farklı şekilde hesaplanır:

- $n + 1$ elemandan r tanesi $C(n + 1, r)$ farklı şekilde seçilebilir.
- r tane seçilen eleman arasında a ya vardır, ya da yoktur. a 'nın bulunduğu seçim sayısı $C(n, r)$ ve bulunmadığı seçim sayısı $C(n, r - 1)$ olduğuna göre
 $C(n, r) + C(n, r - 1) = C(n + 1, r)$ olur.

Binom Katsayıları

Herhangi bir n gerçel sayısı ve pozitif r tam sayısı için

$$\binom{n}{r} = \frac{(n - r + 1)(n - r + 2) \cdots (n - 1)(n)}{r!}$$

ifadesi ile tanımlanan $\binom{n}{r}$ sayısına binom katsayısı denir. $0 \leq r < n$ tam sayıları için, tanım gereği

$\binom{n}{r} = C(n, r)$ olduğundan $C(n, r)$ yerine $\binom{n}{r}$ yazılır. Etkinliğin devamında $C(n, r)$ yerine $\binom{n}{r}$ ifadesi kullanılmıştır.



Pascal Üçgeni ile İlişkilendirme

Aşağıda verilen şekil üzerinden bu özellik gösterilir.

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \dots\dots\dots \\
 \binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \dots \binom{n}{r-1} \quad \binom{n}{r} \dots \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n} \\
 \binom{n+1}{0} \quad \binom{n+1}{1} \dots \binom{n+1}{r} \quad \binom{n+1}{r+1} \dots \binom{n+1}{n+1}
 \end{array}$$

3. $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$ ifadesini alt küme sayısı ile ilişkilendiriniz.

$$\bullet C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$$

Alt Küme Sayısıyla İlişkilendirme

Boş küme, her kümenin bir alt kümesi ve herhangi bir kümenin eleman içermeyen tek alt kümesi olduğundan, her pozitif n tam sayısı için $C(n, 0) = 1$ elde edilir.

Bir kümenin bir elemanlı alt küme sayısı $C(n, 1) = n$ olur.

Bir kümenin iki elemanlı alt kümelerinden her birisi, kümenin iki elemanından oluştuğu için $C(n, 2)$ olur.

$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$ ifadesi sırasıyla 0, 1, 2, ... , n elemanlı alt kümelerinin sayılarının toplamını ifade eder.

Alt küme sayısı 2^n olduğu için $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$ sonucuna ulaşılır.

4. $C(n, n)$, $C(n, 0)$ ifadelerini alt küme sayısı ile ilişkilendiriniz.

$$\bullet C(n, n) = C(n, 0) = 1$$

Alt Küme Sayısıyla İlişkilendirme

Boş küme, her kümenin bir alt kümesi ve herhangi bir kümenin eleman içermeyen tek alt kümesi boş küme olduğundan, her pozitif n tam sayısı için $C(n, 0) = 1$ elde edilir. n elemanlı bir kümenin n elemanlı tek alt kümesi kendisi olduğundan $C(n, n) = 1$ olur. Böylece $C(n, n) = C(n, 0) = 1$ olarak hesaplanır.

 $0! = 1$ Olarak Kabul Edilmesi

$$\text{Bu durumda } C(n, n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!(0)!} = 1 \text{ ve } C(n, 0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!(n)!} = 1$$

olarak hesaplanabileceği için $0! = 1$ olarak kabul edilmesi kombinasyon bağıntısının bir sonucudur.

Örnek:

$$\binom{18}{1} + \binom{18}{3} + \binom{18}{5} + \dots + \binom{18}{17} \text{ toplamı neye eşittir?}$$

Çözüm:

$$\binom{18}{1} + \binom{18}{3} + \binom{18}{5} + \dots + \binom{18}{17} = \left[\binom{17}{0} + \binom{17}{1} \right] + \left[\binom{17}{2} + \binom{17}{3} \right] + \dots + \left[\binom{17}{16} + \binom{17}{17} \right] = 2^{17}$$

Kombinasyon kavramının temel özellikleriyle ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 10)

Örnek:

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} + \dots + \binom{2n}{2n-1} \text{ toplamının eşiti nedir?}$$

Çözüm:

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n-1} = \left[\binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} \right] + \left[\binom{2n-1}{2} + \binom{2n-1}{3} \right] + \dots + \left[\binom{2n-1}{2n-2} + \binom{2n-1}{2n-1} \right] = 2^{2n-1}$$

**Örnek:**

$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \dots + \binom{2n}{2n}$ toplamı neye eşittir?

Çözüm:

$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2n} = 2^{2n}$ olduğundan

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \dots + \binom{2n}{2n} = 2^{2n} - \left[\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} + \dots + \binom{2n}{2n-1} \right] = 2^{2n} - 2^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

Kombinasyon kavramının temel özellikleriyle ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 11, 12)

Örnek:

$\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \binom{2n+1}{5} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1}$ toplamı neye eşittir?

Çözüm:

$$\binom{2n+1}{1} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}, \binom{2n+1}{3} = \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3}, \dots, \binom{2n+1}{2n-1} = \binom{2n}{2n-2} + \binom{2n}{2n-1}, \binom{2n+1}{2n+1} = \binom{2n}{2n}$$

olduğundan

$$\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \binom{2n+1}{5} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2n} = 2^{2n}$$

Kombinasyon kavramının temel özellikleriyle ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 13)

Örnek:

$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{4} + \dots + \binom{2n+1}{2n}$ toplamı neye eşittir?

Çözüm:

$$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{2} + \dots + \binom{2n+1}{2n} = \left[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} \right] - \left[\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} \right]$$

$$= 2^{2n+1} - 2^{2n} = 2^{2n}$$

Kombinasyon kavramının temel özellikleriyle ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 14)

Örnek:

$\binom{6}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{20}{14}$ toplamı neye eşittir?

Çözüm:

$$\binom{6}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{20}{14} = \underbrace{\binom{7}{0} + \binom{7}{1}}_{\binom{8}{1}} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{20}{14} = \underbrace{\binom{8}{1} + \binom{8}{2}}_{\binom{9}{2}} + \binom{9}{3} + \dots + \binom{20}{14}$$

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{10}{4} + \dots + \binom{20}{14} = \binom{21}{14}$$

Kombinasyon kavramının temel özellikleri ile ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 15)

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- Etkinlik kapsamında, kombinasyon konusu ile ilişkili olarak bir çember üzerindeki belli sayıda noktanın farklı koşullarda birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen geometrik şekillerin kaç farklı şekilde çizilebileceği incelenmiştir. Nokta sayısı ve noktaların hangi şekilde birleştirileceği gibi koşullar değiştirilerek farklı problemler üretiniz ve bu problemlerin çözümlerinin genelleştirilmesini yapınız.
- Binom katsayıları, binom katsayılarının özellikleri, pascal özdeşliği, pascal özdeşliği, binom açılımı konularını araştırınız.
- Farklı durumların çözümünde Catalan sayıları model olarak kullanılabilir. Kombinasyon ile ilgili hangi soru modellerinin çözümünde bu sayı dizisi olduğunu inceleyiniz. Bir çember üzerindeki belli sayıda noktanın farklı koşullarda birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen geometrik şekillerin kaç farklı şekilde çizilebileceğinin hesaplanmasında Catalan sayılarının model olarak kullanımını araştırınız.

KAYNAKLAR

Bergeron, F., Labelle, G. ve Leroux, P. (2013). *Combinatorial species and tree-like structures.*(Trans. Ed. Margaret Readdy) Cambridge University Press, Cambridge.

CEMC(2018). The Centre for Education in Mathematics and Computing 2018 Canadian Team Mathematics Contest, http://www.cemc.uwaterloo.ca/contests/past_contests.html (Erişim Tarihi: 13.04.2021)

Darüşşafaka Eğitim Kurumları, 2019 Salih Zeki 10. Matematik Araştırma Proje Final Yarışması, (Proje Sergi Numarası: SZ201904, Sergi Tarihi ve Yeri: 21-23 Mayıs 2019/ İstanbul, Derece: Matematik Alanı Türkiye İkinciliği, Proje İsmi: Çemberlerin Parçalanışı), Proje Danışmanı: Gülnur Özbek, Öğrenci: Hakan Karakuş



Doğanaksoy A., Sulak, F. & Uğuz, M. (2009). *Yarışmalara Hazırlananlar İçin Çözümlü Matematik Problemleri*, Oyak (OYAK Liselerarası Matematik Yarışması).

Koshy, T. (2009). *Catalan Numbers with Applications*, Oxford University Press, New York.

Lando, S. K. (2003). *Lectures on generating functions*. American Mathematical Society [AMS], United States of America.

Nesin, A. (2019). *Sayma-Kombinasyon Hesapları*. Nesin Yayıncılık.

Öztürk, F. (1995). *Kombinatorik (Sayma Problemleri)*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

Catalan Numbers <https://oeis.org> (Erişim Tarihi: 20.04.2021).

<https://web.archive.org/web/20040808170406/http://www.math.harvard.edu/~mantovan/ADMIN/catalan2.pdf> (Erişim Tarihi: 20.04.2021).

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Derecelendirme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. $\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{1}{5+1} \cdot \binom{10}{5} = 42$

2. Cevabın ayrıntılı çizimi etkinlik içerisinde verilmiştir.

$$\frac{1}{2 \cdot 3 + 1} \cdot \binom{9}{3} = 12$$

3. Kalan beş eleman arasından 4 tanesi seçilir. Bu $\binom{5}{4} = 5$ farklı şekilde yapılır.

4. $\binom{12}{1} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{10}{2}$

5. Erkek öğrencilerin sıralanması 9!

Yan yana oturan erkek öğrencilerin aralarındaki 8 boşluk ile iki uçta oturanların yanlarındaki 2 boşluktan ibaret toplam 10 mümkün konum arasından kızların oturacağı 5 yerin seçilmesi $C(10, 5)$

Seçilen 4 konuma kız öğrencilerin yerleştirilmesi 5!

Çarpma ilkesi kullanarak sonuç $C(10, 5)9!5!$

6. Tüm kombinasyonlardan 4 ile bölünenler çıkarılır.

Tüm 3'lü kombinasyonların sayısı	$C(10, 3)$
Çarpımları 4 ile bölünmeyen üç tam sayının ya hepsi tek sayı olmalıdır.	$C(5, 3)$
Bir tanesi dörde bölünmeyen bir çift sayı olup diğer ikisi tek sayı olmalıdır. Kümede 3 tane 4 ile bölünmeyen çift sayı vardır.	3. $C(5, 2)$

$C(10, 3) - C(5, 3) - 3 \cdot C(5, 2)$ olarak hesaplanır.

7. G,Z,İ,N,T,E,P harflerinden ikisi dışarıda bırakıldığında, geriye kalan 7 harf $\frac{7!}{2}$ farklı şekilde dizilebilir. Dışarıda bırakılan harfler için de $\binom{7}{2} = 21$ farklı seçimimiz olduğundan bu tür dizilişlerin sayısı $21 \cdot \frac{7!}{2}$ olur. Dışarıda kalan harflerin birisi veya her ikisi de A olduğundan geriye kalan 7! farklı biçimde dizilebilir. En az bir tanesi A olmak üzere, dışarıda kalan iki harfli seçebileceğimiz yolların sayısı da 8 olduğu için bu tür dizilişler $8 \cdot 7!$ tanedir. Sonuç $\frac{37}{2} \cdot 7!$ olarak hesaplanır.

8. Sona kalan üç beyaz noktadan herhangi bir tanesine dokunan oyuncu oyunu kaybeder. Bu durum iki aşamada açıklanır:

a. Eğer bu noktalardan iki tanesini birleştirirse öbür oyuncu sona kalan beyaz noktayı seçer ve oyunu kazanmayı garantiler.



b. Eğer bu noktalardan birisini daha önceden seçilmiş olan noktalardan birisi ile birleştirir ise öbür oyuncu geriye kalan iki beyaz noktayı seçer ve oyunu kazanmayı garantiler.

95 nokta ile kaç farklı doğru parçası çizilebileceği $C(79, 2) = \frac{78 \cdot 79}{2} = 39.79$ olarak hesaplanır. Sonuç tek sayı olduğundan Asya ilk 79 noktanın tamamlandığı bütün doğru parçaları çizilinceye kadar oyunu sürdürür. Böylece Başak'ı son üç beyaz noktadan birisini seçmeye zorlar. Oyunu kazanmayı garantiler.

- 9.** Herhangi iki köşenin kaç farklı şekilde seçilebileceği belirlenir ve bu sonuçtan kenar sayısı çıkarılır. İstenilen sonuç $C(30, 2) - 30 = \frac{30 \cdot 27}{2}$ olarak hesaplanır.

10. $\binom{20}{1} + \binom{20}{3} + \binom{20}{5} + \dots + \binom{20}{19} = 2^{19}$

11. $\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \dots + \binom{20}{20} = 2^{20}$

12. $\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \dots + \binom{20}{20} = 2^{20}$ olduğundan

$$\binom{20}{0} + \binom{20}{2} + \binom{20}{4} + \dots + \binom{20}{20} = 2^{19}$$

13. $\binom{15}{1} + \binom{15}{3} + \binom{15}{5} + \dots + \binom{15}{15} = 2^{14}$

14. $\binom{15}{0} + \binom{15}{2} + \binom{15}{4} + \dots + \binom{15}{14} = 2^{14}$

15. $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \dots + \binom{19}{14} = \binom{20}{14}$

Etkinlik Formu

- Seçiliş isimli oyunda bir çember üzerinde 10 beyaz nokta işaretlidir. Asya bu noktalardan (daha önce birleştirilmemiş olan) herhangi iki tanesini seçer, seçtiği her iki noktayı da siyaha boyayarak bir doğru parçası ile birleştirir. Doğru parçalarının birbirleri ile kesişmemelerine dikkat eder. Oyunda bir çember üzerinde 10 farklı noktanın ikişerli birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen 5 doğru parçasının kaç farklı şekilde çizilebileceğini gösteriniz.
- Seçiliş isimli oyunda bir çember üzerinde 9 beyaz nokta işaretlidir. Asya bu noktalardan (daha önce birleştirilmemiş olan) herhangi üç tanesini seçer, seçtiği her iki noktayı da siyaha boyayarak bir doğru parçası ile birleştirir. Doğru parçalarının birbirleri ile kesişmemelerine dikkat eder. Oyunda bir çember üzerinde 9 farklı noktanın üçerli birleştirilmesi ile oluşan ve birbirleri ile kesişmeyen 3 üçgenin kaç farklı şekilde çizilebileceğini gösteriniz.
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin beş elemanlı alt kümelerinden kaçında 4 elemanı bulunur?
- 12 kişilik bir gruptan bir başkan, bir başkan yardımcısı ve iki sekreter kaç farklı şekilde seçilebilir? Tabloda boş bırakılan yerlere istenilen sonuçları hesaplayıp yazınız.

Aşama 1	Başkanlık seçimi	...
Aşama 2	Başkan yardımcılığı seçimi	...
Aşama 3	Sekreterlik seçimi	...

- 9 erkek ve 5 kız öğrencinin, herhangi iki kız öğrenci yan yana oturmamak şartı ile bir sıraya kaç farklı şekilde oturabileceğini hesaplayınız.
- $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ kümesinin üç elemanlı ve elemanlarının çarpımı 4 ile bölünen alt kümelerinin sayısını bulunuz. Tabloda boş bırakılan yerlere istenilen sonuçları hesaplayıp yazınız.

Tüm 3'lü kombinasyonların sayısı	...
1. Durum: Çarpımları 4 ile bölünmeyen üç tam sayının hepsi tek sayı olmalıdır.	...
2. Durum: Çarpımları 4 ile bölünmeyen üç tam sayının bir tanesi dörde bölünmeyen bir çift sayı olup diğer ikisi tek sayı olmalıdır. Kümede 3 tane 4 ile bölünmeyen çift sayı vardır.	...

- GAZİANTEP kelimesindeki harflerin 7 tanesi kullanılarak kaç farklı kelime (anlamli veya anlamsız) yazılabilir?



8. Asya ile Başak bir oyun oynamaktadırlar. Bir çember üzerinde 82 beyaz nokta işaretlidir. Asya ile Başak sırasıyla bu noktalardan (daha önce birleştirilmemiş olan) herhangi iki tanesini seçer, seçtiği her iki noktayı da siyaha boyayarak bir doğru parçası ile birleştirir. Son beyaz noktayı boyayan oyuncu oyunu kazanır. İlk hamleyi Asya yaptığına (oyuna ilk başladığına) göre hangi oyuncu galibiyeti garanti edecek bir yol izleyebilir?

9. 30 kenarlı bir dışbükey çokgenin köşegen sayısını hesaplayınız?

10. $\binom{20}{1} + \binom{20}{3} + \binom{20}{5} + \dots + \binom{20}{19} = ?$

11. $\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \dots + \binom{20}{20} = ?$

12. $\binom{20}{0} + \binom{20}{2} + \dots + \binom{20}{20} = ?$

13. $\binom{15}{1} + \binom{15}{3} + \binom{15}{5} + \dots + \binom{15}{15} = ?$

14. $\binom{15}{0} + \binom{15}{2} + \binom{15}{4} + \dots + \binom{15}{14} = ?$

15. $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \dots + \binom{19}{14} = ?$



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: TEKRARLI KOMBİNASYON

: Sonlu Matematik/Temel Sayma Yöntemleri

: 1. Tekrarlı kombinasyon bağıntısını elde eder.

2. Permütasyon ve kombinasyon hesapları yapmayı gerektiren problem kurar ve çözer.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

: Etkinlik Formu, her birinde en az sekiz tane bulunan özdeş iki deste oyun kartları, satranç taşları, özdeş pullar, özdeş toplar ve özdeş kutular.

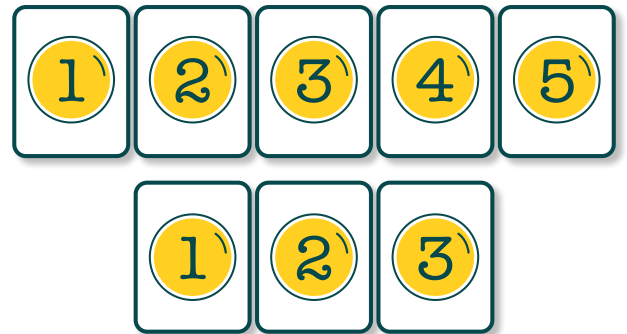
Etkinliğin Amacı

İki tür nesneden oluşan tekrarlı permütasyonların sayısının kombinasyon ile ilişkisinin kurulması hedeflenmiştir. Özdeş olan ve olmayan nesnelerin dağılımına ilişkin tekrarlı kombinasyon hesaplamaları yapılması ve permütasyon ile kombinasyon hesaplamaları arasındaki ilişkinin kurulması etkinliğin diğer amaçlarıdır. Öğrencilerin permütasyon ile kombinasyon hesaplamaları yapmayı gerektiren problemler kurması ve çözmesi beklenmektedir.

Başlarken...

Kart Karma Oyunu

Şekilde gösterildiği gibi birden beşe kadar numaralandırılmış ve sıralanmış beş kartlık bir deste ile birden üçe kadar numaralandırılmış ve sıralanmış üç kartlık bir deste bulunmaktadır. Bu iki destede bulunan kartların her biri kendi içerisinde sıralı kalmak şartıyla karılarak sekiz kartlık bir deste oluşturulmak istenilmektedir. Örneğin yeni oluşan destenin 11223345 ve 12312345 şeklinde olması istenilen şartı sağlarken 1223145 ve 11323245 olması bu şartı sağlamamaktadır. İstenilen şartı sağlayan sekiz kartlık deste kaç farklı şekilde oluşturulur? Somut materyaller ile denemeler yapınız. Ulaştığınız sonuçları genelleştirmeye çalışınız.



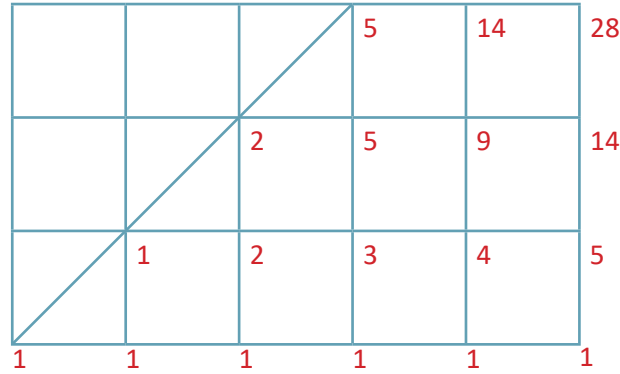
1, 2, ..., m'ye kadar numaralandırılmış m tane karttan oluşan bir deste ile 1, 2, ..., n'ye kadar numaralandırılmış n tane karttan oluşan bir deste, her iki destede bulunan kartların her biri kendi içerisinde sıralı kalmak şartıyla karılarak m+n tane karttan oluşan bir deste kaç farklı şekilde oluşturulur?

**Etkinlik Formu Soru 1a****Kart Karma Oyunu**

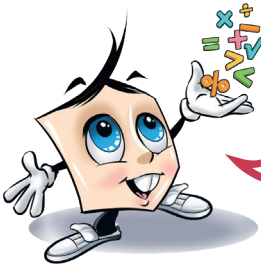
İstenilen şartı sağlayan sekiz kartlık destenin kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini belirlemek için somut materyallerle denemeler yapılması sağlanır.

Kartların karılmasında istenilen şartı sağlayan durumların belirlenmesinde, koordinat sisteminde (0,0) noktasından (5,3) noktasına çizilebilecek 8 birim uzunluğunda yolların çizilmesi bir çözüm modeli olarak kullanılabilir. Bu çözüm modelinde herhangi (x, y) noktasından sağa doğru bir birim ilerlemek (x+1, y), yukarıya bir birim ilerlemek (x, y+1) şartıyla y'nin x' ten büyük ($y > x$) olmadığı farklı yolların sayısı istenilen şartı sağlar.

Örneğin sağa doğru ilerleme 'S' ile yukarıya doğru ilerleme 'Y' ile gösterilirse yeni oluşan destenin 11223345 şeklinde sıralanması, SYSYSYSS yolu ile modellenenebilir. Benzer şekilde yeni oluşan destenin 12312345 şeklinde olması, SSSYYSSS yolu ile modellenenebilir. Yeni oluşan destenin 1223145 şeklinde olması istenilen şartı sağlamaz çünkü bu şekilde bir yol çizilmesi mümkün değildir. İstenilen şartı sağlayan yolların sayısı aşağıda gösterildiği gibi aşamalı ilerlenerek 28 olarak hesaplanır. O hâlde iki destede bulunan kartların her biri kendi içerisinde sıralı kalmak şartıyla karılarak sekiz kartlık bir deste 28 farklı şekilde oluşturulur.



Kart karma oyununda sonucu kombinasyon kavramını kullanarak hesaplayınız?

**Önceki Etkinliklerden Hatırlatma**

3 tane Y ve 5 tane S harfini bir sıraya dizilebilmek için, bu harflerin dizilecekleri toplam $3 + 5$ konumdan 3 tane Y'nin yerleşeceği konumları seçmek yeterlidir. Bu ifadenin matematiksel gösterimi $\binom{8}{3}$ olarak ifade edilir (*Kombinasyon etkinliği*).

Bu yolla elde edilen sonuç 3 tane Y ve 5 tane S harfini bir sıraya dizilebilmek için hesaplanan tekrarlı permütasyon sonuç ifadesine $\frac{8!}{3! \cdot 5!}$ eşittir (*Tekrarlı permütasyon etkinliği*).

Bu sonuç (0,0) noktasından (5,3) noktasına çizilebilecek 8 birim uzunluğunda tüm yolların sayısı olan $\binom{8}{3}$ sonucundan köşegeni geçen ($y > x$) ya da üstünde kalan yolların sayısının $\binom{8}{2}$ çıkarılması ile $\binom{8}{3} - \binom{8}{2} = 28$ olarak hesaplanır (Köşegeni geçen ($y > x$) ya da üstünde kalan yolların sayısının $\binom{8}{2}$ olmasını tartışınız ve araştırınız.).

TANIM

m tane 1 ve n tane 0'ı bir sıraya dizebilmek için, bu sayıların dizileceği toplam $m + n$ konumdan m tane 1'in yerleşeceği konumları seçmek $C(m + n, m)$ yeterlidir. Bu sonuç tekrarlı permütasyon ifadesinin eşdeğer ifadesidir.

Kart karma oyunu ve çözüm modelinden yararlanarak benzer sorular oluşturunuz ve cevaplayınız. (Etkinlik Formu Soru 1b, 1c, 1d)

Şekilde gösterildiği gibi birden m 'ye kadar numaralandırılmış ve sıralanmış m kartlık bir deste ile birden n 'ye kadar numaralandırılmış ve sıralanmış n kartlık bir deste bulunmaktadır. Bu iki destede bulunan kartların her biri kendi içerisinde sıralı kalmak şartıyla karılarak $m+n$ kartlık bir deste oluşturulmak istenilmektedir. İstenilen şartı sağlayan deste kaç farklı şekilde oluşturulur?

Bu sonuç tüm yolların sayısı olan $\binom{m+n}{n}$ sonucundan köşegenin üstünde kalan yolların sayısının $\binom{m+n}{n-1}$ çıkarılması ile $\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{n-1}$ olarak hesaplanır.



ARAŞTIRMA

Çözümleri inceleyiniz ve genellemeye çalışınız. Bu gibi durumların çözümü ile Dyck dizileri arasındaki ilişkiyi araştırınız.

Köşegeni geçen ($y > x$) ya da üstünde kalan yolların sayısının $\binom{8}{2}$ olmasını gerektelendiriniz. Birden m 'ye kadar numaralandırılmış ve sıralanmış m kartlık bir deste ile birden n 'ye kadar numaralandırılmış ve sıralanmış n kartlık bir deste için hesaplanan köşegeni geçen ($y > x$) ya da üstünde kalan yolların sayısının $\binom{m+n}{n-1}$ olmasını gerektelendiriniz.

**TANIM****Tekrarlı Kombinasyon**

En az iki tanesi eş olan nesnelerin bir kısmının oluşturduğu toplulukların sayısına tekrarlı kombinasyon sayısı denir. Her birisinden istenilen sayıda kullanılabilen r çeşit nesneden n tanesinin seçilip grup oluşturulması $\binom{n+r-1}{r-1}$ farklı şekilde yapılabilir. Kombinasyon kavramının özellikleri gereği bu ifade $\binom{n+r-1}{n}$ ifadesine eşittir. Bu işlemde her çeşit nesneden kaç tane alınacağına karar vermek gereklidir.

Etkinlik Formu Soru 2**Özdeş Hamle Pullarının Dağılımı**

18 özdeş hamle pulu 7 oyuncuya,

- Kaç farklı şekilde,
- Her oyuncu en az bir pul almak koşulu ile kaç farklı şekilde,
- İlkinde en az üç, ikincisinde en az dört, üçüncüsünde en az iki ve diğer oyunculara en az bir pul olmak koşulu ile kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayınız.

Somut materyaller ile denemeler yapınız. Bu soruyu genelleştirerek n pulun r oyuncuya istenilen şartlarda kaç farklı dağıtılabileceğini veren tekrarlı kombinasyon ifadelerini gerekçelendirerek yazınız.

- Oyunculara düşen pul sayıları $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ olarak ifade edilir ve $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = 18$ denklemi yazılır. Denklemin negatif olmayan tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısı 18 pulun 7 oyuncuya kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini verir. Pullar '0' ve oyuncuları düşen pul ayrıcaları '1' ile gösterilirse her çözüm 0 ve 1'lerin bir dizilimini verir. Pul sayısı olan 18 tane 0 ile bu pulların 7 kişiye bölünmesini sağlayan $7 - 1 = 6$ tane ayrıcalı temsil eden 1'in kaç farklı şekilde dizilebileceği istenilen cevabı verir. En solda yazılan 1'den önceki 0'ların sayısı a_1 ve bu şekilde devam edildiğinde en sağda yazılan 1'den sonraki 0'ların sayısı a_7 sayısını temsil etmektedir. Aşağıdaki tablo bazı dağılım örneklerini ve karşılık gelen dizilişleri temsil etmektedir.

Pul sayısı	Ayrıcalık sayısı	Dizi	Pulların dağılımı						
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
		000100010001001010000100	3	3	3	2	1	4	2
		0001000000011000011000001	3	6	0	4	0	5	0
		100001001001000001010000	0	4	2	2	5	1	4
		0000000000000011000001111	13	0	5	0	0	0	0
		010101000000000001000110	1	1	1	11	3	0	1

Pul sayısı olan 18 tane 0 ile bu pulların 7 kişiye bölünmesini sağlayan $7 - 1 = 6$ tane ayrıcalı temsil eden 1'in kaç farklı şekilde dizilebileceği tekrarlı kombinasyon sayısı olan $\binom{24}{18}$ ifadesi ile hesaplanabilir. Bu ifade $\binom{24}{6}$ ifadesine eşdeğerdir.

TANIM

Negatif Olmayan Tam Sayı Çözümlerin Sayısı

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ negatif olmayan tam sayıları için $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r = n$ denkleminin çözümlerinin sayısı tekrarlı kombinasyon sayısı olan $\binom{n+r-1}{r-1}$ ifadesidir. Kombinasyon kavramının özellikleri gereği bu ifade $\binom{n+r-1}{n}$ ifadesine eşittir.

- b) Oyunculara düşen pul sayıları $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ olarak ifade edilir ve $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 \geq 1$ olması gerekir. Bu şartı garantilemek için dağıtım işleminden önce her oyuncuda birer tane pul olacak şekilde toplamda 7 tane pul verilir. $a_1' + 1 = a_1, \dots, a_7' + 1 = a_7$ olmak üzere;

$$a_1' + a_2' + a_3' + \dots + a_7' + 7 = 18 \text{ denklemini yazılır.}$$

$a_1' + a_2' + a_3' + \dots + a_7' = 11$ denkleminin negatif olmayan tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısı 18 pulun 7 oyuncuya her oyuncu en az bir pul almak koşulu ile kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini verir. Pullar '0' ve oyunculara düşen pul ayraçları '1' ile gösterilirse her çözüm 0 ve 1'lerin bir dizilimini verir. Geriye kalan pul sayısı olan 11 tane 0 ile bu pulların 7 kişiye bölünmesini sağlayan $7 - 1 = 6$ tane ayraç temsil eden 1'in kaç farklı şekilde dizilebileceği istenilen cevabı verir. En solda yazılan 1'den önceki 0'ların sayısı a_1 ve bu şekilde devam edildiğinde en sağda yazılan 1'den sonraki 0'ların sayısı a_7 sayısını temsil etmektedir. Aşağıdaki tablo bazı dağılım örneklerini ve karşılık gelen dizilişleri temsil etmektedir.

Pul sayısı	Dağıtılacak pul sayısı	Ayraç sayısı	Dizi	Pulların dağılımı						
				a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
18	$18 - 7 = 11$	$7 - 1 = 6$	00010001000111100	3	3	3	0	0	0	2
			01001000100001101	1	2	3	4	0	1	0
			000001110010001100	5	0	0	2	3	0	2

En az pul alma koşulundan sonra kalan pul sayısı olan 11 tane 0 ile bu pulların 7 kişiye bölünmesini sağlayan $7 - 1 = 6$ tane ayraç temsil eden 1'in kaç farklı şekilde dizilebileceği tekrarlı kombinasyon sayısı olan $\binom{17}{11}$ ifadesi ile hesaplanabilir. Bu ifade $\binom{17}{6}$ ifadesine eşdeğerdir.

TANIM

Pozitif Tam Sayı Çözümlerin Sayısı

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ pozitif tam sayıları için $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r = n$ denklemini $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r \geq 1$ koşulları ile $a_1' + a_2' + a_3' + \dots + a_r' + r = n$ olarak düzenlenir. $a_1' + a_2' + a_3' + \dots + a_r' = n - r$ denkleminin çözümlerinin sayısı tekrarlı kombinasyon sayısı olan $\binom{n-1}{r-1}$ ifadesidir. Kombinasyon kavramının özellikleri gereği bu ifade $\binom{n-1}{n-r}$ ifadesine eşittir.



c) Oyunculara düşen pul sayıları $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ olarak ifade edilir ve

$a_1 \geq 3, a_2 \geq 4, a_3 \geq 2, a_4 \geq 1, \dots, a_7 \geq 1$ olması gerekir. Bu şartı garantilemek için dağıtım işleminden önce birinciye üç, ikinciye dört, üçüncüye 2 ve diğerlerine birer olmak üzere toplam 13 tane pul verilir. $a_1' + 3 = a_1, a_2' + 4 = a_2, a_3' + 2 = a_3, \dots, a_7' + 1 = a_7$ olmak üzere

$a_1' + a_2' + a_3' + \dots + a_7' + 13 = 18$ denklemi yazılır.

$a_1' + a_2' + a_3' + \dots + a_7' = 5$ denkleminin negatif olmayan tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısı 18 pulun 7 oyuncuya soruda istenilen koşullarda kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini verir. Etkinliğin a ve b şıklarında verilen açıklamalar doğrultusunda aşağıdaki tablo bazı dağılım örneklerini ve karşılık gelen dizilişleri temsil etmektedir.

Pul sayısı	Dağıtılacak pul sayısı	Ayraç sayısı	Dizi	Pulların dağılımı						
				a_1'	a_2'	a_3'	a_4'	a_5'	a_6'	a_7'
18	$18 - 13 = 5$	$7 - 1 = 6$	10001111100	0	3	0	0	0	0	2
			010010101101	1	2	1	1	0	1	0
			01110010110	1	0	0	2	1	0	1

En az pul alma koşulundan sonra kalan pul sayısı olan 5 tane 0 ile bu pulların 7 kişiye bölünmesini sağlayan $7 - 1 = 6$ tane ayrıca temsil eden 1'in kaç farklı şekilde dizilebileceği tekrarlı kombinasyon sayısı olan $\binom{11}{5}$ ifadesi ile hesaplanabilir. Bu ifade $\binom{11}{6}$ ifadesine eşdeğerdir.

TANIM

Altan Sınırlı Tam Sayı Çözümlerin Sayısı

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ pozitif tam sayıları için $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r = n$ denklemi $a_1 \geq x_1, a_2 \geq x_2, a_3 \geq x_3, a_4 \geq x_4, \dots, a_r \geq x_r$ ($x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_r = x$) koşulları ile $a_1' + a_2' + a_3' + \dots + a_r' + x = n$ şeklinde düzenlenir. $a_1' + a_2' + a_3' + \dots + a_r' = n - x$ denkleminin çözümlerinin sayısı tekrarlı kombinasyon sayısı olan $\binom{n-x+r-1}{r-1}$ ifadesidir. Kombinasyon kavramının özellikleri gereği bu ifade $\binom{n-x+r-1}{n-x}$ ifadesine eşittir.



ARAŞTIRMA

18 pulun 4 oyuncuya, her oyuncunun en fazla 6 pul alması şartıyla kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayınız. Bu sorunun cevabı üstten sınırlı tam sayı çözümlerin hesaplanmasını gerektirir. Üstten sınırlı tam sayı çözümlerin tekrarlı kombinasyon ifadesini içerme dışarma prensibinden yararlanarak yazınız. Üstten sınırlı tam sayı çözümlerin hesaplanmasının içerme dışarma prensibi ile ilişkisini açıklayınız.



Hamle Pullarının Dağılımı

18 veya daha az sayıda pulun 7 oyuncuya kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayınız. Bu soruyu genelleştirerek n veya daha az sayıda pulun r oyuncuya kaç farklı dağıtılabileceğini veren tekrarlı kombinasyon ifadesini gerekçelendirerek yazınız.

Etkinlikte verilen durumda $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 \leq 18$ eşitsizliğinin çözümü aranmaktadır. Bu soru artan pulları alan hayali bir oyuncu eklenerek 18 pulun $7 + 1 = 8$ oyuncuya dağıtılması ifadesine eşdeğerdir. Oyunculara düşen pul sayıları

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_7, a_8$ olarak ifade edilir ve $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 + a_8 = 18$ denklemi yazılır. Denklemin negatif olmayan tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısı 18 pulun 8 oyuncuya kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini verir. Önceki etkinliğin a ve b şıklarında verilen açıklamalar doğrultusunda aşağıdaki tablo bazı dağılım örneklerini ve karşılık gelen dizilişleri temsil etmektedir.

Pul sayısı	Ayraç sayısı	Dizi	Pulların dağılımı							
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
18	$8 - 1 = 7$	0001000100010010100001010	3	3	3	2	1	4	1	1
		0001000000110000110000011	3	6	0	4	0	5	0	0

Pul sayısı olan 18 tane 0 ile bu pulların 8 kişiye bölünmesini sağlayan $8 - 1 = 7$ tane ayraç temsil eden 1'in kaç farklı şekilde dizilebileceği tekrarlı kombinasyon sayısı olan $\binom{25}{18}$ ifadesi ile hesaplanabilir. Bu ifade $\binom{25}{7}$ ifadesine eşdeğerdir.

TANIM

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r \leq n$ Eşitsizliğinin Tam Sayı Çözümlerin Sayısı

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_r, a_{r+1}$ negatif olmayan tam sayıları için $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r \leq n$ eşitsizliğinin çözümlerinin sayısı $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{r+1} = n$ denkleminin çözümlerinin sayısına eşittir. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r \leq n$ eşitsizliği artan pulları alan hayali bir oyuncu eklenerek n pulun $r + 1$ oyuncuya dağıtılması ifadesine eşdeğerdir. Dağılımların sayısı $\binom{n+r}{r}$ olarak hesaplanır.

**ARAŞTIRMA**

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r \leq n$ eşitsizliğinin tam sayı çözümlerin sayısını $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r = m$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ için ayrı ayrı hesaplanan çözüm sayılarının toplamı olarak ifade ediniz. Binom katsayılarından yararlanarak genel çözümü veren tekrarlı kombinasyon ifadesine ulaşınız.

n özdeş topun r farklı kutuya dağıtılmasının n pulun r oyuncuya dağıtımı ile eşdeğerliği düşünülerek benzer sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3)

**ARAŞTIRMA**

Birbirinden farklı n topun r özdeş kutuya dağıtımını hesaplayınız. n elemanlı bir kümenin boş olmayan r tane alt kümeye dağılımlarını hesaplayınız. Ulaştığınız sonuçları karşılaştırınız.

n elemanlı bir kümenin r tane boş olmayan alt kümeye dağılım sayısını veren ve $S(n, k)$ ile gösterilen ikinci tür Stirling sayısını araştırınız. $S(n, k)$, her kutuda en az bir tane top bulunması şartıyla n farklı topun kutulara kaç farklı şekilde dağılacığını ifade eder.

Etkinlik Formu Soru 4

Elimizde bulunan özdeş kutu sayısı önemsizmeden 5 topun bu kutulara kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayınız.

Çözüm:

Özdeş kutu sayısı önemsiz olduğu için bu dağılım yandaki tabloda gösterildiği gibi 7 farklı şekilde yapılabilir.

Kutu sayısı	Dağılım				
1	5				
2	4	1			
2	3	2			
3	3	1	1		
3	2	2	1		
4	2	1	1	1	
5	1	1	1	1	1

Etkinlik Formu Soru 5 **n Tane Nesneden R Tanesinin Seçilmesi ve Sıralanması**

Önceki etkinliklerden (permütasyon, tekrarlı ve dönel permütasyon, kombinasyon) ve bu etkinlikten n tane nesneden r tanesinin seçilmesi ve sıralanması ile ilgili elde ettiğiniz çıkarımları tabloda boş bırakılan bölümlere yazınız. Nesnelerin özdeş olması, hepsinin farklı olması, her türden belli sayıda ya da istenildiği kadar olması durumlarını tartışınız.

Nesne	Özdeş olmayan nesneler	Sınırlı sayıda tekrarlı nesneler	Sınırsız sayıda tekrarlı nesneler
Matematiksel ifadesi	$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$	$(\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{a_t, \dots, a_t}_{n_t})$	$(\underbrace{a_1, \dots}_{\infty}, \dots, \underbrace{a_n, \dots}_{\infty})$
r nesnenin diziliş sayısı	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	$(n_1 + n_2 + \dots + n_t = n)$ $(r = n)$ için: $\frac{n!}{(n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_t!)}$ $(r < n)$ için ifade yok	n^r
r nesnenin seçiliş sayısı	$C(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$	$x_1 \leq n_1, \dots, x_t \leq n_t$ koşulları ile $x_1 + \dots + x_t = r$ denklemlerinin çözümlerinin sayısı	$\binom{n+r-1}{r}$

Permütasyon ve kombinasyon hesapları yapmayı gerektiren sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 6, 7)



ARAŞTIRMA

(Ardışık tam sayılar içermeyen seçimler) $\{1, 2, \dots, 20\}$ kümesinden herhangi ikisi ardışık olmayan 6 tane tam sayı kaç farklı şekilde seçilebilir?

Sıralı 20 tane konumdan, herhangi iki tanesi arasında en az bir tane boşluk bulunması şartı ile 6 tane konumun belirlenmesi ile hesaplanabilir. İstenilen sonuç $\binom{20-6+1}{6} = \binom{15}{6}$ olur.

$\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinden herhangi ikisi ardışık olmayan p tane tam sayı kaç farklı şekilde seçilebilir?

Sıralı n tane konumdan, herhangi iki tanesi arasında en az bir tane boşluk bulunması şartı ile sıralı n tane konumdan p tane konumun belirlenmesi ile hesaplanabilir. İstenilen sonuç $\binom{n-p+1}{p}$ olur.

Etkinlik Formu Soru 8

Fonksiyonların Sayısı

Önceki etkinliklerden (permütasyon, tekrarlı ve dönele permütasyon, kombinasyon) ve bu etkinlikten sonlu iki küme arasında tanımlı olan tüm fonksiyonların, 1-1 ve örten fonksiyonların sayıları ile ilgili elde ettiğiniz çıkarımları tabloda boş bırakılan bölümlere yazınız. $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, m elemanlı Y kümesine tanımlı tabloda belirtilen şartları sağlayan $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonlarının sayılarını tartışınız.



$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, m elemanlı Y kümesine tanımlı $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için koşullar	Fonksiyon Sayısı	Gerekçelendirme ve Önceki Etkinliklerle İlişkilendirme
Tüm fonksiyonların sayısı	m^n olarak hesaplanır.	Önceki etkinliklerden hatırlatma (permütasyon etkinliği)
$n \leq m$ için 1-1 Fonksiyonların Sayısı	$P(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$	Önceki etkinliklerden hatırlatma (permütasyon etkinliği)
$n \geq m$ için Örten Fonksiyonların Sayısı	$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$	İleri araştırmaya yönlendirme
$n = m$ 1-1 ve Örten Fonksiyonların Sayısı	$n!$	Önceki etkinliklerden hatırlatma (temel sayma ve faktöriyel etkinliği)



ARAŞTIRMA

$n \geq m$ için örten fonksiyonların sayısının nasıl hesaplanabileceği ile ilgili hesaplama ve araştırma yapılması sağlanır.

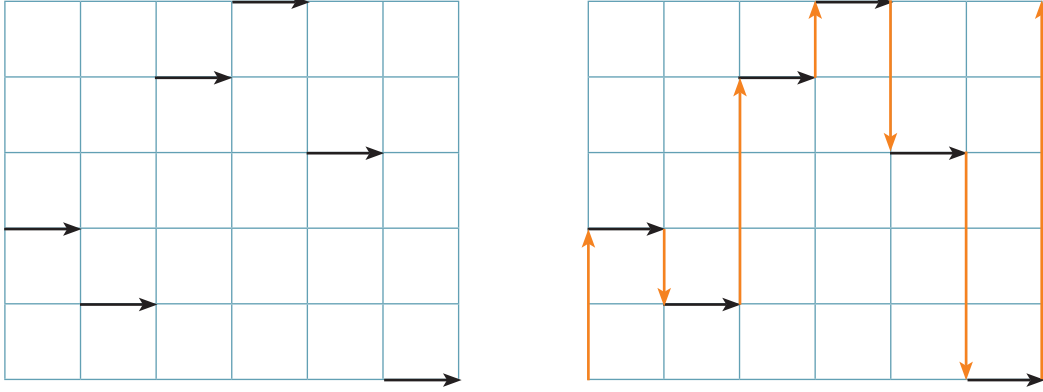
Etkinlik Formu Soru 9

Gözlemcilerin Dağılımı

Bir gökyüzü gözlem etkinliğinde 25 kişilik gruba 5 farklı atölyede görev verilecektir. Görev dağılımının kaç farklı şekilde yapılabileceğini oluşturduğunuz tablodan yararlanarak hesaplayınız. Atölye görevlerinin gözlemcilere dağılımını, gözlemciler kümesinden atölyeler kümesine bir fonksiyon olarak düşünerek sonucu tartışınız. Benzer soruları oluşturduğunuz tabloda verilen farklı fonksiyon koşullarına göre kurgulayınız ve cevaplayınız.

Atölye görevlerinin gözlemcilere dağılımını, gözlemciler kümesinden atölyeler kümesine bir fonksiyon olarak düşününüz	Fonksiyon Sayısı	Gerekçelendirme ve Önceki Etkinliklerle İlişkilendirme
Tüm fonksiyonların sayısı	5^{25} olarak hesaplanır.	Önceki etkinliklerden hatırlatma (permütasyon etkinliği)

Benzer sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 10)

Etkinlik Formu Soru 11**Pul Sürüklenme Oyunu**

Oyunda verilen şartlara göre pulu sürükleyerek A noktasından B noktasına ulaştıran tüm yollarda sağa doğru 6 birim ilerlenmesi gerekir. Izgaradaki her sütun için sağa doğru ilerlenecek bir hamlenin yerinin belirlenmesi farklı yolların belirlenmesini sağlar. Toplam sütun sayısı 6 olup her sütun için 6 farklı sağa hamle belirlenmesi mümkün olduğundan istenilen cevap 6^6 olarak hesaplanır.

Örnek:

3 erkek ve 4 kadının, kadınlar kendi içerisinde soldan sağa doğru boy sırasında erkeklerden Mustafa erkekler arasında ortada olmak koşuluyla kaç farklı şekilde dizilebileceğini hesaplayınız.

Çözüm:

Kadınların ya da erkeklerin yan yana olmaları gerekmemektedir. Mevcut 7 yerden 4 tanesi kadınlar için $\binom{7}{4}$ farklı şekilde seçilir. Bu 4 yere kadınlar bir farklı şekilde dizilirler. Kalan 3 yerden ortadakine ise Mustafa gelir. Geriye kalan mevcut 2 yere diğer erkekler $2!$ farklı şekilde yerleşirler. İstenilen cevap $\binom{7}{4} \cdot 2 = 70$ olarak hesaplanır.

Etkinlik Formu Soru 12**İkiz Çiftlerin Dağılımı**

6 çift ikizden oluşan bir grupta, birbirinin ikizi olanlar aynı takımda olmamak koşulu ile 6 ve 4 kişilik takımlara ayrılmanın kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini hesaplamak için aşağı tablolarla boş bırakılan yerleri hesaplayınız.

a) İlk takımın kaç farklı şekilde oluşturulabileceği aşağıdaki tablo yardımıyla hesaplanır.

Takımdaki kişiler	1	2	3	4	5	6
Kaç farklı şekilde seçilebilecekleri	12	10	8	6	4	2
Açıklama	Herhangi birini seçebiliriz.	Kalan 11 kişiden seçilenin ikizi çıkartılır.	Kalan 9 kişiden seçilenin ikizi çıkartılır.	Kalan 7 kişiden seçilenin ikizi çıkartılır.	Kalan 5 kişiden seçilenin ikizi çıkartılır.	Kalan 3 kişiden seçilenin ikizi çıkartılır.



İlk takım 12.10.8.6.4.2 farklı şekilde oluşturulur. İkinci takım geriye kalan öğrencilerden tek türlü oluşur. Ancak hem kişiler hem de takımlar açısından sıralama önemsiz olduğundan istenilen sonuç $\frac{12.10.8.6.4.2}{6! \cdot 2!} = 32$ olarak hesaplanır.

b) İlk takımın kaç farklı şekilde oluşturulabileceği aşağı tablo yardımıyla hesaplanır.

Takımdaki kişiler	1	2	3	4
Kaç farklı şekilde seçilebilecekleri	12	10	8	6
Açıklama	Herhangi birini seçebiliriz.	Kalan 11 kişiden seçilenin ikizi çıkartılır.	Kalan 9 kişiden seçilenin ikizi çıkartılır.	Kalan 7 kişiden seçilenin ikizi çıkartılır.

İlk takım 12.10.8.6 farklı şekilde oluşturulur. Ancak kişiler açısından sıralama önemsiz olduğundan istenilen sonuç $\frac{12.10.8.6}{4!} = 240$ olarak hesaplanır. Geriye iki çift ikiz ve ikizleri ilk takımda yer alan dört kişi kalır. İki çift ikizin 2. ve 3. takımlara ayrılması dikkate alınır. İkinci takım $2 \cdot 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} = 24$ farklı şekilde oluştur. Üçüncü takım geriye kalan öğrencilerden tek türlü oluşur. Ancak takımlar açısından sıralama önemsiz olduğundan istenilen sonuç $\frac{240 \cdot 24}{3!} = 960$ olarak hesaplanır.

Dağılım ile ilgili benzer sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 13, 14)

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, n elemanlı Y kümesine tanımlı 1-1 ve örten herhangi bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun kaç farklı şekilde tanımlanabileceğini araştırınız.
- Birden m 'ye kadar numaralandırılmış ve sıralanmış m kartlık bir deste ile birden n 'ye kadar numaralandırılmış ve sıralanmış n kartlık bir deste için etkinlik içerisinde hesaplanan köşegeni geçen ($y > x$) ya da üstünde kalan yolların sayısının $\binom{m+n}{n-1}$ olmasını gerekçelendiriniz.
- Üstten sınırlı tam sayı çözümlerin tekrarlı kombinasyon ifadesini içermeye dışarma prensibinden yararlanarak yazınız. Üstten sınırlı tam sayı çözümlerin 18 pulun 4 oyuncuya, her oyuncunun en fazla 6 pul alması şartıyla kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayınız.
- $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r \leq n$ eşitsizliğinin tam sayı çözümlerin sayısını $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r = m$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ için ayrı ayrı hesaplanan çözüm sayılarının toplamı olarak ifade ediniz. Binom kat-sayılarından yararlanarak genel çözümü veren tekrarlı kombinasyon ifadesine ulaşınız.

- Birbirinden farklı n topun r özdeş kutuya dağıtımını hesaplayınız. n elemanlı bir kümenin boş olmayan r tane alt kümeye dağılımlarını hesaplayınız. Ulaştığınız sonuçları karşılaştırınız.
- *Stirling sayısı*: n elemanlı bir kümenin r tane boş olmayan alt kümeye dağılım sayısını veren ve $S(n, k)$ ile gösterilen ikinci tür Stirling sayısını araştırınız. $S(n, k)$, her kutuda en az bir tane top bulunması şartıyla n farklı topun kutulara kaç farklı şekilde dağılacağını ifade eder.
- *0/1 Dizileri ve Dyck dizisi*: Dyck dizileri içeren durumların tekrarlı kombinasyon ile nasıl ilişkili olduğunun tartışılması, araştırılması sağlanır.
- *Catalan sayıları*: Tekrarlı kombinasyonla ilgili farklı durumların çözümünde Catalan sayıları model olarak kullanılabilir. Hangi soru modellerinin çözümünde bu sayı dizisi olduğunu inceleyiniz.
- Ardışık tam sayılar içermeyen seçimlerin sayısını araştırınız.

KAYNAKLAR

- Bergeron, F., Labelle, G. ve Leroux, P. (2013). *Combinatorial species and tree-like structures*. (Trans. Ed. Margaret Readdy) Cambridge University Press, Cambridge.
- CEMC(2020). The Centre for Education in Mathematics and Computing 2020 Canadian Team Mathematics Contest, http://www.cemc.uwaterloo.ca/contests/past_contests.html (Erişim tarihi: 13.05.2021).
- Doğanaksoy A., Sulak, F. & Uğuz, M. (2009). *Yarışmalara Hazırlananlar İçin Çözümlü Matematik Problemleri*, Oyak (OYAK Liselerarası Matematik Yarışması).
- Koshy, T. (2009). *Catalan Numbers with Applications*, Oxford University Press, New York.
- Nesin, A. (2019). *Sayma-Kombinasyon Hesapları*. Nesin Yayıncılık.
- Öztürk, F. (1995). *Kombinatorik (Sayma Problemleri)*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.
- Catalan Numbers <https://oeis.org> (Erişim Tarihi: 20.05.2021).
- <https://web.archive.org/web/20040808170406/>
- <http://www.math.harvard.edu/~mantovan/ADMIN/catalan2.pdf> (Erişim Tarihi: 20.05.2021).

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

**Etkinlik Formu Cevapları**

1. a. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

b. 165

c. 572

d. 275

2. a. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

b. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

c. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

3. a. $\binom{13}{3}$ ya da $\binom{13}{9}$

b. $\binom{9}{3}$ ya da $\binom{9}{6}$

c. $\binom{6}{3}$

4. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

5. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

6. 12 taştan 5 tanesi kale ve atlar için seçilir ve bu seçim $\binom{12}{5}$ farklı şekilde yapılır. Seçilen yerlerden ilkinde kale yerleştirilir. Kalan 4 yere ise iki kale ve iki at $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$ şekilde yerleştirilebilir. Kalan 7 yer için geriye kalan taşlar $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ farklı şekilde yerleştirilebilirler. İstenilen cevap $\binom{12}{5} \cdot 6 \cdot 630 = 3780 \cdot \binom{12}{5}$ olarak hesaplanır.

7. Erkek gözlemcilerin sıralanması $7!$

Kadınların dizilebileceği yerlerin seçilmesi $C(8, 4)$

Seçilen yerlere kadınların yerleştirilmesi $4!$

Çarpma ilkesi kullanılarak sonuç $C(8, 4) 7!4!$ olarak hesaplanır.

8. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

9. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

10. 10^{10}

$$P(10, 10) = \frac{10!}{(10 - 10)!} = 10!$$

$10!$

11. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

12. a. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

b. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.

13. Önce 2 rakamları sıralanır.

2		2		2		2		2		2	
---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--

Geriye kalan 7 boşluktan 4 tanesine 1 rakamları $\binom{12}{5} = 35$ farklı şekilde yerleştirilir. İstenilen cevap 35 olarak hesaplanır.

14. Çift rakamlar (22224) $\frac{5!}{4!} = 5$ farklı şekilde sıralanır.

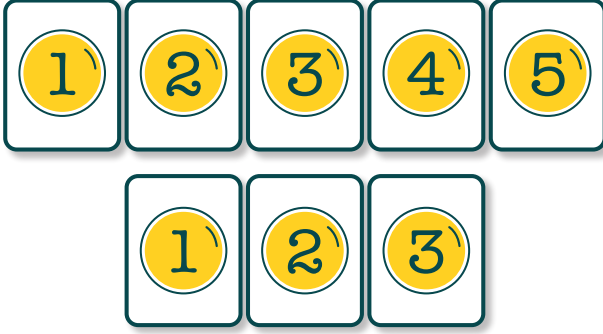
Ç		Ç		Ç		Ç		Ç	
---	--	---	--	---	--	---	--	---	--

Kalan 6 boşluktan 4 tanesi $\binom{6}{4} = 15$ farklı şekilde seçilir. Tek rakamlar (1135) bu dört boşluğa $\frac{4!}{2!} = 12$ farklı şekilde yerleşir. İstenilen cevap $5 \cdot 15 \cdot 12 = 900$ olur.



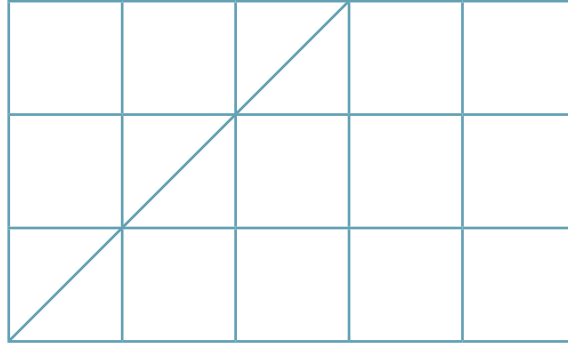
Etkinlik Formu

1.



- a. Şekilde gösterildiği gibi birden beşe kadar numaralandırılmış ve sıralanmış beş kartlık bir deste ile birden üçe kadar numaralandırılmış ve sıralanmış üç kartlık bir deste bulunmaktadır. Bu iki destede bulunan kartların her biri kendi içerisinde sıralı kalmak şartıyla karılarak sekiz kartlık bir deste oluşturulmak istenilmektedir. Örneğin yeni oluşan destenin 11223345 ve 12312345 şeklinde olması istenilen şartı sağlarken 1223145 olması bu şartı sağlamamaktadır. İstenilen şartı sağlayan sekiz kartlık deste kaç farklı şekilde oluşturulur?

Kartların karılmasında istenilen şartı sağlayan durumların belirlenmesinde, koordinat sisteminde (0,0) noktasından (5,3) noktasına çizilebilecek 8 birim uzunluğunda farklı yolların çizilmesi bir çözüm modeli olarak kullanarak aşağıdaki şablon üzerinden sayınız. Bu şablondan b, c ve d şıklarında verilen farklı durumları hesaplamak için yararlanınız.



- b. Birden yediye kadar numaralandırılmış ve sıralanmış yedi kartlık bir deste ile birden dörde kadar numaralandırılmış ve sıralanmış dört kartlık bir deste bulunmaktadır. Bu iki destede bulunan kartların her biri kendi içerisinde sıralı kalmak şartıyla karılarak on bir kartlık bir deste oluşturulmak istenilmektedir. İstenilen şartı sağlayan deste kaç farklı şekilde oluşturulur?
- c. Birden sekize kadar numaralandırılmış ve sıralanmış sekiz kartlık bir deste ile birden beşe kadar numaralandırılmış ve sıralanmış beş kartlık bir deste bulunmaktadır. Bu iki destede bulunan kartların her biri kendi içerisinde sıralı kalmak şartıyla karılarak on üç bir deste oluşturulmak istenilmektedir. İstenilen şartı sağlayan deste kaç farklı şekilde oluşturulur?

- d. Birden sekize kadar numaralandırılmış ve sıralanmış sekiz kartlık bir deste ile birden dörde kadar numaralandırılmış ve sıralanmış dört kartlık bir deste bulunmaktadır. Bu iki destede bulunan kartların her biri kendi içerisinde sıralı kalmak şartıyla karılarak on iki kartlık bir deste oluşturulmak istenilmektedir. İstenilen şartı sağlayan deste kaç farklı şekilde oluşturulur?

2. 18 özdeş hamle pulu 7 oyuncuya,

- Kaç farklı şekilde,
- Her oyuncu en az bir pul almak koşulu ile kaç farklı şekilde,
- İlkinde en az üç, ikincisinde en az dört, üçüncüsünde en az iki ve diğer oyunculara en az bir pul olmak koşulu ile kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayınız.

Somut materyaller ile denemeler yapınız. Bu soruyu genelleştirerek n pulun r oyuncuya istenilen şartlarda kaç farklı dağıtılabileceğini veren tekrarlı kombinasyon ifadelerini gerekçelendirerek yazınız.

3. 10 özdeş topun 4 kutuya,

- Kaç farklı şekilde,
- Her kutuda en az bir top almak koşulu ile kaç farklı şekilde,
- İlkinde en az iki, ikincisinde en az üç ve diğer kutularda en az bir top olmak koşulu ile kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayınız.



Somut materyaller ile denemeler yapınız. Bu soruyu genelleştirerek n topun r kutuya istenilen şartlarda kaç farklı dağıtılabileceğini veren tekrarlı kombinasyon ifadelerini gerekçelendirerek yazınız.

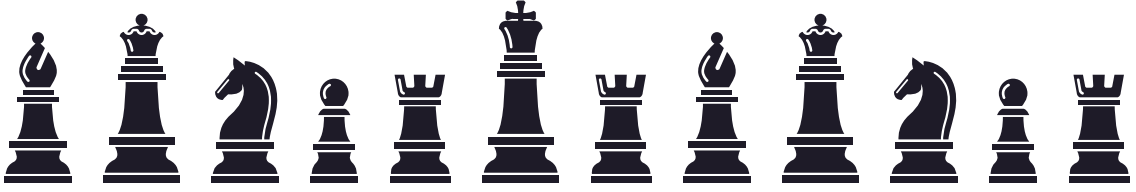
4. Elimizde bulunan özdeş kutu sayısı önemsenmeden 5 topun bu kutulara kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayınız. Farklı top sayıları için benzer sorular üreterek çözünüz ve genel çözüme ulaşıp ulaşılamadığını araştırınız.



5. (n tane nesneden r tanesinin seçilmesi ve sıralanması) Önceki etkinliklerden (temel sayma ve faktöriyel, permütasyon, tekrarlı ve dönel permütasyon, kombinasyon) ve bu etkinlikten n tane nesneden r tanesinin seçilmesi ve sıralanması ile ilgili elde ettiğiniz çıkarımları tabloda boş bırakılan bölümlere yazınız. Nesnelerin özdeş olması, hepsinin farklı olması, her türden belli sayıda ya da istenildiği kadar olması durumlarını tartışınız.

Nesne	Özdeş olmayan nesneler	Sınırlı sayıda tekrarlı nesneler	Sınırsız sayıda tekrarlı nesneler
Matematiksel ifadesi			
r nesnenin diziliş sayısı			
r nesnenin seçiliş sayısı			

6.



Yukarıdaki satranç taşlarının kaç farklı diziliminde ilk kale ilk attan önce gelir?

7. 7 erkek ve 4 kadın gözlemcinin, herhangi iki kadın gözlemci yan yana gelmeyecek şekilde teleskop kuyruğuna kaç farklı şekilde dizilebileceğini tabloda boş bırakılan yerleri hesaplayarak bulunuz.

1. Adım	Erkek gözlemcilerin sıralanması
2. Adım	Kadınların dizilebileceği yerlerin seçilmesi
3. Adım	Seçilen yerlere kadınların yerleştirilmesi

8. (Fonksiyonların sayısı) Önceki etkinliklerden (temel sayma ve faktöriyel, permütasyon) ve bu etkinlikten sonlu iki küme arasında tanımlı olan tüm fonksiyonların, 1-1 ve örten fonksiyonların sayıları ile ilgili elde ettiğiniz çıkarımları tabloda boş bırakılan bölümlere yazınız. $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, m elemanlı Y kümesine tanımlı tabloda belirtilen şartları sağlayan $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonlarının sayılarını hesaplayınız.

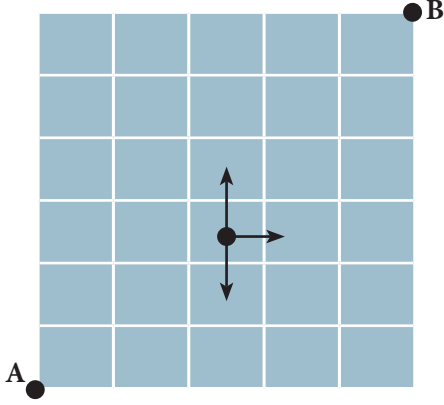
$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere n elemanlı X kümesinden, m elemanlı Y kümesine tanımlı $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için koşullar	Fonksiyon Sayısı	Gerekçelendirme ve Önceki Etkinliklerle İlişkilendirme
Tüm fonksiyonların sayısı		
$n \leq m$ için 1-1 Fonksiyonların Sayısı		
$n \geq m$ için Örten Fonksiyonların Sayısı		
$n = m$ 1-1 ve Örten Fonksiyonların Sayısı		

9. Bir gökyüzü gözlem etkinliğinde 25 kişilik gruba 5 farklı atölyede görev verilecektir. Görev dağılımının kaç farklı şekilde yapılabileceğini oluşturduğunuz tablodan yararlanarak hesaplayınız. Atölye görevlerinin gözlemcilere dağılımını, gözlemciler kümesinden atölyeler kümesine bir fonksiyon olarak düşünerek sonucu yazınız.

Atölye görevlerinin gözlemcilere dağılımını, gözlemciler kümesinden atölyeler kümesine bir fonksiyon olarak düşününüz.	Fonksiyon Sayısı	Gerekçelendirme ve Önceki Etkinliklerle İlişkilendirme
Tüm fonksiyonların sayısı		

10. Bir gökyüzü gözlem etkinliğinde 10 kişilik gruba, 10 farklı atölyede görev verilecektir. Görev dağılımının kaç farklı şekilde yapılabileceğini bir önceki soruda oluşturduğunuz tablodan yararlanarak hesaplayınız. Atölye görevlerinin gözlemcilere dağılımını, gözlemciler kümesinden atölyeler kümesine bir fonksiyon olarak düşünerek sonuçları yazınız.

Atölye görevlerinin gözlemcilere dağılımını, gözlemciler kümesinden atölyeler kümesine bir fonksiyon olarak düşününüz.	Fonksiyon Sayısı	Gerekçelendirme ve Önceki Etkinliklerle İlişkilendirme
Tüm fonksiyonların sayısı		
$n \leq m$ için 1-1 Fonksiyonların Sayısı		
$n = m$ 1-1 ve Örten Fonksiyonların Sayısı		

**11. Pul Sürükleme Oyunu**

Şekilde gösterilen 5 x 6'lık ızgaranın sol alt köşesinde (A noktası) yer alan pul her hamlede bir birim sağa, yukarıya ya da aşağıda doğru yönlendirilebilmektedir. Pulun her noktadan en fazla bir kere geçmesi şartıyla sağ üst köşeye (B noktası) kaç farklı şekilde sürüklenebileceğini hesaplayınız.

12. 6 çift ikizden oluşan bir grupta birbirinin ikizi olanlar aynı takımda olmamak koşulu ile

- a. 6 kişiden
- b. 4 kişiden oluşan takımlara ayrılmanın kaç farklı şekilde yapılabileceğini hesaplayınız.

Altı kişilik takımlara ayrılmanın kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini hesaplamak için aşağı tabloda boş bırakılan yerleri hesaplayınız.

Takımdaki kişiler	1	2	3	4	5	6
Kaç farklı şekilde seçilebilecekleri						
Açıklama						

Dört kişilik takımlara ayrılmanın kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini hesaplamak için aşağı tabloda boş bırakılan yerleri hesaplayınız.

Takımdaki kişiler	1	2	3	4
Kaç farklı şekilde seçilebilecekleri				
Açıklama				

13. 1111222222 rakamlarıyla yazılan 10 basamaklı sayıların kaçında herhangi iki tane 1 rakamı yan yana bulunmaz?**14. 113522224 rakamlarıyla yazılan 9 basamaklı sayıların kaçında herhangi iki tek rakam yan yana değildir?**



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: OLASILIK

: Sonlu Matematik/Olasılık

: 1. Örnek uzay, deney, çıktı, bir olayın tümleyeni, kesin olay, imkânsız olay, ayrık olay ve ayrık olmayan olay kavramlarını açıklar.

2. Olasılık kavramı ile ilgili uygulamalar yapar.

3. Basit olayların olma olasılıklarını permütasyon ve kombinasyon yardımıyla hesaplar.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

: Etkinlik Formu, madeni paralar, zarlar.

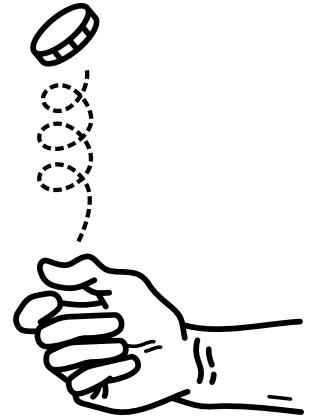
Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte; örnek uzay, deney, çıktı, bir olayın tümleyeni, kesin olay, imkânsız olay, ayrık olay ve ayrık olmayan olay kavramlarını açıklamak ve örnek uzay, deney, çıktı kavramlarını eş olası durumlardan yola çıkılarak eş olası olmayan durumlar için de örneklendirmek ve tanımlamak amaçlanmaktadır. Ayrık olay ve ayrık olmayan olayı açıklamak, olasılık kavramı ile ilgili uygulamalar yapmak ve eş olası olan ve olmayan olayların olasılıklarını hesaplamak etkinliğin amaçları arasındadır. Tümleyen, ayrık olay ve ayrık olmayan olay ile ilgili olasılıkların hesaplanması, gerçek yaşam problemlerinin çözülmesi ve basit olayların olma olasılıklarının permütasyon ve kombinasyon yardımıyla hesaplanması sağlanır.

Başlarken...

Bir şeyin olmasının veya olmamasının matematiksel değeri olarak ifade edilen ve istatistik gibi pek çok alanda olayların olabilirliğini hesaplamak için yaygın şekilde kullanılan olasılık (ihtimaliyet) teorisinin tarihsel temelleri şans oyunlarının matematiksel incelemelerine dayanır. Aşağıda verilen şans oyununun matematiksel incelemesini yapınız.

Sahip olduğunuz madeni para sayısının arkadaşınızın sahip olduğu madeni para sayısından bir fazla olması durumunda her ikiniz de madeni paraları aynı anda havaya atıp tura sayısını gözlemlerseniz sizin arkadaşınızdan daha fazla tura elde etme ihtimaliniz nedir (paraların her iki yüzünün gelmesi eşit)?





Yukarıda verilen durumda daha fazla tura gelmesi ihtimalinin hesaplanmasında madeni paralar ile deneyler yapılması ve çıkarımlarda bulunulması sağlanır. Bir fazla madeni parası olan kişi ya diğerinden daha fazla tura atacaktır ya da daha fazla yazı atacaktır. Bir fazla madeni paraya sahip olduğu için her ikisi birden sağlanmaz ya ilki ya da ikincisi gerçekleşir. Simetriden kaynaklı olarak birbirlerinden bağımsız ve eşi olmayan bu iki durum eşit ihtimalle gerçekleşebilir. O hâlde bir fazla madeni parası olan kişinin diğerinden daha fazla tura atması ihtimali $\frac{1}{2}$ 'dir. Bu sonuç her iki kişinin sahip oldukları madeni para sayısından bağımsızdır.

Buna benzer durumlarda ve gerçek yaşam problemlerinde ihtimaller üzerine hesaplar yapmak olasılık kavramı ile ilgilidir. Benzer durumları örneklendiriniz. Bu durumlarda ortak ve farklı olan yanları belirleyiniz.

Etkinlik Formu Soru 1

Olasılık konusu ile ilgili örnek uzay, deney ve olay kavramları ile ilgili tabloda verilen açıklamalar ile verilen örnek üzerinden boş bırakılan kısımları tamamlayınız. Son iki satırda deney belirleyerek doldurunuz. Bu tablodan ulaştığınız çıkarımları belirtiniz.

Deney: Belirli koşullar altında tekrarlanabilen ve her tekrarda farklı sonuçlanabilen işlem	Örnek uzay: Bir deney sonucunda olası çıktılardan ya da görünüşlerin bütününden oluşan küme	Olay: Örnek uzayın her bir alt kümesi
1. Bir paranın atılması	yazı (Y) veya tura (T) gelebilir $\{Y, T\}$	Paranın yazı gelmesi $\{Y\}$
2. Bir gruptaki bireylerin cinsiyetlerini konu edilen deney	Erkek (E) veya kadın (K) olabilir $\{E, K\}$	Erkek olması $\{E\}$
3. Bir zarın atılması	Altı yüzünden biri gelebilir $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	Üst yüze gelen sayının 3 olması $\{3\}$
4. İlk defa yazı gelene kadar bir paranın atılması	Herhangi birinde gelebilir $\{(Y), (TY), (TTY), \dots\}$	Sekizinci atışta yazı gelmesi $\{(TTTTTTTY)\}$
5. Ağırlıkların 500 kilogramdan az olacağı kabul edilerek Antalya'ya gelen turistlerin kilolarını gözlemleyen bir deney	(0,500) aralığındaki reel sayı gelebilir	50 kilogram olması $\{50\}$
Sıra sizde ...		
Sıra sizde ...		

Çıkarımlar

Dördüncü ve beşinci deneylere bakılarak örnek uzay sonsuz bir küme olabilir. Altıncı deneye bakılarak gözlenmesi imkânsız olan çıktılar da örnek uzaya dahil edilir.

Olasılığın Aksiyomları ve Temel Teoremleri

TANIM

S örnek uzayının kuvvet kümesi (tüm alt kümelerinin kümesi) üzerinde tanımlanan P fonksiyonuna aşağıda belirtilen üç aksiyomu sağlaması durumunda olasılık (olasılık dağılım) fonksiyonu denir.

1. $\forall A \subset S$ olayı için $P(A)$ negatif olmayan reel sayıdır.
2. $P(S) = 1$ 'dir.
3. İkişer ikişer ayrık $A_1, \dots, A_r$ kümeleri için $P(A_1 \cup \dots \cup A_r) = P(A_1) + \dots + P(A_r)$ 'dir.

Teorem: S örnek uzayı üzerinde tanımlı bir P olasılık fonksiyonu ve herhangi bir $A \subset S$ olayı için

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

A olayının tümleyeni $\bar{A}$ ise $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (Bir A olayının olmama olasılığı 1 - P(A) dır.) Bir olayın gerçekleşmemesinin olasılığı ile gerçekleşmesinin olasılığı toplamı 1'dir.

$$P(\emptyset) = 0.$$

Aşağıda tabloda verilen kesin ve imkânsız olay örneklerini inceleyiniz. Siz de belirlediğiniz deneylerde imkânsız ve kesin olaylara örnekler veriniz.

Deney	$P(A) = 1$ ise kesin olay	$P(A) = 0$ imkânsız olay
Bir zarın atılması	Görünen yüzün 6'dan küçük veya eşit bir sayı olması	Görünen yüzün 6'dan büyük sayı olması
Sıra sizde ...	...	...

TANIM

İmkânsız ve Kesin Olaylar: Bir deney sonucunda A olayının gerçekleşme olasılığı yoksa ($P(A) = 0$) imkânsız olay, gerçekleşme olasılığı kesinse ($P(A) = 1$) kesin olay denir.

Olaylarda Birleşim ve Kesişimler: Verilen A ve B olayları için

$$P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \text{ ve } B) = P(A \cap B)$$

Boole Eşitsizliği: $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ifadesinden $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ eşitsizliği yazılabilir.

Monotonluk Kuralı: $A \subseteq B$ olması durumunda $P(A) \leq P(B)$ 'dir.



Ayrık Olaylar: A ve B aynı örnek uzaya ait iki olay olmak üzere $P(A \cap B) = 0$ ise bu olaylara ayrık olaylar denir. A ve B ayrık olaylar ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

Etkinlik Formu Soru 2

Aşağıda tabloda belirtilen deneyleri inceleyiniz. Verilen örnekler üzerinden eş olası olan ve olmayan olayları (dağılım fonksiyonu olarak düzgün dağılım fonksiyonu kullanılıp kullanılmayacağını) belirleyiniz. Gerekçesini tartışarak yazınız. Bu deneylerden yola çıkarak her iki durum için deney örnekleri veriniz. Elde ettiğiniz çıkarımları yazınız.

Deney	Eş olası olay (düzgün dağılım fonksiyonu kullanma) ve gerekçesi	Eş olası olmayan olay (düzgün dağılım fonksiyonu kullanmama) ve gerekçesi
Bir zarın atılması deneyi	Deney sonucunun 1 veya 2 olması arasında fark yoktur. Örnek uzayda yer alan her $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sayısının deney çıktısı olarak gözlenmesini beklemek aynıdır.	
En geniş alana sahip karşılıklı iki yüzüne 1, en küçük alana sahip karşılıklı iki yüzüne 2 ve diğer yüzlerine 3 yazılı olan bir kibrit kutusunun atılması.		1 gelmesi konusunda beklenti 2 ya da 3 gelmesine göre daha kuvvetlidir. Örnek uzayda yer alan 1, 2 veya 3 sayısının deney çıktısı olarak eşit sayıda gözlenmesini beklemek aynı değildir.
İki farklı madeni para aynı anda atılıp görünen yüzlerin önce büyük daha sonra küçük olan madeni para için yazılması deneyi	Örnek uzayda $\{YY, YT, TY, TT\}$ olasılık dağılımı düzgündür. Örneğin YT büyük olanın yazı küçük olanın tura geldiğini ifade eder.	
Özdeş iki madeni para aynı anda atılıp görünen yüzlerin yazılması deneyi		Örnek uzay $\{YY, YT, TT\}$ olur. Örneğin YT birinin yazı diğerinin tura geldiğini ifade eder. TT ya da YY gelmesi için tek yol varken YT gelmesi iki farklı yoldan olabilir. $P(YT) = 2P(YY)$ olarak ifade edilebilir. $P(YY) + P(TT) + P(YT) = 1$ eşitliğinde yerine yazılırsa $P(YY) = \frac{1}{4}$, $P(TT) = \frac{1}{4}$, $P(YT) = \frac{1}{2}$ olarak belirlenmiş olur.
Sıra sizde ...		

TANIM

Eş Olası Olan ve Olmayan Olayların Olasılıkları-Düzgün Dağılım Fonksiyonu: $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ örnek uzayında $P(s_1) = P(s_2) = \dots = P(s_n) = \frac{1}{n}$ ise P'ye düzgün dağılım fonksiyonu denir. Eş olası olan olayların olasılıkları şeklinde ifade edilebilir. Eş olası olmayan olayların olasılıkları ise verilen duruma göre hesaplanır.

Örnek:

Asya ile Başak 1'den 5'e kadar tam sayılar arasından rastgele bir tam sayı seçerler. Seçtikleri sayıların toplamının bir tek tam sayı olma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Örnek uzay $\{(1,1), (1,2), \dots, (5,5)\}$ olarak yazılır. Olasılık dağılımı düzgün olarak kabul edilebilir. Toplamın tek sayı olması için Asya ya da Başak'tan biri tek diğeri çift sayı seçmelidir.

Örnek Uzay	Toplamın Tek Olması
$\{(1,1), (1,2), \dots, (5,5)\}$	$(1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (3,2), (2,3), (3,4), (4,3), (5,2), (2,5), (5,4), (4,5)$

Örnek uzayda yer alan 25 sayı çiftinden 12 tanesinin bir bileşeni tek, diğer bileşeni çifttir. İstenilen olasılık $\frac{12}{25}$ olarak hesaplanır.



Asya ile Başak bir çift zarı atarak üst yüze gelen sayıların toplamı kadar hamle yapmaya dayalı bir oyun oynamaktadır.

- Bir çift zarın aynı anda atılması deneyinde örnek uzayı belirleyiniz.
- Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamı ile ilgili olası durumları inceleyiniz. Hesaplamalar yaparak tabloda boş bırakılan alanlara yazınız.

Görünen Sayıların Toplamı	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Olası Durumlar											
Olası Durumların Sayısı											

- Son hamleyi Asya yapacak olup zarları attığında görünen yüzlerinin toplamı 6 ise oyun berabere bitecektir. Oyunun berabere bitme olasılığını hesaplayınız.
- Son hamleyi Asya yapacak olup zarları attığında görünen yüzlerinin toplamı 7 veya 7'den büyük ise oyunu kazanmaktadır. Asya'nın oyunun kazanma olasılığını hesaplayınız.
- Son hamleyi Asya yapacak olup zarları attığında görünen yüzlerinin toplamı 5'ten küçük ise oyunu Başak kazanmaktadır. Başak'ın oyunun kazanma olasılığını hesaplayınız.



Bir çift zarın atılması deneyi ile ilgili etkinlikte oluşturduğunuz tablodan yararlanarak farklı olasılıklar hesaplamaya dayalı problemler üretiniz ve sonuçları hesaplayınız.

Çözüm:

a. Örnek uzay $\{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$ olarak yazılır. Örnek uzayda 36 sayı çifti vardır.

b.

Görünen Sayıların Toplamı	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Olası Durumlar	(1,1)	(1,2), (2,1)	(1,3), (2,2), (3,1)	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	(4,6), (5,5), (6,4)	(5,6), (6,5)	(6,6)
Olası Durumların Sayısı	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

c. Oyunun berabere bitme olasılığını $\frac{5}{36}$ olarak hesaplanır.

d. Görünen yüzlerin toplamının 7 veya 7'den büyük olması olasılığı (Asya'nın oyunu kazanma olasılığı) yukarıdaki tablo yardımıyla $\frac{6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ olarak hesaplanır.

e. Görünen yüzlerinin toplamının 5'ten küçük olması olasılığı (Başak'ın oyunu kazanma olasılığı) $\frac{4 + 3 + 2 + 1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ olarak hesaplanır.

Bir çift zarın atılması deneyi ile ilgili olasılık sorularına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3, 4)

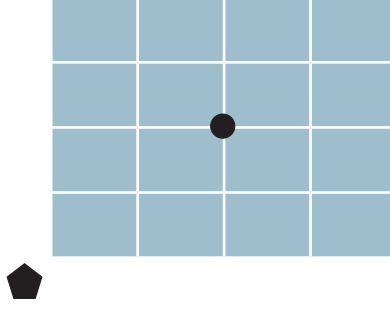


ARAŞTIRMA

Farklı sayıda yüze sahip zarların kullanılması durumlarını düşünerek yeni zar atma soruları üretiniz ve ürettiğiniz bu soruların olasılık değerlerini hesaplayınız.

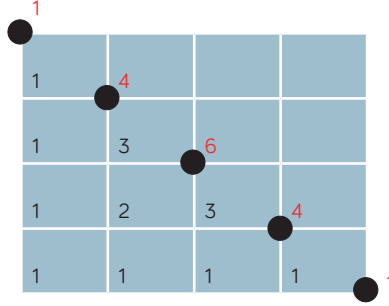


Örnek:

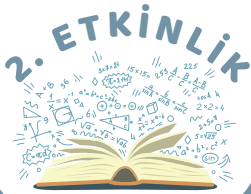


Yukarıda gösterilen ızgaranın sol alt köşesinde duran pulun hareketini belirlemek için madeni para atılmaktadır. Madeni para atıldığında tura gelirse pul bir birim yukarıya, yazı gelirse bir birim sağa hareket ettirilir. Madeni para 4 kere atıldığında pulun ızgaranın tam ortasında olma olasılığını hesaplayınız.

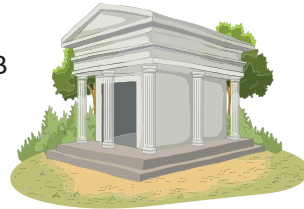
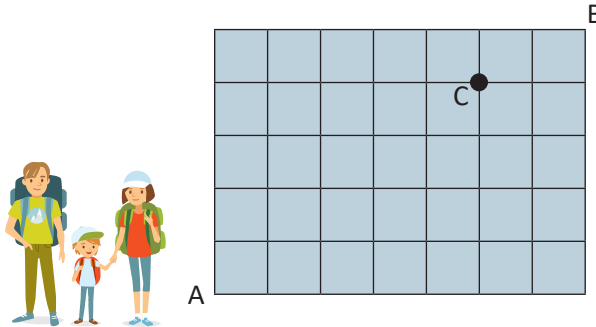
Madeni para dört kere atıldığında pul toplamda 4 birim ilerleyeceği için aşağıda işaretli noktalardan birine gelebilir. Bu noktalara kaç farklı şekilde hareket ettirildiğini sayma yolu ile hesaplayarak örnek uzay 16 olarak belirlenir.



İstenilen olasılık $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ olarak hesaplanır.



Aşağıdaki çizgiler antik kentin birbirini dik kesen sokaklarını temsil etmektedir. A noktasında bulunan turist B noktasında bulunan antik tiyatroya en kısa yoldan gidecektir.





A'dan B'ye en kısa yollardan her birinin seçilmesi olasılığının eşit olması durumu ile her köşede gidilecek yönlerin seçilmesi olasılığının eşit olması durumunu karşılaştırınız ve ulaştığınız sonuçları tabloya yazınız. Olasılık hesabı yaparken bu farklılık çözümünüzü nasıl etkiler.

Eş olası	A dan B ye en kısa yollardan her birinin seçilmesi olasılığının eşit olması durumu	A dan B ye en kısa yollardan her köşede gidilecek yönlerin seçilmesi olasılığının eşit olması durumu
Olasılık hesabı	...	...

- a. A'dan B'ye en kısa yollardan her birini seçme olasılığı eşit ise C'de bulunan antik meydandan geçme olasılığını hesaplayınız.

Bir yolun tamamının seçilmesi olasılığı diğer bir yolun tamamının seçilmesi olasılığına eşittir. Turist gidilebilecek tüm yollar arasından bir tanesinin seçilip gidilmesi gerekir.

A'dan B'ye giden toplam $\binom{12}{5} = 792$ yoldan $\binom{9}{4} \cdot \binom{3}{1} = 378$ tanesi C'den geçer. Yollardan her birini seçme olasılığı eşit ise istenilen sonuç $\frac{378}{792} = \frac{21}{44}$ olarak hesaplanır.

- b. A'dan B'ye en kısa yoldan gidecek turist her köşede gidebileceği yönleri seçme olasılığı eşit ise C'de bulunan antik meydandan geçme olasılığını hesaplayınız.

İlk şıktan farklı olarak burada her köşe başına gelindiğinde eğer sadece bir yöne gidebiliyorsa zaten o yöne gidilir eğer iki yöne gidebiliyorsa rastgele biri belirlenir. Her köşeye turist o noktaya gelme olasılığı yazılarak hesap yapılır. Aşağıda verilen şekil üzerinden P, Q ve R noktaları için örnek analiz yapılır.

P noktasına sadece P_1 noktasından gelinir. P_1 noktasından gidilebilecek iki köşe vardır. P_1 'e gelme olasılığının yarısı P'ye gelme olasılığı olur.

Q noktasına Q_1 ve Q_2 noktalarından gelinir. Q_1 'den geçilirse mecbur Q'ya gidilir. Q_2 noktası için ise iki alternatif vardır. Q noktasına gelme olasılığı $Q = Q_1 + \frac{1}{2} Q_2$ 'dir.

R noktasına R_1 ve R_2 noktalarından gelinir. Hem R_1 ve hem de R_2 için R noktası alternatiftir. Dolayısıyla R noktasına gelme olasılığı $R = \frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} R_2$ 'dir.

B'ye gelme olasılığı ise ona gelen köşelere gelme olasılıkları toplamına eşittir ve 1 olur.

Bu analizler yardımı ile her köşeye gelme olasılıkları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{29}{128}$	$\frac{93}{256}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{319}{512}$	$\frac{743}{1024}$	1
$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{63}{256}$	$\frac{105}{512}$	$\frac{281}{1024}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{11}{64}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{23}{256}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{9}{256}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$

P_1 P

C noktasından geçme olasılığı $\frac{63}{256}$ olarak hesaplanır.

Örnek:

İçerisinde bir tane beyaz top olduğu bilinen torbaya, siyah ya da beyaz olma olasılığı eşit ama torbada bulunan beyaz top ile özdeş olmadığı bilinen olan bir top daha atılıyor. Daha sonra bu torbadan bir top çekiliyor. Çekilen topun beyaz olduğu bilindiğine göre rengine bakılmadan atılan topun beyaz olma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Olası durumlar incelenerek örnek uzay belirlenir.

Rengine bakılmadan atılan top beyazdır ve bu top çekilmiştir.

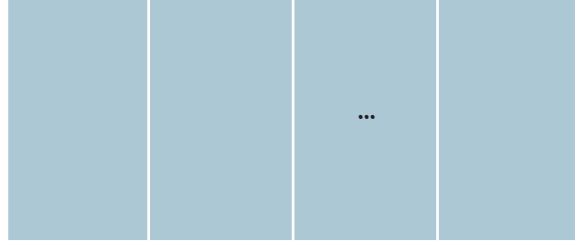
Rengine bakılmadan atılan top siyahtır ve diğer top çekilmiştir.

Rengine bakılmadan atılan top beyazdır ve diğer top çekilmiştir.

O hâlde çekilen top beyaz ise sonradan eklenen topun da beyaz olması olasılığı $\frac{2}{3}$ olur.



3. ETKİNLİK



- Her birinden istediğimiz kadar kullanabildiğimiz X, Y ve Z pullarının 1×2 'lik ızgaraya farklı yerleşimlerinde çift sayıda X pulu bulunması olasılığını hesaplayınız. Somut nesneler ile deneyler yaparak çözüme ulaşmaya çalışınız. İstenilen durum sayma yoluyla hesaplanamayacak kadar fazla olursa nasıl çözüme ulaşabileceğini tartışınız.
- Her birinden istediğimiz kadar kullanabildiğimiz X, Y ve Z pullarının 1×6 'lik ızgaraya farklı yerleşimlerinde çift sayıda X pulu bulunması olasılığını hesaplayınız.
- Farklı ızgara boyutları için çözerek genelleştirilmiş çözüme ilişkin çıkarımlarda bulununuz. Her birinden istediğimiz kadar kullanabildiğimiz X, Y ve Z pullarının $1 \times n$ 'lik ızgaraya farklı yerleşimlerinde çift sayıda X pulu olma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

- 1×2 'lik ızgaraya yerleşimlerde içerisinde tek sayıda X pulu içerenlerin sayısı T_2 ve çift sayıda X pulu içerenlerin sayısı ζ_2 ile gösterilir.

1×2 'lik ızgara için örnek uzay $T_2 + \zeta_2 = 3^2 = 9$ olur.

T_2 durumu	
X	Y
Y	X
X	Z
Z	X

ζ_2 durumu	
X	X
Y	Y
Z	Z
Y	Z
Z	Y

İstenilen olasılık $\frac{\zeta_2}{T_2 + \zeta_2} = \frac{5}{9}$ olarak hesaplanır.

(b ve c Şıkları İçin Ön Hazırlık)

T_2 tane yerleşimden sonuncu pulu X pulu olanların sayısı ζ_1 ; sonuncu pulu Y olanların sayısı T_1 ve sonuncu pulu Z olanların sayısı T_1 olur. Aşağıda verilen eşitliklerin sağlandığını belirleyiniz.

$$T_2 = 2 \cdot T_1 + \zeta_1$$

$$\zeta_2 = 2 \cdot \zeta_1 + T_1 \text{ olur.}$$

$$T_1 = 1 \text{ ve } \zeta_1 = 2 \text{ olur.}$$

b. 1×6 'lık ızgaraya yerleşimler içerisinde tek sayıda X pulu içerenlerin sayısı T_6 ve çift sayıda X pulu içerenlerin sayısı ζ_6 ile gösterilir.

$$1 \times 6 \text{'lık ızgara için örnek uzay } T_6 + \zeta_6 = 3^6 \text{ olur.}$$

T_6 tane yerleşimden sonuncu pulu X pulu olanların sayısı ζ_5 ; sonuncu pulu Y olanların sayısı T_5 ve sonuncu pulu Z olanların sayısı T_5 olduğu için

$$T_6 = 2 \cdot T_5 + \zeta_5$$

$$\zeta_6 = 2 \cdot \zeta_5 + T_5 \text{ olur. İki denklemin taraf tarafa farkı alındığında}$$

$T_6 - \zeta_6 = T_5 - \zeta_5$ olur. Bu ifade tek sayıda X pulu içeren yerleşimlerin sayısı ile çift sayıda X pulu içeren yerleşimlerin sayısı arasındaki farkın sabit kaldığını göstermektedir.

$T_1 = 1$ ve $\zeta_1 = 2$ olur. Her n pozitif tam sayısı için $T_6 - \zeta_6 = T_1 - \zeta_1 = -1$ olur. Bu eşitlikten elde edilen $T_6 = \zeta_6 - 1$ ifadesi $T_6 + \zeta_6 = 3^6$ denkleminde yerine yazılır. $\zeta_6 = \frac{3^6 + 1}{2}$ bulunur.

$$\text{İstenilen olasılık } \frac{\zeta_6}{T_6 + \zeta_6} = \frac{\frac{3^6 + 1}{2}}{3^6} = \frac{3^6 + 1}{2 \cdot 3^6} \text{ olarak hesaplanır.}$$

c. $1 \times n$ 'lik ızgaraya yerleşimler içerisinde tek sayıda X pulu içerenlerin sayısı T_n ve çift sayıda X pulu içerenlerin sayısı ζ_n ile gösterilir.

$$\text{Örnek uzay } T_n + \zeta_n = 3^n \text{ olur.}$$

T_n tane yerleşimden sonuncu pulu X pulu olanların sayısı ζ_{n-1} ; sonuncu pulu Y olanların sayısı T_{n-1} ve sonuncu pulu Z olanların sayısı T_{n-1} olduğu için

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + \zeta_{n-1}$$

$$\zeta_n = 2 \cdot \zeta_{n-1} + T_{n-1} \text{ olur. İki denklemin taraf tarafa farkı alındığında}$$



$T_n - C_n = T_{n-1} - C_{n-1}$ olur. Bu ifade tek sayıda X pulu içeren yerleşimlerin sayısı ile çift sayıda X pulu içeren yerleşimlerin sayısı arasındaki farkın sabit kaldığını göstermektedir.

$T_1 = 1$ ve $C_1 = 2$ olur. Her n pozitif tam sayısı için $T_n - C_n = T_1 - C_1 = -1$ olur. Bu eşitlikten elde edilen $T_n = C_n - 1$ ifadesi $T_n + C_n = 3^n$ denkleminde yerine yazılır. $C_n = \frac{3^n + 1}{2}$ bulunur.

İstenilen olasılık $\frac{C_n}{T_n + C_n} = \frac{\frac{3^n + 1}{2}}{3^n} = \frac{3^n + 1}{2 \cdot 3^n}$ olarak hesaplanır.

Dizilimler ile ilişkili olasılık sorularına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5)

Örnek:

4 tane özdeş beyaz ve 8 tane özdeş mavi boncuk rastgele halka şeklinde dizilerek kolye yapılırsa 2 tane beyaz boncuğun yan yana gelme olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Toplam 12 boncuğun halka etrafında farklı dizilimleri örnek uzay olup bir boncuk sabitlenip geri kalan 11 boncuğun dizilmesinin kaç farklı şekilde yapılacağı hesaplanır (dönel permütasyon etkinliği). Mavi boncuk sabit olursa 4 tane özdeş beyaz ve 7 tane özdeş mavi boncuk $\binom{11}{4} = 330$ farklı şekilde dizilebilir (Tekrarlı kombinasyon etkinliği).

Beyaz boncukların yan yana olmaması için önce 4 tane beyaz boncuk yerleştirilir daha sonra herhangi ikisinin arasına mavi gelecek şekilde 3 mavi boncuk yerleştirilir. Geriye kalan 4 mavi boncuk ise

$$-B -M -B -M -B -M -B-$$

gösterilen 8 yerden 4 tanesine $\binom{8}{4} = 70$ farklı şekilde yerleşir. İstenilen cevap $\frac{70}{330} = \frac{7}{33}$ olarak hesaplanır.

Örnek:

Aralarında tam olarak dört tanesi öğretmen olan 12 kişilik gökyüzü gözlem grubu öte gezegenler, takım yıldızları ve galaksiler atölyelerine eşit sayıda dağıtılmıştır. Her atölyede en az bir öğretmen olması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Olası durumlar incelenerek örnek uzay belirlenir.

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = \frac{12!}{(4!)^3} = 34650$$

Tüm öğretmenlerin aynı grupta olması durumları

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = \frac{3 \cdot 8!}{(4!)^2} = 210 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Üç öğretmenin bir grupta diğerinin bir grupta olması durumları

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 35 = 6720 \text{ olarak hesaplanır.}$$

İki öğretmenin bir grupta diğer ikisinin de diğer bir grupta olması durumları

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 3 \cdot 6 \cdot 28 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 1 = 15120 \text{ olarak hesaplanır.}$$

İstenmeyen durumların sayısı $210 + 6720 + 15120 = 22050$ olduğundan istenilen olasılık $(34650 - 22050 = 12600) \frac{12600}{34650}$ olarak hesaplanır.

Örnek:

Her yüzü 1'den 6'ya kadar numaralandırılmış özdeş 27 beyaz küpten tek bir küp oluşturulup dış yüzü siyah boyanır. Daha sonra büyük siyah küp tekrar birim küplere ayrılır ve bu küpler bir torbaya konur. Torbadan sırasıyla rastgele seçilen küpler ile yeniden büyük küp oluşturulur. Oluşturulan yeni küpün de dış yüzünün tamamen siyah olma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Torbada 4 çeşit boyalı küp bulunur. 8 adet 3 yüzü siyah küp (1. Grup), 12 adet 2 yüzü siyah küp (2. Grup), 6 adet tek yüzü siyah küp (3. Grup), 1 adet tüm yüzleri beyaz olan küp (4. Grup) vardır.

Küplerin yüzlerinin numaralandırılmış olmasına dikkat edilmesi farklı yerleşim durumları oluşturacağı için çözümde önemlidir. İlk gruptaki her bir küp köşelere üçer farklı şekilde yerleştirilebileceği için (siyah yüzlerinde numaralar yazılı olduğundan) 8 küp için 3^8 farklı durum olur. Bu 8 küp köşelere $8!$ şekilde yerleştirilebileceği için üç yüzü siyah küpler $3^8 \cdot 8!$ farklı şekilde yerleştirilir. İkinci gruptaki her küp için iki olası yerleşim vardır (siyah yüzler numaralandırılmış olduğundan) ve bunlar kenarlara $12!$ şekilde yerleştirilir. İkinci grup için $2^{12} \cdot 12!$ farklı yerleşim olur. Üçüncü grup için 4 farklı olası yerleşim vardır ve bunlar yan yüzlerin ortasına $6!$ şekilde yerleşir. Üçüncü grup için $4^6 \cdot 6!$ farklı yerleşim olur. Beyaz küp ise ortaya 24 farklı şekilde yerleşir.

Toplam $3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 4^6 \cdot 6! \cdot 24$ farklı siyah küp oluşturulabilir. Her küp 24 farklı şekilde yerleştirilip ve bu küpler $27!$ farklı şekilde sıralanabilir. İstenilen olasılık

$$\frac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 4^6 \cdot 6! \cdot 24}{24^{27} \cdot 27!} \approx 1,83 \cdot 10^{-37} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Basit olayların olma olasılıklarını permütasyon ve kombinasyon yardımıyla hesaplama ile ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 6-10)



EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Etkinlikte yer alan zar sorularından, farklı sayıda yüze sahip zarların kullanılması durumlarını düşünerek yeni sorular üretiniz ve ürettiğiniz bu soruların olasılık değerlerini hesaplayınız.
- Bernoulli deneyi ve binom dağılımını araştırınız.
- Örnek uzayı S olan bir deneyde, B olayının gerçekleştiği biliniyorsa A olayının sahip olduğu olasılık değerinin nasıl hesaplanabileceğini belirleyiniz.
- Koşullu olasılığın genel durumu olarak Bayes teoremini inceleyiniz.

KAYNAKLAR

Çapar, U. (2014). *Olasılık Kuramının Gelişimi, Matematik Dünyası*.

Doğanaksoy A., Sulak, F. & Uğuz, M. (2009). *Yarışmalara Hazırlananlar İçin Çözümlü Matematik Problemleri*, Oyak (OYAK Liselerarası Matematik Yarışması).

Diaconis, P. (2002). *Mathematical Developments from the Analysis of Riffle Shuffling*, Department of Statistics, Stanford University.

Nesin, A. (2019). *Sayma-Kombinasyon Hesapları*. Nesin Yayıncılık.

Öztürk, F. (1995). *Kombinatorik (Sayma Problemleri)*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

https://www.cemc.uwaterloo.ca/contests/past_contests.html (Erişim Tarihi: 20.05.2021).

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.
2. Cevabı etkinlik içerisinde verilmiştir.
3. Örnek uzay $\{(1,1), (1,2), \dots, (5,5)\}$ olarak yazılır. Olasılık dağılımı düzgün olarak kabul edilebilir. Toplamın tek sayı olması için Asya ya da Başak'tan biri tek, diğeri çift sayı seçmelidir.

Örnek Uzay	Toplamın Asal Olması
$\{(1,1), (1,2), \dots, (5,5)\}$	$(1,1), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (3,2), (2,3), (3,4), (4,3), (5,2), (2,5)$

Örnek uzayda yer alan 25 sayı çiftinden 11 tanesinin toplamı asaldır. İstenilen olasılık $\frac{11}{25}$ olarak hesaplanır.

4. a. $\frac{7}{18}$
b. $\frac{18}{36}$
c. $\frac{12}{36}$
5. a. $\frac{14}{27}$
b. $\frac{3^{10} + 1}{2 \cdot 3^{10}}$
c. $\frac{3^n + 1}{2 \cdot 3^n}$
6. $\frac{7}{33}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{18}{25}$
9. $\frac{13}{21}$
10. $\frac{1}{24}$
11. a. $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{30}{49}$
b. $\frac{\binom{3}{2} \cdot 7 \cdot 6}{7^3}$

**Etkinlik Formu**

1. Olasılık konusu ile ilgili örnek uzay, deney ve olay kavramları ile ilgili tabloda verilen açıklamalar ile verilen örnek üzerinden boş bırakılan kısımları tamamlayınız. Son iki satırda belirleyeceğiniz bir deneye göre doldurunuz. Bu tablodan ulaştığınız çıkarımları belirtiniz.

Deney: Belirli koşullar altında tekrarlanabilen ve her tekrarda farklı sonuçlanabilen işlem	Örnek uzay: Bir deney sonucunda olası çıktıların ya da görünüşlerin bütününden oluşan küme	Olay: Örnek uzayın her bir alt kümesi
Bir paranın atılması	yazı (Y) veya tura (T) gelebilir.	Paranın yazı gelmesi.
Bir gruptaki bireylerin cinsiyetlerini konu edilen deney		
Bir ağaç türünün dayanıklılığının ölçüldüğü deneyde 25 tohum dikiliyor ve kaç tanesinin filizlenip filizlenmeyeceği gözlemleniyor.		
Bir zarın atılması		
İlk defa yazı gelene kadar bir paranın atılması		
Ağırlıkların 500 kilogramdan az olacağı kabul edilerek Antalya'ya gelen turistlerin kilolarını gözlemleyen bir deney		
Sıra sizde ...		
Çıkarımlarınız...		

2. Aşağıda tabloda belirtilen deneyleri inceleyiniz. Verilen örnekler üzerinden eş olası olan ve olmayan olayları (dağılım fonksiyonu olarak düzgün dağılım fonksiyonu kullanılıp kullanılmayacağını) belirleyiniz. Gerekçesini tartışarak yazınız. Bu deneylerden yola çıkarak her iki durum için deney örnekleri veriniz. Elde ettiğiniz çıkarımları yazınız.

Deney	Eş olası olay (düzgün dağılım fonksiyonu kullanma) ve gerekçesi	Eş olası olmayan olay (düzgün dağılım fonksiyonu kullanmama) ve gerekçesi
Bir zarın atılması deneyi	Deney sonucunun 1 veya 2 olmasını ummak arasında fark yoktur. Örnek uzayda yer alan her $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sayının deney çıktısı olarak gözlenmesini beklemek aynıdır.	
En geniş alana sahip karşılıklı iki yüzüne 1, en küçük alana sahip karşılıklı iki yüzüne 2 ve diğer yüzlerine 3 yazılı olan bir kibrit kutusunun atılması.		1 gelmesi konusunda beklenti 2 ya da 3 gelmesine göre daha kuvvetlidir. Örnek uzayda yer alan her sayının deney çıktısı olarak gözlenmesini beklemek aynı değildir.
İki farklı madeni para aynı anda atılıp görünen yüzlerin önce büyük daha sonra küçük olan madeni para için yazılması deneyi		
Özdeş iki madeni para aynı anda atılıp görünen yüzlerin yazılması deneyi		
Sıra sizde ...		

3. Asya ile Başak 1'den 5'e kadar tam sayılar arasından rastgele birer tam sayı seçerler. Seçtikleri sayıların toplamının bir asal sayı olma olasılığını hesaplayınız.
4. Asya ile Başak bir çift zarı atarak üst yüze gelen sayıların toplamı kadar hamle yapmaya dayalı bir oyun oynamaktadır. Son hamleyi yapacak olan Asya zarları attığında görünen yüzlerinin toplamının
- a. Asal ve tek sayı gelmesini istiyorsa olasılığını hesaplayınız.
- b. Çift sayı gelmesini istiyorsa olasılığını hesaplayınız.
- c. 3 ile tam bölünen bir sayı gelmesini istiyorsa olasılığını hesaplayınız.
5. Sadece x, y ve z harfleri kullanılarak oluşturulan;
- a. 3 terimli
- b. 10 terimli
- c. n terimli
- bir dizide çift sayıda x bulunması olasılığını hesaplayınız.
6. 4 tane özdeş gümüş pul ve 8 tane özdeş bronz pul rastgele halka şeklinde dizilerek duvar süslemesi yapılacaksa 2 tane gümüş pulun yan yana gelme olasılığını hesaplayınız.
7. 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarının yazılı olduğu oyun kartları rastgele dizilerek altı basamaklı bir sayı oluşturuluyor. Oluşturulan sayıların 6 ile tam bölünme olasılığı nedir?
8. Rastgele seçilen üç basamaklı bir sayının rakamlarının farklı olması olasılığı nedir?
9. 5 evli çift arasından rastgele seçilen 4 kişi arasında en az bir evli çift olması olasılığı nedir?
10. Bir torbada 1'den 10'a kadar numaralanmış 20 top vardır. Çekilen toplar yerine konmamak şartıyla sırayla 4 top çekiliyor. Topların küçükten büyüğe doğru sıralı gelme olasılığını hesaplayınız.
11. Aynı hafta içinde doğdukları bilinen 3 kişiden
- a. Hepsinin farklı gün doğmuş olma olasılığı kaçtır?
- b. 2'sinin doğum günlerinin aynı olma olasılığı kaçtır?





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: KOŞULLU OLASILIK

: Sonlu Matematik/Olasılık

: 1. Bileşik olayı açıklayarak gerçekleşme olasılığını hesaplar.
2. Koşullu olasılıkları hesaplar.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

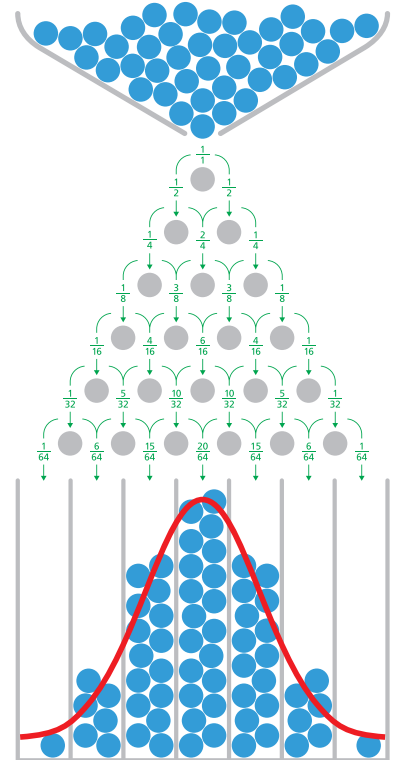
: Etkinlik Formu, galton kutusu, madeni paralar, çokyüzlü zarlar, pullar.

Etkinliğin Amacı

Bileşik olayın gerçekleşme olasılığının hesaplanması ve açıklanması yapılırken ağaç şemasından yararlanılması, eşzamanlı deneyler yapıldığında çizilebilecek ağaç şemalarının tartışılması, bileşik olay ile ilgili gerçek yaşam problemlerine yer verilmesi sağlanır. Koşullu olasılığın genel durumu olarak Bayes teoreminin incelenmesi ve koşullu olasılık ile ilgili gerçek yaşam problemlerine yer verilmesi hedeflenmektedir.

Başlarken...

Galton kutusu düzeneği; toplar, topların aşağı inebileceği genişlikte yollar ve topların biriktiği hazneden oluşmaktadır. Bu düzenekte toplar üst taraftan bırakılır ve düştükleri hazneler gözlenir. Üst taraftaki huniden dökülen toplar aşağı doğru düşüşleri sırasında çivilere çarparak sağa ya da sola dağılırlar. Olasılık prensibine göre topların dağılımı gözlenir. Düzenek arka arkaya yapılan deneylerde yaklaşık aynı olasılıkları sergiler.





Tabloda verilen deneylerin olasılıklarını hesaplamak için ikinci satırda verilen örneği inceleyiniz ve diğer satırlarda boş bırakılan yerleri bu örneğe göre tamamlayınız. Ağaç şeması oluşturmadan bu olasılıkların nasıl hesaplanabileceğini tartışınız.

Deney	Ağaç Şeması	Açıklama	Olasılık Hesaplama															
Bir madeni paranın 2 kez atılması		<table><thead><tr><th>1. Atış</th><th>2. Atış</th><th>Çıktı</th></tr></thead><tbody><tr><td>Y</td><td>Y</td><td>YY</td></tr><tr><td>Y</td><td>T</td><td>YT</td></tr><tr><td>T</td><td>Y</td><td>TY</td></tr><tr><td>T</td><td>T</td><td>TT</td></tr></tbody></table>	1. Atış	2. Atış	Çıktı	Y	Y	YY	Y	T	YT	T	Y	TY	T	T	TT	En az birinin yazı gelmesi olasılığı $\frac{3}{4}$
1. Atış	2. Atış	Çıktı																
Y	Y	YY																
Y	T	YT																
T	Y	TY																
T	T	TT																
Bir madeni paranın 3 kez atılması	...	...	En az ikisinin yazı gelmesi olasılığı															
Bir zarın üst üste 2 kez atılması	...	...	...															
Sıra sizde...	...	...	...															

Bileşik olayların gerçekleşme olasılığının hesaplanmasında ağaç şemasından yararlanılır. Eşzamanlı deneyler yapıldığında çizilebilecek ağaç şemaları istenilen olasılıkların hesaplanmasında kolaylık sağlar.



Zar Temelli Oyunlarda Kazanma Olasılığı

Asya ve Başak sırayla zar atarlar. İlk 6 atan oyunu kazanır. İlk zarı Asya atarsa Başak'ın kazanma olasılığı nedir?

İlk İki Atış Sonucunda Olası Tüm Çıktılar	Olasılık Değeri
Asya'nın birinci atışta kazanma olasılığı	$\frac{1}{6}$
Başak'ın birinci atışta kazanma olasılığı	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ (Önce Asya atamayacak sonra Başak atacak.).
Asya'nın ikinci atışta kazanma olasılığı	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
Başak'ın ikinci atışta kazanma olasılığı	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

Bu şekilde devam edildiğinde Asya'nın oyunu kazanma olasılığı p ise Başak'ın kazanma olasılığı $\frac{5}{6}p$ olur. Kazanma olasılıkları toplamı 1 olacağından $p + \frac{5}{6}p = 1 \Rightarrow p = \frac{6}{11} \Rightarrow \frac{5}{6}p = \frac{5}{11}$ olur.

Ek Etkinlik ve Araştırma Sorularına Yönlendirme

- Geometrik seri toplamını kullanarak olasılık değerinin nasıl hesaplanabileceğini araştırınız.

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$\text{İspat: } S = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} \text{ alırsak } \begin{cases} S = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} \\ r \cdot S = r + r^2 + \dots + r^n \end{cases} \Rightarrow S - r \cdot S = 1 - r^n \Rightarrow$$

$$S \cdot (1 - r) = 1 - r^n \Rightarrow S = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

$|r| < 1$ ise n sayma sayısı arttıkça r^n sayısı 0'a yakınsar. Dolayısıyla $1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1 - r}$ dir.

Başak ya birinci, ya ikinci, ya üçüncü, ya n . atışta kazanır. Dolayısıyla Başak'ın kazanma olasılığı

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \dots &= \frac{5}{36} \cdot (1 + \frac{25}{36} + (\frac{25}{36})^2 + \dots) \\ &= \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

- Farklı sayıda yüze sahip zarların kullanılması durumlarını düşünerek yeni oyun soruları üretiniz ve ürettiğiniz bu soruların olasılık değerlerini hesaplayınız.



3. ETKİNLİK

Şekilde gösterildiği gibi dizili bir sıra taşın en başında bulunan kurbağa elindeki madeni parayı attığında yazı gelirse bir önündeki, tura gelirse iki önündeki taşa zıplar. Başladığı taştan sonra 5. sıradaki taşa zıplama olasılığını hesaplayınız.



Çözüm:

Kurbağanın n . sırada bulunan bir taşa zıplama olasılığı P_n ise $n+1$ 'inci taşa basmaması tek şekilde gerçekleşir (Kurbağa n numaralı taşa zıplar ve bu taşın üzerinde iken attığı para tura gelir.) ve bu olasılık $\frac{P_n}{2}$ olduğundan $P_{n+1} = 1 - \frac{P_n}{2}$ olur. Kurbağanın bulunduğu taşa sıfıncı taş dersek $P_0 = 1$ olur. Sırasıyla diğer taşların olasılıkları

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

$$P_2 = 1 - \frac{P_1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P_3 = \frac{5}{8}$$

$$P_4 = \frac{11}{16}$$

$$P_5 = \frac{21}{32} \text{ olarak hesaplanır.}$$

İkinci çözüm yolu olarak YYYYY, YYYT, YTT durumlarının olasılıkları toplamını sıralamaları da dikkate alarak inceleyiniz.

**Ek Etkinlik ve Araştırma Sorularına Yönlendirme**

İndirgemeli diziler kullanılarak P_n olasılığı genel bir ifade olarak yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ için $P_n \rightarrow \frac{2}{3}$ olduğunu gösteriniz.



Asya pul hamlelerine dayanan bir oyun oynamaktadır. Oyunun başlangıcında aldığı iki adet pul kutusunu cebine atar. İhtiyacı oldukça elini cebine atar ve iki kutunun birinden rastgele pul alır (eşit olasılıkla). Sonuncuyu aldıktan sonra kutulardan birini çöpe atmak yerine tekrar cebine koymuş olmalı ki eline aldığı kutunun boş olduğunu fark eder. Eğer her iki kutuda da başlangıçta n adet pul varsa, son durumda diğer kutuda k tane pul olma olasılığını hesaplayınız. ($0 \leq k \leq n$)

Son durumda diğer kutuda k tane pul varsa daha önce $n-k$ pul alınmıştır. Asya $(n+1)$. pulu sol cebinden almak istemiş olursa o zamana kadar $2n - k + 1$ adet seçim yapar. 2^{2n-k+1} farklı şekilde seçmiş olur. Bunların $\binom{2n-k}{k}$ tanesi ise $(n+1)$. Seçimini sol cebinden yapmış olmasıdır. Asya'nın sol

cebinden boş bir kutu çıkarma olasılığı $\frac{\binom{2n-k}{k}}{2^{2n-k+1}}$ olur. Sağ cebinden boş kutu çıkarma olasılığı da aynı

olduğundan istenilen olasılık $\frac{\binom{2n-k}{k}}{2^{2n-k}}$ olarak hesaplanır.

Oyun temelli olasılık sorularına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1-4)

TANIM

Bernoulli Deneyi ve Binom Dağılımı: Örnek uzayı S olan bir deney gerçekleştirildiğinde olasılığı p olan bir A olayının gözlenmesine Bernoulli deneyi adı verilir. Bir Bernoulli olayı n kez tekrarlandığında A olayının gözlenme sayısı olarak tanımlanan olayın örnek uzayı $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ olur. Bu örnek uzayı üzerinde $P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (A olayının gözlenme sayısı x ve $k \in \{0, 1, \dots, n\}$) şeklinde tanımlı olasılık dağılım fonksiyonuna binom **dağılım fonksiyonu** denir.

Örnek:

Bir zar 5 kez atıldığında tam 3 kere 4 gelmesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Zar bir kere atıldığında 4 gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ olup deney sayısı 5 ve $k = 3$ tür.

$$P(x = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{6^5}$$

Örnek:

Bir oyuncu her atışında $\frac{2}{3}$ olasılıkla hedefe isabet etmektedir. 10 atış yapıldığında bu atışlardan yarısından fazlasında isabetli atış olma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

İsabet sayısını x ile ifade edersek istenilen olasılık $P(x > 5)$ olur.

$$P(x > 5) = P(x = 6) + P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$$

$$P(x = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 210 \cdot \frac{2^6}{3^{10}}$$

$$P(x = 7) = \binom{10}{7} \left(\frac{2}{3}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 120 \cdot \frac{2^7}{3^{10}}$$

$$P(x = 8) = \binom{10}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 45 \cdot \frac{2^8}{3^{10}}$$

$$P(x = 9) = \binom{10}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^9 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 10 \cdot \frac{2^9}{3^{10}}$$

$$P(x = 10) = \binom{10}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{2^{10}}{3^{10}}$$

İstenilen sonuç $P(x > 5) = 0,787 \dots$ olarak hesaplanır.

Örnek:

Asya, Başak ve Cihan, 5 kitabı paylaşmak için kura çekmeye karar verirler. Bir torbaya isimlerinin yazılı olduğu üç kâğıt atılır ve torbadan rastgele bir çekimle ilk kitabın sahibi belirlenir. İlk çekimdeki kâğıt torbaya tekrar koyularak işlem ikinci ve sonraki tüm kitaplar için aynı şekilde tekrarlanır. Tüm kitapların sadece bir kişiye gitmesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Herhangi bir kitabın Cihan'a gitmesi olasılığı $\frac{1}{3}$ olduğundan, tüm kitapların Cihan'te toplanmış olması olasılığı $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ olur. Asya ve Başak için de aynı olasılık değeri geçerli olduğundan, tüm kitapların ortaklardan birisinde toplanma olasılığı $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0,012$ olur.



Herhangi bir kitabın Cihan'a gitmeme olasılığı $\frac{2}{3}$ ve tamamının ona gitmeme olasılığı $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$ olur. Diğerleri için de aynı durum geçerlidir. O hâlde $\frac{32}{81} \approx 0,395$ olasılık değeri ile ortaklardan en az birisi kitap alamamış olur.

Tüm kitapların tek ortağa gitme olasılığı $\frac{1}{81}$

Tüm kitapların, ikisi de en az birer kitap almak üzere iki ortağa gitme olasılığı $\frac{32}{81}$

Her ortağa en az bir kitap gitme olasılığı $1 - \frac{32}{81} = \frac{49}{81}$ olarak hesaplanır.

Bernoulli deneyi ile ilgili benzer sorularına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5)

Koşullu Olasılık, Bayes Teoremi



- a. Bir çift zar atıldığında toplamlarının 6 geldiği biliniyorsa zarlardan bir tanesinin 5 gelmesi olasılığını hesaplayınız. Ulaştığınız olasılık değerini matematiksel olarak ifade ediniz.

1. Aşama	2. Aşama
Açıklama	Matematiksel İfadesi
Bir çift zarın atılması deneyinin örnek uzayında olası durum sayısı 36'dır. Fakat 'toplamlarının 6 geldiği biliniyorsa' ifadesi olduğuna göre artık olası durum sayısı 36 olmaz. Bir çift zar atıldığında toplamlarının 6 gelmesini sağlayan olası durum sayısı 5'tir. Zarlardan birinin 5 gelmesini sağlayan olası durum sayısı ise 2'dir. İstenilen cevap $\frac{2}{5}$ olarak hesaplanır.	A: zarlardan birinin 5 olması B: Zarların toplamının 6 olması İstenilen cevap B olayının olması durumunda A olayının olasılığıdır. Bir başka ifade ile A olayının B koşullu olasılığı sorulmaktadır. İstenilen olasılık değerini $A \cap B$ 'nin eleman sayısı ve B'nin eleman sayısını kullanarak $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olarak hesaplanır.

- b. Bir zar atıldığında A olayı üste gelen yüzün 4 olması, B olayı da çift sayı olması olsun. A olayının gerçekleştiği biliniyorsa, B olayının olma olasılığını hesaplayınız? B olayının gerçekleştiği biliniyorsa A olayının olma olasılığını hesaplayınız?

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ ve } P(B) = \frac{1}{2} \text{ olarak hesaplanır.}$$

$$B \text{ olayının gerçekleştiği biliniyorsa, A olayının olma olasılığı } \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \text{ olarak hesaplanır.}$$

A olayının gerçekleştiği biliniyorsa zaten B olayı da gerçekleşmiş olacağından kesin olaydır.

Örnek uzayı S olan bir deneyde, B olayının gerçekleştiği biliniyorsa A olayının sahip olduğu olasılık değeri $P(A | B)$ ile gösterilir ve koşullu olasılık değeri denir. Yukarıdaki etkinlik-b için $P(A | B) = \frac{1}{3}$ ve $P(B | A) = 1$ olur. Koşullu olasılık değeri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Örnek:

Üç özdeş kutudan birinde 2 sarı, birinde 2 yeşil ve diğerinde de bir sarı bir yeşil top vardır. Kutulardan biri rastgele seçilip içerisine bakmadan toplardan birisi çekiliyor. Çekilen top sarı ise, kutudaki diğer topun da sarı olma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Olaylar aşağıda tabloda verildiği gibi ifade edilirse istenilen olasılık $P(A|S)$ olur.

Olay	Gösterim
İki sarı top içeren kutunun seçilmesi olayı	A
İki yeşil top içeren kutunun seçilmesi olayı	B
Diğer kutunun seçilmesi olayı	C
Alınan topun sarı olması olayı	S
Alınan topun yeşil olması olayı	Y

A olayı gerçekleştiğinde çekilen topun sarı olması kaçınılmaz olduğundan $P(S|A) = 1$ olur. $P(A) = \frac{1}{3}$ olur.

$P(S | A) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)}$ eşitliğinden $P(A \cap S) = \frac{1}{3}$ bulunur. $P(S) = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$P(A | S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \text{ sonucuna ulaşılır.}$$

Örnek:

Torbadan Topların Çekilmesi:

İki torbadan birincisinde 5 mavi, 4 kırmızı, diğerinde 3 mavi, 6 kırmızı bilye vardır.

a. Rastgele bir torba ve bu torba içinden rastgele bir bilye seçiliyor. Bu bilye kırmızı ise seçilen torbanın birinci torba olması olasılığı nedir?

B: Torbadan kırmızı bilye çıkması

A: Seçilen torbanın birinci olması

$$\text{İstenilen cevap } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9}} = \frac{2}{5} \text{ olarak hesaplanır.}$$



- b. Birinci torbadan rastgele bir bilye alınıp ikinci torbaya konuyor. Sonra ikinci torbadan rastgele bir bilye çekiliyor. Bu bilye mavi ise birinci torbadan seçilen bilyenin kırmızı olması olasılığı nedir?

B: İkinci torbadan çekilen bilyenin mavi olması

A: Birinci torbadan çekilen bilyenin kırmızı olması

$$\text{İstenilen cevap } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{3}{8} \text{ olarak hesaplanır.}$$

TANIM

Koşullu olasılığın genel durumu olarak Bayes teoremi olasılık kuramı içerisinde incelenen önemli konulardan biridir. Bir olaya koşullu diğer olayın olasılık değerinin hesaplanması ile ilgili olan bu teorem istatistikçi Thomas Bayes'in adı ile ifade edilmektedir.

Bayes Teoremi: Bir deneyin örnek uzayı, ikişer ikişer ayrık $B_1, B_2, \dots, B_n$ olaylarının birleşimi ise, herhangi A olayının olasılığı

$$P(A) = P\left(\frac{A}{B_1}\right)P(B_1) + P\left(\frac{A}{B_2}\right)P(B_2) + \dots + P\left(\frac{A}{B_n}\right)P(B_n)$$

olarak hesaplanır. Bayes teoremi koşullu olasılığın genel durumu olarak ifade edilebilir.



Virüsten kaynaklı bir hastalığın toplumda görülme olasılığı 0,001'dir. Geliştirilen test hasta bireylere uygulandığı zaman 0,98 olasılık değeri ile pozitif sonuç verirken hasta olmayan bireylere uygulandığı zaman 0,04 olasılık değeri ile pozitif sonuç vermektedir. Geliştirilen testin uygulandığı bir bireyin sonucu pozitif çıktığına göre gerçekten hasta olma olasılığını hesaplayınız.

Virüsü kaparak hastalığa yakalanmış olma olayı V ve geliştirilen test sonucunun pozitif çıkması olayı + ile ifade edilirse istenilen olasılık $P(V|+)$ olur.

$$P(V) = 0,001 \text{ ve } P(+|V) = 0,98 \text{ değerleri } P(+|V) = \frac{P(+ \cap V)}{P(V)} \text{ ifadesinde yerine yazıldığında}$$

$$P(+ \cap V) = \frac{98}{10^5} \text{ olarak hesaplanır. Bayes teoremi kullanılarak}$$

$$P(+) = P(+|V) \cdot P(V) + P(+|\bar{V}) \cdot P(\bar{V}) = (0,98) \cdot (0,001) + (0,04) \cdot (0,999) = \frac{4094}{10^5} \text{ yazılır.}$$

$$P(V|+) = \frac{P(+ \cap V)}{P(+)} = \frac{98}{4094} \approx 0,024 \text{ olur.}$$

TANIM

Bağımsız Olaylar: A olayının olasılığı, B olayının gerçekleştiği bilindiğinde değişmiyorsa bu olaylara bağımsız olaylar denir. $P(A) = P(A | B)$ ise A ve B olaylarının bağımsız olay olduğu anlamına gelir.

$$P(A | B) \cdot P(B) = P(A \cap B) \text{ olduğundan}$$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ sağlanır. Bu ifade bağımsızlığın simetrik bir ilişki olduğunu ve $P(A) = P(A | B)$ olması durumunda $P(B) = P(B | A)$ olacağını gösterir.

Bir zar ile madeni para aynı anda atıldığında paranın tura geldiği bilindiğine göre zarın 5 gelme olasılığı bu duruma örnektir. Zarın 5 gelme olasılığı paranın atılmasından bağımsızdır.



Bir kutuda 30 basketbol ve 20 voleybol topu bulunmaktadır. Basketbol toplarının 9 tanesi kırmızı, 10 tanesi turuncu ve 11 tanesi siyahtır. Voleybol toplarının 6 tanesi kırmızı, 5 tanesi turuncu ve 9 tanesi siyahtır.

Kutudan rastgele çekilen bir topun basketbol topu olması olayını B ve voleybol topu olması olayını V ile ifade ediniz. Topların renkleri ile ilgili olayları da K, T ve S ile ifade ediniz. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerlere sayıları yazınız ve istenilen olasılıkları hesaplayınız. Bu hesaplamalarınız üzerinden hangi olayların bağımsız olduklarını belirleyiniz.

Top	Basketbol	Voleybol	Toplam
Kırmızı	9	6	15
Turuncu	10	5	15
Siyah	11	9	20
Toplam	30	20	50

Aşağıdaki olasılık değerleri tabloda yazılı sayılar yardımı ile hesaplanabilir.

$$P(B \cap K) = \frac{9}{50}$$

$$P(B \cap T) = \frac{10}{50}$$

$$P(B \cap S) = \frac{11}{50}$$



$$P(B) \cdot P(K) = \frac{30}{50} \cdot \frac{15}{50} = \frac{9}{50}$$

$$P(B) \cdot P(T) = \frac{30}{50} \cdot \frac{15}{50} = \frac{9}{50}$$

$$P(B) \cdot P(S) = \frac{30}{50} \cdot \frac{20}{50} = \frac{12}{50}$$

Bu ifadelerden çıkan sonuçlar

$$P(B \cap K) = P(B) \cdot P(K) = \frac{9}{50} \text{ B ve K olayları bağımsızdır.}$$

$P(B \cap T) \neq P(B) \cdot P(T)$ B ve T olayları bağımsız değildir.

$P(B \cap S) \neq P(B) \cdot P(S)$ B ve S olayları bağımsız değildir.

Kutudan alınan bir topun basketbol topu olma olasılığı $\frac{3}{5}$ dir. Alınan topun kırmızı olduğu bilindiğinde, basketbol topu olması olasılığı yine $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ olur.

Topun turuncu olduğu bilinirse basketbol topu olma olasılığı $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ olur. Rastgele seçilen bir topun basketbol topu olma olasılığı, topun rengi kırmızı olduğunda aynı kalmakta fakat turuncu olduğunda değişmektedir.



Antalya Altın Portakal Film Festivali gişesinde bilet alan izleyicilerin doğum günleri hediye bilet sahibini belirlemek için kayıt altına alınmaktadır. Daha önce bilet almış herhangi bir izleyici ile aynı günde doğmuş olan sıradaki ilk izleyiciye festival filmi bileti hediye edilmektedir. Asya, kaçınıc sırada bilet kuyruğuna girerse (İstediği sırada kuyruğa girebilmektedir.) hediye bileti alma şansı en fazla olur? (Bir yılı 365 gün ve doğum günlerinin gelme olasılıklarını eş olasılı alınız.)



Asya n. sırada kuyruğa girerse hediye bilet kazanabilmesi için önündeki herkesin farklı günde doğmuş olması gerekir. Asya'nın hediye bileti alma olasılığı, önündeki herkesin farklı günde doğmuş olması olasılığı ile Asya'nın önündeki izleyicilerden biri ile aynı günde doğmuş olma olasılığının çarpımına eşittir. İstenilen olasılık

$$P(n) = \frac{365 \cdot 364 \dots (365 - (n - 2))}{365^{n-1}} \cdot \frac{n-1}{365} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Soruda istenilen cevap için $P(n) > P(n + 1)$ olma durumu yani $\frac{P(n)}{P(n + 1)} > 1$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n tam sayı değeri hesaplanmalıdır.

$\frac{P(n)}{P(n + 1)} = \frac{365}{366 - n} \cdot \frac{n - 1}{n}$ ve $\frac{P(n)}{P(n + 1)} > 1$ olduğu için $365n - 365 > 366n - n^2$ elde edilir. $n^2 - n - 365 > 0$ ikinci dereceden polinom kökleri yaklaşık -18.6 ve 19.6 olarak hesaplanır. $n > 0$ olduğu için $n = 20$ olur. Asya 20. sırada bilet kuyruğuna girerse hediye bileti alma şansı en fazla olur.

Koşullu olasılık, Bayes teoremi, bağımsız olayların olasılıkları ile ilgili sorulara yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 5-10)

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Etkinlikte yer alan zar sorularından, farklı sayıda yüze sahip zarların kullanılması durumlarını düşünerek yeni sorular üretiniz ve ürettiğiniz bu soruların olasılık değerlerini hesaplayınız.
- Örnek uzayın sonsuz çoklukta elemandan oluşması durumları ile ilgili soru modellerini araştırınız.

Asya ile Başak aynı günde matematik müzesine ziyarete gideceklerdir. Her ikisi de saat 13.00 ile 14.00 arasında herhangi bir anda müzeye girip 10 dakika kalıp ayrılacaklardır. Müzede karşılaşma olasılıklarını hesaplayınız.

Uzunluğu 1 m olan çubuğun rastgele iki noktadan kesildiğinde elde edilen üç parçanın bir üçgen oluşturma olasılığını hesaplayınız.

Uzunluğu 1 birim olan düzgün bir çubuk üzerindeki bir noktadan rastgele kırılıp iki parçaya bölünüyor. Bu parçaların her birinin uzunluğunun 3'ten küçük olması olasılığı nedir?

Makasla 1 metreden uzun olmayacak şekilde rastgele uzunlukta iki ip kesilir. Kesilen iplerin toplam uzunluğunun 150 cm'den kısa olmaması olasılığı nedir? Kenarları 5, 6 ve 7 olan bir üçgen içinde rastgele alınan bir noktanın köşelerden birine olan uzaklığının 1'den küçük olması olasılığı nedir?

- Farklı olasılık dağılımlarını araştırınız, inceleyiniz ve karşılaştırınız.
- Elleri rastgele dizilmiş birer adet iskambil destesi bulunan Asya ve Başak isimli oyuncular her seferinde destenin en üstündeki kartı almaktadırlar. Oyuncular sırayla kendi destelerinden kart alıp karşılaştırırlar. Eğer aldıkları kart aynı olursa Başak kazanır, olmazsa kart açmaya devam ederler. Deste bitene kadar açtıkları kartlar her seferinde farklı çıkarsa Asya oyunu kazanır. Asya'nın kazanma olasılığını hesaplayınız.
- 6 kişi restoran girişi paltolarını vestiyere verirler. Çıkışta vestiyer paltoları rastgele dağıtılır. Hiç kimse-nin kendine ait paltoyu almamış olması olasılığını hesaplayınız.



KAYNAKLAR

Çapar, U. (2014). *Olasılık Kuramının Gelişimi, Matematik Dünyası*.

Doğanaksoy A., Sulak, F. & Uğuz, M. (2009). *Yarışmalara Hazırlananlar İçin Çözümlü Matematik Problemleri*, Oyak (OYAK Liselerarası Matematik Yarışması).

Diaconis, P. (2002). *Mathematical developments from the analysis of riffle shuffling*, Department of Statistics, Stanford University.

Nesin, A. (2019). *Sayma-Kombinasyon Hesapları*. Nesin Yayıncılık.

Öztürk, F. (1995). *Kombinatorik (Sayma Problemleri)*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

https://www.cemc.uwaterloo.ca/contests/past_contests.html (Erişim Tarihi: 20.05.2021).

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. Zarların toplam 6 gelme olasılığı $\frac{5}{36}$ ve toplam 7 gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ olduğundan oyunu Asya'nın kazanma olasılığı

$$\frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} + \dots = \frac{5}{6} \cdot (1 + \frac{155}{216} + (\frac{155}{216})^2 + \dots) = \frac{5}{6} \cdot 1 - \frac{155}{216} = \frac{30}{61}$$

2. Olayı A takımına göre düşünelim.

1. **Durum:** Çeyrek finalde B ile eşleşme olasılığı $\frac{1}{7}$

2. **Durum:** Yarı finalde eşleşme olasılığı $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{14}$ (Çeyrek finalde eşleşmeme, A ve B'nin tur atlaması, Yarı finalde eşleşme)

3. **Durum:** Finalde eşleşme olasılığı $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$

İstenilen cevap $\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ olarak hesaplanır.

3. Dört pilin de sağlam olma olasılığı $\binom{4}{0} (0,001)^0 (0,999)^4 = 0,996006$

Tam bir tanesinin bozuk olma olasılığı $\binom{4}{1} (0,001)^1 (0,999)^3 = 0,000998$

O hâlde en fazla birinin bozuk olma olasılığı 0,996994 olarak hesaplanır.

4. $P_6 = \frac{43}{64}$ olarak hesaplanır.

5. Son durumda diğer kutuda k tane pul varsa daha önce 8 pul alınmıştır. Asya 21. pulu sol cebinden almak istemiş olursa o zamana kadar 29 adet seçim yapar. 2^{29} farklı şekilde seçmiş olur. Bunların $\binom{28}{12}$ tanesi ise 21. seçimini sol cebinden yapmış olmasıdır. Asya'nın sol cebinden boş bir kutu çıkarma olasılığı $\frac{\binom{28}{12}}{2^{29}}$ olur. Sağ cebinden boş kutu çıkarma olasılığı da aynı olduğundan istenilen olasılık $\frac{\binom{28}{12}}{2^{28}}$ olarak hesaplanır.

6. a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) 'A: Paranın tura gelmesi', 'B: zarın 2'den büyük gelmesi' şeklinde ifade edilir ve soruda $P(A \cup B)$ istenir. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

7. a. $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

b. $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{9}$

c. $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$

8. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{39}{80}$

9. $\frac{6}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{10}{27}$

10. 0

**Etkinlik Formu**

1. Asya ve Başak sırayla iki zar atarlar. Asya toplam 6, Başak toplam 7 atarsa oyunu kazanır. İlk zarı Asya atarsa kazanması olasılığını hesaplayınız.
2. A ve B takımları futbol turnuvasının son 8 takımı arasındadır. Bu takımların kura ile eşleştirilmesiyle oynanan 4 maçta yenilen takımlar elenir. Kalan takımlar ise yeniden kura ile eşleştirilerek tek bir takım kalana kadar bu şekilde sürer. Her maçta her takımın diğerini yenme olasılığı aynı ise, A ve B takımlarının karşılaşma olasılığını hesaplayınız.
3. Şekilde gösterildiği gibi dizili bir sıra taşın en başında bulunan kurbağa elindeki madeni parayı attığında yazı gelirse bir önündeki, tura gelirse iki önündeki taşa zıplar. Başladığı taştan sonra 6. sıradaki taşa zıplama olasılığını hesaplayınız.



4. Asya pul hamlelerine dayanan bir oyun oynamaktadır. Oyunun başlangıcında aldığı iki adet pul kutusunu kutusunu cebine atar. İhtiyacı oldukça elini cebine atar ve iki kutunun birinden rastgele pul alır (eşit olasılıkla). Sonuncuyu aldıktan sonra kutulardan birini çöpe atmak yerine tekrar cebine koymuş olmalı ki eline aldığı kutunun boş olduğunu fark eder. Eğer her iki kutuda da başlangıçta 20 adet pul varsa, son durumda diğer kutuda 12 tane pul olma olasılığını hesaplayınız.
5. Bir fabrikada üretilen pillerin bozuk olma olasılığı 0,001'dir. Dörtlük paketler hâlinde piyasaya sürülen pillerin bir kutusunda en fazla bir tane bozuk pil bulunma olasılığını hesaplayınız.
6. Bir zar ve bir para atılıyor.
 - a. Paranın tura ve zarın 3'ten küçük gelmesi
 - b. Paranın tura veya zarın 2'den büyük gelmesi olasılığı nedir?
7. Bir torbada 5 mavi 4 kırmızı bilye bulunuyor.
 - a. İki bilye seçiliyor .
 - b. Önce bir bilye seçiliyor, sonra bu bilye yerine konmadan diğeri seçiliyor.
 - c. Önce bir bilye seçiliyor, sonra bu bilye yerine konarak bir bilye daha seçiliyor.Seçilen bilyelerden birinin mavi, diğerinin kırmızı olması olasılığı nedir?
8. İki torbadan birincisinde 5 mavi, 3 kırmızı, diğerinde 4 mavi, 6 kırmızı bilye vardır. Rastgele bir torba ve bu torba içinden rastgele bir bilye seçiliyor. Bu bilyenin kırmızı olması olasılığı nedir?
9. İki torbadan birincisinde 6 mavi, 3 kırmızı, diğerinde 5 mavi, 3 kırmızı bilye vardır. Birinci torbadan rastgele bir bilye alınıp ikinci torbaya konuyor. Sonra ikinci torbadan rastgele bir bilye çekiliyor. Bu bilyenin kırmızı olması olasılığı nedir?
10. İki torbadan birincisinde 6 mavi, 3 kırmızı, diğerinde 3 kırmızı bilye vardır. Birinci torbadan rastgele bir bilye alınıp ikinci torbaya konuyor. Sonra ikinci torbadan rastgele bir bilye çekiliyor. Bu bilye mavi ise birinci torbadan seçilen bilyenin kırmızı olması olasılığı nedir?



GEOMETRİ

4. Ünite



GEOMETRİ

4. Ünite



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: ÜÇGENDE AÇILAR
MODÜL/KONU	: Geometri/Üçgende Açılar
KAZANIMLAR	: Bir üçgenin açıları ve kenarları arasındaki ilişkileri ispat eder.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, üçgenler ve üçgende açı uygulamaları ile verilen bağıntıların ispatlarının yapılması hedeflenmektedir. Üçgende orta taban, dik üçgenlerin kenar bağıntıları, ikizkenar üçgenin açı ve kenar özellikleri ilgili çalışmalara yer verilecektir. Dinamik matematik programı yardımıyla öğrencilerin örnek durumları teknoloji yardımıyla çözmeleri amaçlanmıştır.

Başlarken...

Pusula, üzerinde kuzey-güney hattını gösteren mıknatıstan bir ibresi (iğnesi) olan yön belirlemede kullanılan kadranı olan bir alettir. Pusulanın kuzey-güney çizgileri ile pusula iğnesinin kuzey-güney iğnesi çakışınca kadar kendi etrafınızda dönersek pusuluda yönleri belirlemiş oluruz.

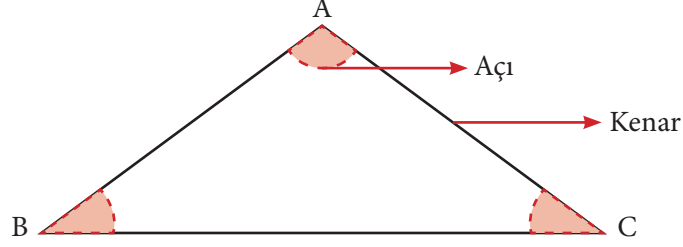
Bozok ile Karahan oryantiring yarışmasında hedeflerine doğru giderken başlangıç noktasından itibaren 30°'lik bir açı hatası yapmış ve gidecekleri noktayla aynı hizada bir noktaya

100 metre hareket ederek varmışlardır. Acaba doğru noktaya ulaşmak için kaç metre daha yürümeleri gerekir? Soruyu geometrik olarak ifade edebilir misiniz?

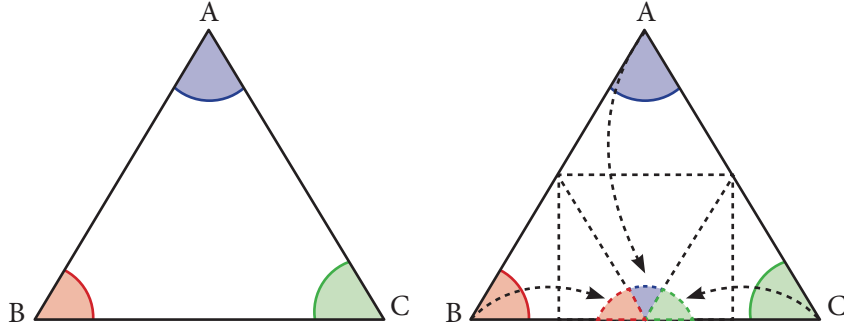


TANIM

A, B, C noktaları bir düzlemde aynı doğru üzerinde değil (doğrusal olmayan) ise $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ doğru parçalarının birleşimine bir üçgen, A,B,C noktalarına üçgenin köşeleri, bu doğru parçalarına üçgenin kenarları ve oluşan BAC, CBA, ACB açılara da üçgenin açıları denir.



Elimizdeki kâğıttan herhangi bir üçgen oluşturalım. Açıları farklı renklere boyayıp şekildeki gibi katlayalım. Açılarının toplamının bir doğru açı oluşturduğunu fark ettiniz mi? Acaba bu durum hangi geometrik bağıntıyı açıklar?



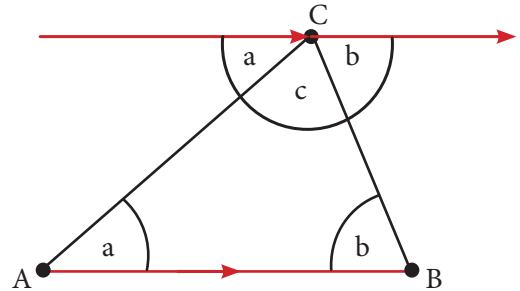
Kural:

Bir üçgende iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

İspat:

Herhangi bir köşeden geçen ve bu köşenin karşısındaki kenara paralel olan bir doğru çizilirse üç açının bir doğru açı oluşturduğu bulunur.

Dolayısıyla $a + b + c = 180^\circ$ olur.





Yukardaki kurala göre öğrencilere “Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı kaçtır?” sorusu yöneltilir ve ispatlamaları istenir.

Kural:

Bir üçgende dış açılarının ölçüleri toplamı 360° ’dir.

İspat:

$a + b + c = 180^\circ$ olduğundan dış açılarının ölçüleri toplamı

$(180^\circ - a) + (180^\circ - b) + (180^\circ - c) = 540^\circ - (a + b + c) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$ bulunur.

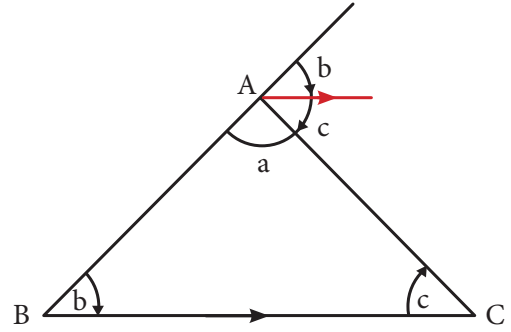
“Bir dış açının ölçüsünü iç açılarla ifade edebilir misiniz?” sorusu öğrencilere yöneltilir ve dış açıdan tabana paralel çizerek çözüm aramaları istenir.

Kural:

Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamıdır.

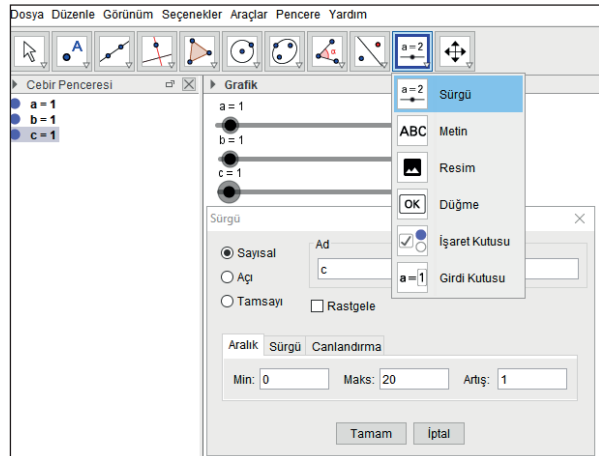
İspat:

A noktasından tabana paralel çizersek yöndeş ve iç ters açılardan ispat tamamlanır.

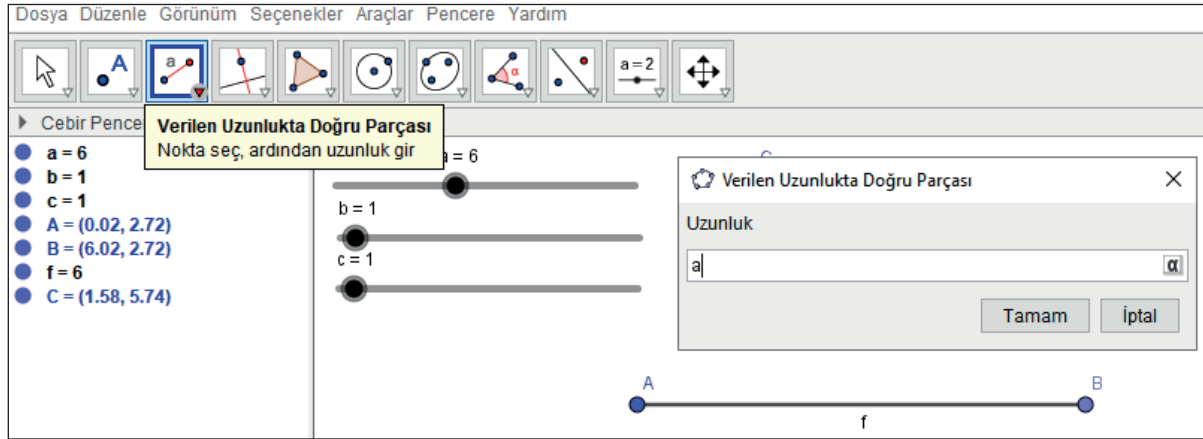


Dinamik matematik yazılımında üçgende bir açının ölçüsü değiştikçe, karşısındaki kenarın uzunluğundaki değişimi inceleyelim.

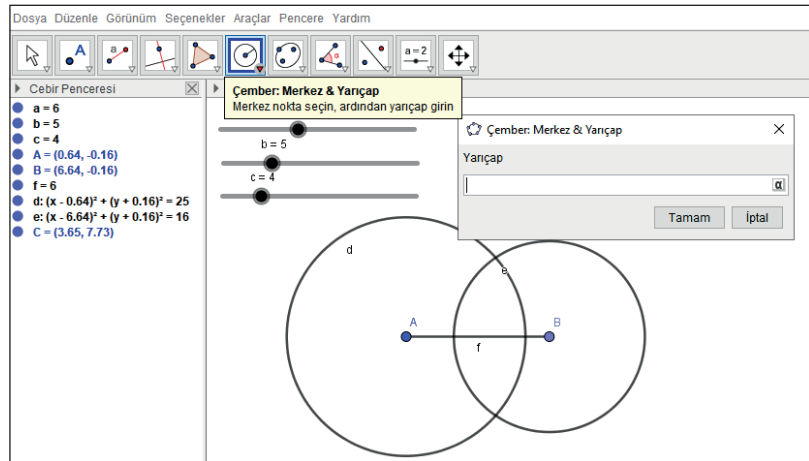
“Sürgü” sekmesi seçilerek ekranda boş bir noktaya tıklanır a, b, c sürgüleri Min: 0 / Maks: 20 / Artış: 1 olacak şekilde seçilir.



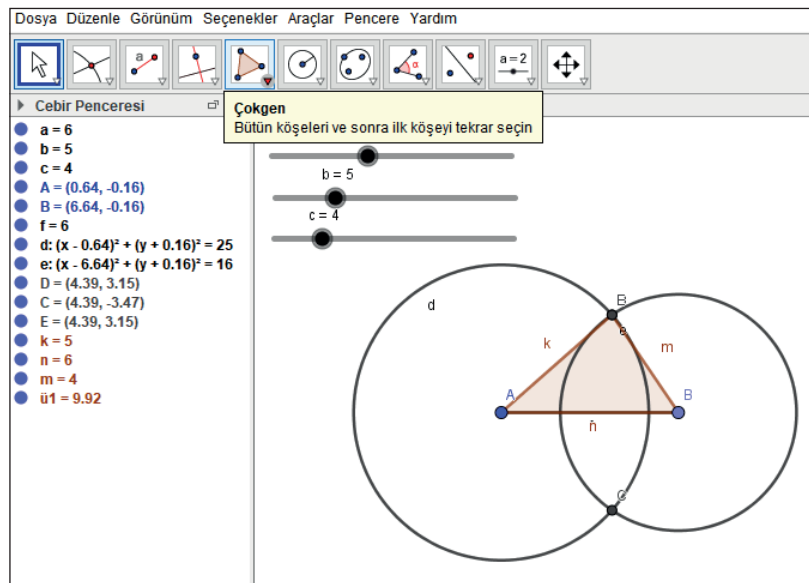
“Verilen Uzunlukta Doğru Parçası” sekmesi seçilip ekranda boş bir yere tıklanıp “Uzunluk” a sürgüsü seçilirse, [AB] doğru parçası a sürgüsüne bağlı olur.



“Çember: Merkez & Yarıçap” sekmesi seçilip A noktasına tıklanıp “Yarıçap” sekmesine b yazılırsa A merkezli b yarıçaplı çember oluşur. Benzer şekilde B merkezli c yarıçaplı çember oluşturulur.

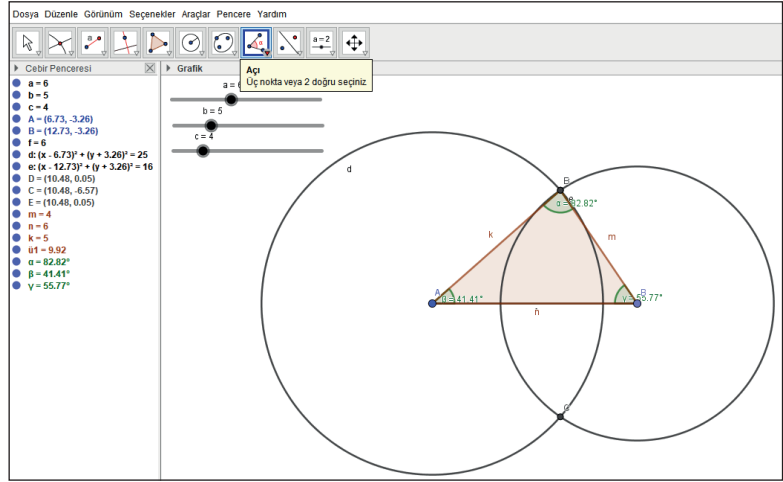


“Kesiştir” sekmesinde çemberler seçilip kesişim noktaları belirlenir. “Çokgen” sekmesiyle ABD üçgeni Cebir penceresinde kenar uzunlukları m, n, k olacak şekilde oluşur.





“Açı” sekmesiyle üçgenin köşeleri seçilerek α , β , γ açıları oluşturulur. a,b,c sürgüleri değiştirilerek üçgenin ne zaman oluşmadığı kenar uzunlukları ve karşısındaki açılar ilişkileri incelenir.



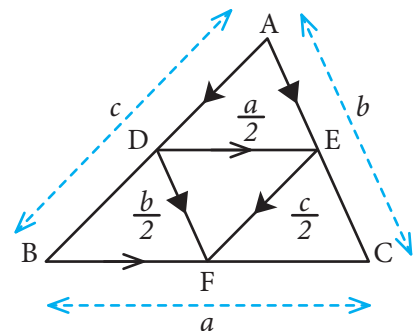
Etkinlik: Cetvel ile rastgele bir üçgen çizilir ve köşeler A, B, C olarak; köşelerin karşısındaki kenarlar da sırasıyla a, b, c olarak isimlendirilir. Her kenar sırasıyla ölçülür ve orta noktaları belirlenir. AB kenarının orta noktası D, AC kenarının orta noktası E ve BC kenarının orta noktası F ile isimlendirilir. Belirlenen orta noktalar birleştirilerek bir üçgen oluşturulur. Oluşturulan DEF üçgeninin kenar uzunlukları ile ABC üçgeninin kenar uzunlukları not alınarak aralarındaki ilişki incelenir. DEF üçgeninin kenarları ile ABC üçgeninin kenarlarının paralel olup olmadıkları incelenir.

ABC üçgeni	$ AB =...$	$ BC =...$	$ AC =...$
DEF üçgeni	$ EF =...$	$ DE =...$	$ DF =...$

TANIM

Orta Taban: Bir üçgende iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçasına bu üçgenin orta tabanı denir. Şekilde $[DE]$, $[EF]$, $[FD]$ birer orta tabandır. Orta taban daima üçüncü kenara (tabana) paraleldir ve tabanın yarısı uzunluğudur.

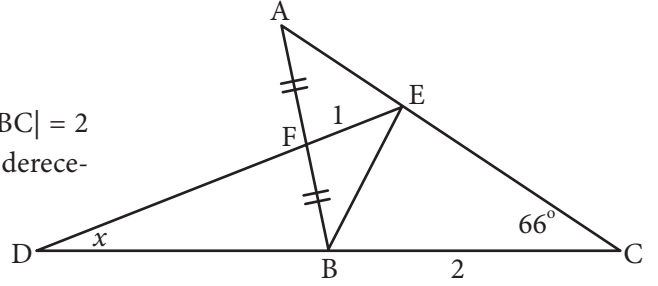
DEF üçgenine ABC üçgeninin **orta(ortay) üçgeni** denir.



Örnek:

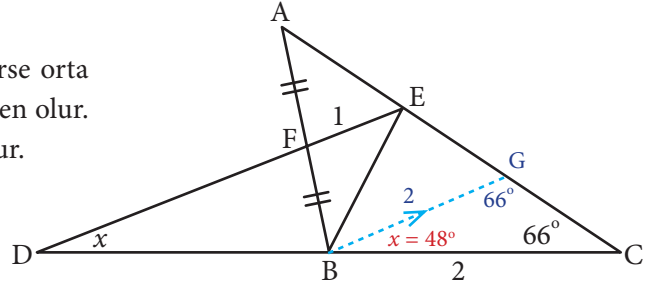
Etkinlik Formu Soru 1

ABC ve DEB birer üçgen. $|AF| = |FB|$ ve $2|FE| = |BC| = 2$ birim. $m(\angle ACB) = 66^\circ$ olduğuna göre $m(\angle EDB) = x$ kaç derecedir?



Çözüm:

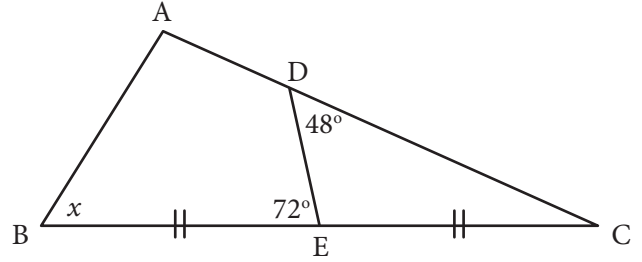
DE doğrusuna paralel bir BG doğru parçası çizilirse orta tabandan dolayı $|BG| = 2$ birim ve BGC ikizkenar üçgen olur. Yöndeş açılardan $m(\angle EDB) = m(\angle GBC) = x = 48^\circ$ bulunur.



Örnek:

Etkinlik Formu Soru 2

ABC üçgeninde $|BE| = |EC|$, $m(\angle BED) = 72^\circ$, $m(\angle EDC) = 48^\circ$, $|DC| = |BA| + |AD|$ olduğuna göre $m(\angle ABC) = x$ kaç derecedir?

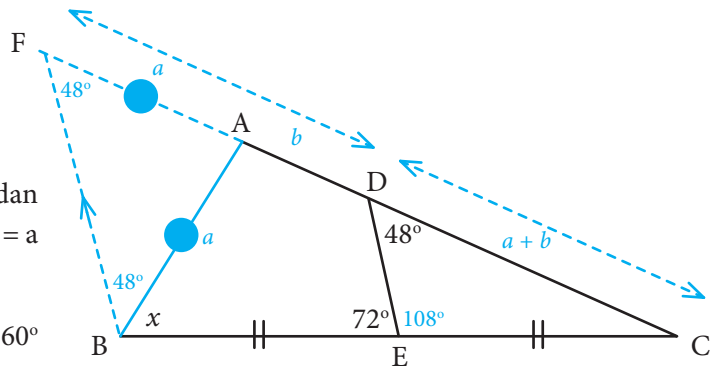


Çözüm:

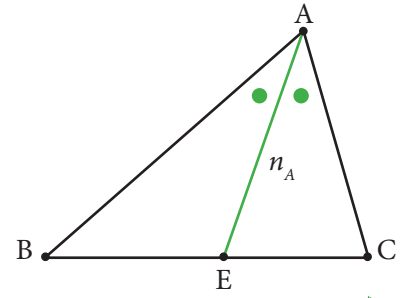
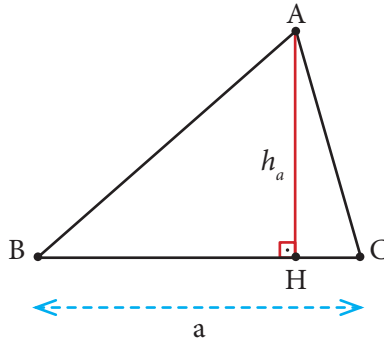
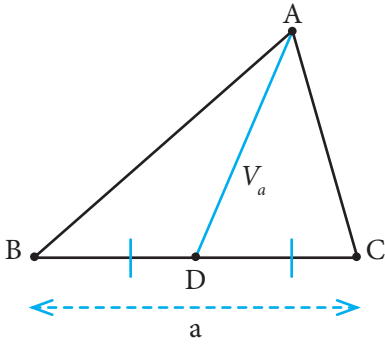
$|AB| = a$ ve $|AD| = b$ olsun.

BF// DE çizilirse DE orta taban olacağından $|DC| = |FD| = a + b$ olur. Bu durumda $|AF| = |AB| = a$ ve $m(\angle FBA) = 48^\circ$ bulunur.

Yöndeş açılardan $48^\circ + x = 108^\circ$ olur ve $x = 60^\circ$ bulunur.



Bir üçgende, A köşesini karşı kenarın ortasına birleştiren doğru parçasına [BC] kenarına ait kenarortay; aynı köşeden karşı kenara dik olacak şekilde çizilen doğru parçasına bu kenara ait yükseklik; bir köşeye ait açığı iki eş parçaya bölen doğrunun üçgen içinde kalan doğru parçasına bu köşeye ait iç açıortay, denir. Bu kavramlar üçgenin yardımcı elemanlarını içeren konuda detaylı olarak işlenecektir.

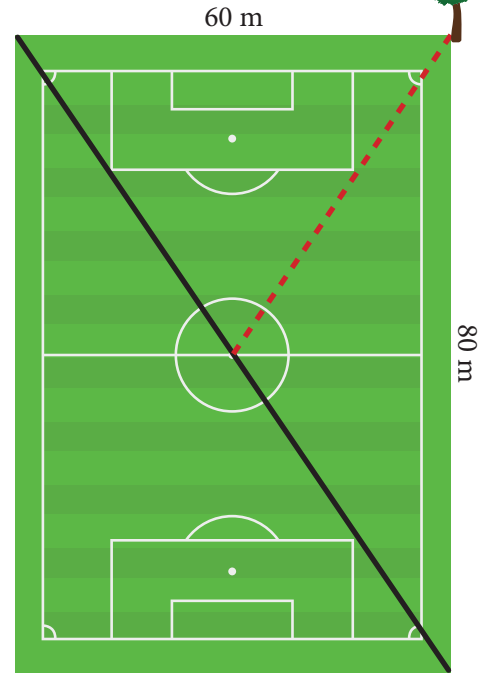
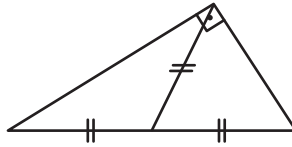


Yandaki dikdörtgen şeklindeki futbol sahasının çapraz iki köşesinin arasına gergin olacak şekilde kameranın ilerleyeceği kablo çekilmiştir. Asya, saha köşesindeki ağacın bulunduğu yerden kablonun tam orta noktasına yeniden kablo çekmek istemektedir. Sahanın kenarları 60 ve 80 metre olduğuna göre Asya en az kaç metre tel almalıdır?

Yukarıdaki soruyla öğrencilerin dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hakkında çıkarımda bulunmaları sağlanır.

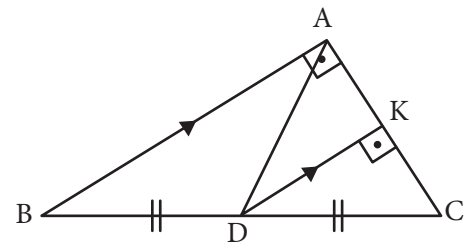
TANIM

Dik Üçgende Hipotenüse Ait Kenarortay Uzunluğu (Muhteşem Üçlü): Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu, hipotenüsün uzunluğunun yarısıdır.



İspat:

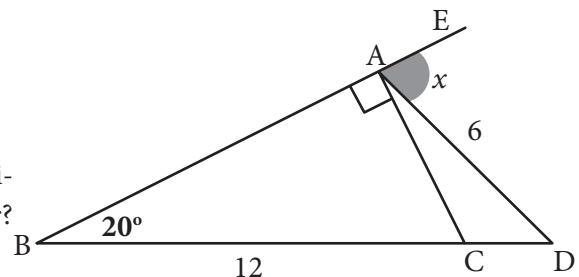
D noktasından BA doğrusuna paralel olan doğru, AC doğrusunu K noktasında kessin. [DK] orta taban olduğu için K orta noktadır. ADC üçgeninde [DK] hem yükseklik hem kenarortay olduğundan ADC ikizkenar üçgendir. $|AD|=|DC|=|BD|$ olduğundan ispat tamamlanır.



Örnek:

Etkinlik Formu Soru 3

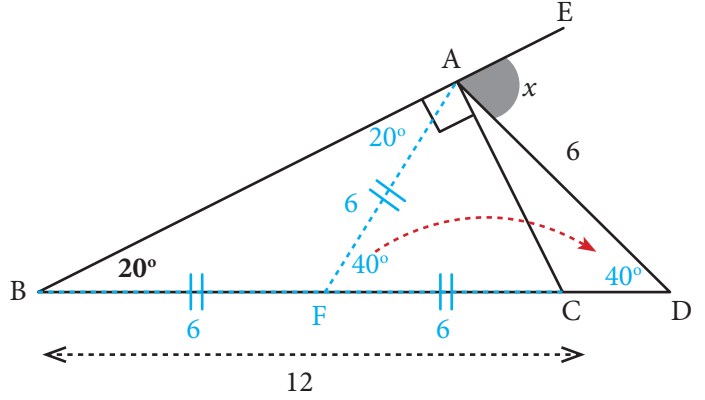
ABC dik üçgeninde $BA \perp CA$ $|BC| = 12$ birim $|AD| = 6$ birim $m(\angle DBE) = 20^\circ$ olduğuna göre $m(\angle DAE) = x$ kaç derecedir?



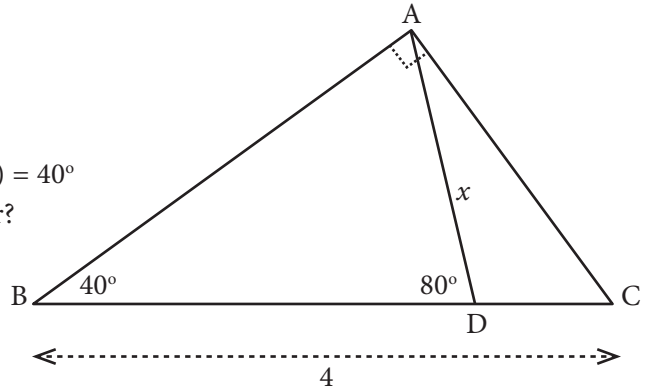
Çözüm:

ABC dik üçgeninde [AF] kenarortayı çizilirse muhteşem üçlünden $|AF| = |BF| = |FC| = 6$ birim olur. $|AD| = |AF|$ olduğundan AFD ikizkenar üçgen ve $m(\angle ADB) = 40^\circ$ olur.

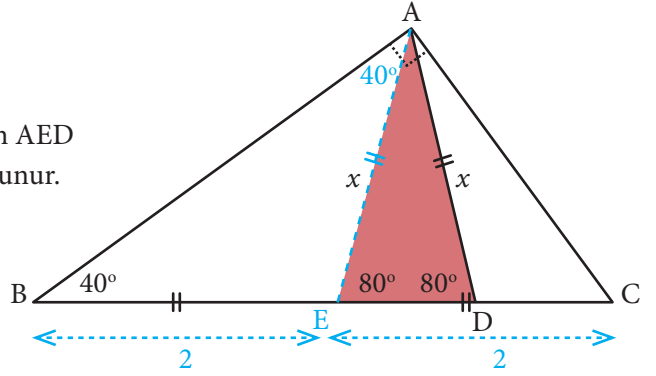
$$m(\angle DAE) = x = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ \text{ bulunur.}$$

**Örnek:****Etkinlik Formu Soru 4**

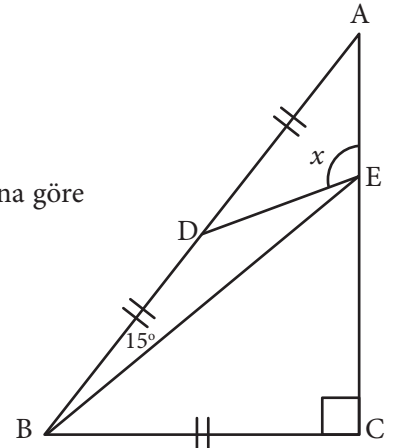
ABC üçgeninde $BA \perp AC$, $|BC| = 4$ birim, $m(\angle ABC) = 40^\circ$ ve $m(\angle ADB) = 80^\circ$ olduğuna göre $|AD| = x$ kaç birimdir?

**Çözüm:**

[AE] kenarortayı çizilirse $m(\angle AED) = 80^\circ$ olacağından AED ikizkenar üçgen olur. $|AD| = |AE| = |BE| = 2$ birim bulunur.

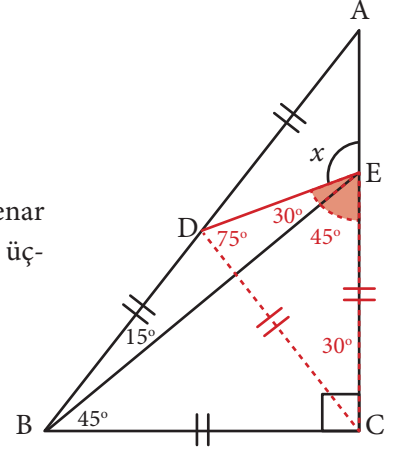
**Örnek:****Etkinlik Formu Soru 6**

ABC üçgeninde $AC \perp BC$, $|AD| = |DB| = |BC|$ ve $m(\angle ABE) = 15^\circ$ olduğuna göre $m(\angle DEA) = x$ kaç derecedir?



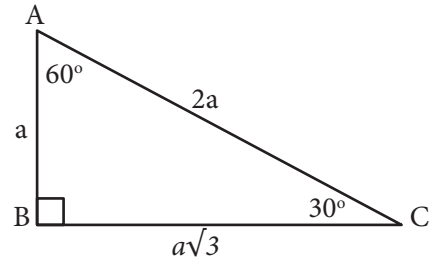
**Çözüm:**

$|AB| = 2|BC|$ olduğundan $m(\angle ABC) = 30^\circ$ ve $m(\angle BAC) = 60^\circ$ dir. BEC ikizkenar dik üçgen $|EC| = |BC|$ ve muhteşem üçlünden $|DC| = |BC|$ ise DCE ikizkenar üçgen olur. $m(\angle CED) = 75^\circ$ bulunur. $m(\angle DEA) = x = 105^\circ$ olur.

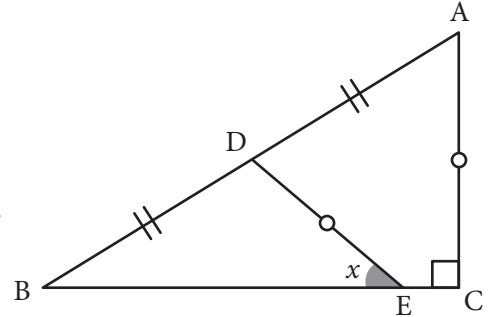
**TANIM**

Açıları $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ Olan Dik Üçgen: 30° karşısındaki kenar a ise 60° karşısındaki kenar $a\sqrt{3}$ ve hipotenüs $2a$ olur.

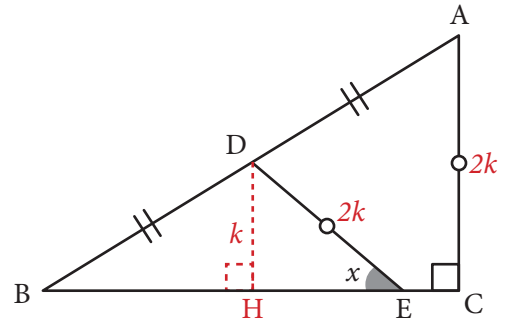
Bir dik üçgende bir dik kenar hipotenüsün yarısı ise bu kenarı gören açı 30° olur.

**Örnek:****Etkinlik Formu Soru 5**

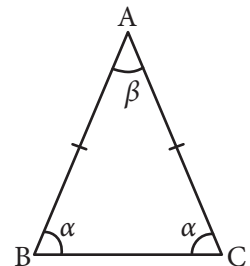
ABC dik üçgeninde $AC \perp BC$, $|AD| = |BD|$ ve $|DE| = |AC|$ olduğuna göre $m(\angle DEC) = x$ kaç derecedir?

**Çözüm:**

D noktasından BC kenarına dikme indirilirse orta tabandan dolayı $2|DH| = |AC| = 2k$ olur. Bu durumda DHE dik üçgeninde hipotenüs dik kenarın iki katı olduğundan $m(\angle DEB) = 30^\circ$ bulunur.

**TANIM**

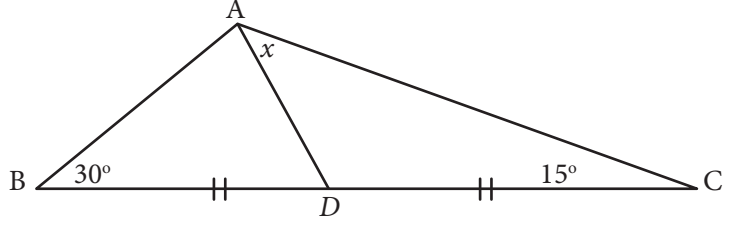
İkizkenar Üçgen: İki kenarı eş olan ya da iki açısı eş olan üçgenlere ikizkenar üçgen denir. İkizkenar üçgenlerde farklı uzunlukta olan kenara (a) taban, eşit kenarlara (b) ikiz kenarlar, eşit açılara α taban açıları, farklı açılara β tepe açısı denir.



Örnek:

Etkinlik Formu Soru 7

ABC üçgeninde $|BD| = |DC|$, $m(\angle ABC) = 30^\circ$ ve $m(\angle ACB) = 15^\circ$ olduğuna göre $m(\angle DAC) = x$ kaç derecedir?

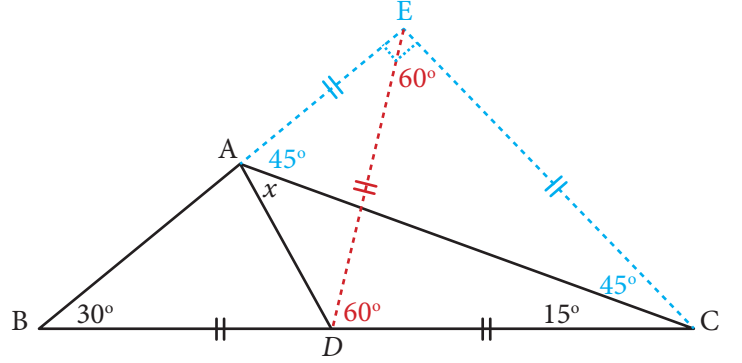


Çözüm:

$BE \perp CE$ olacak şekilde EBC üçgenini oluşturalım. Muhteşem üçlünden $|ED| = |BD| = |DC|$ olur.

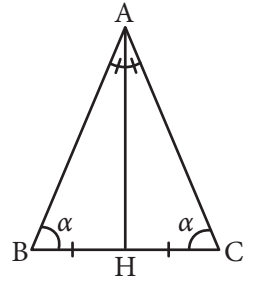
DEC eşkenar üçgen ve AED tepe açısı 30° olan ikizkenar üçgen olarak bulunur. $m(\angle CAE) = 45^\circ$ olduğundan

$$m(\angle DAC) = x = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ \text{ olur.}$$

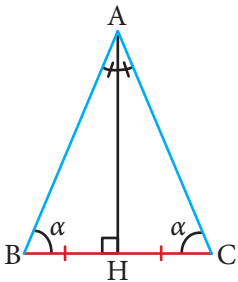


Kural:

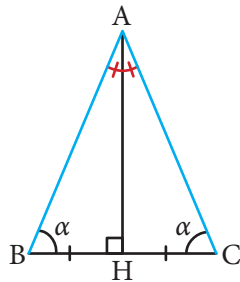
Bir ikizkenar üçgende, tepe açısından indirilen dikme hem kenarortay hem de açıortay olur.



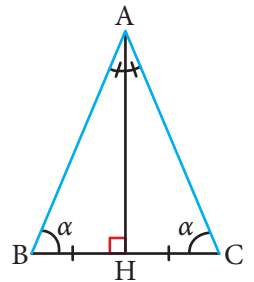
Dik, açıortay, kenarortay, ikizkenar (D-A-K-İ) yani dört durumdan ikisinin bilinmesi diğerlerinin olması için yeterlidir. Aşağıda siyah çizgiler verilmiş olsun mavi ve kırmızı özellikler vardır.



Açıortay ve yükseklik aynı



Kenarortay ve yükseklik aynı

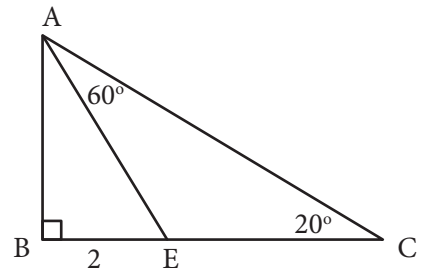


Açıortay ve kenarortay aynı

Örnek:

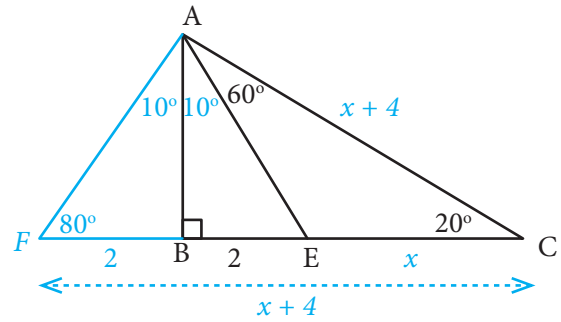
Etkinlik Formu Soru 8

ABC diküçgeninde $AB \perp BC$, $|BE| = 2$ birim, $m(\angle ACB) = 20^\circ$ ve $m(\angle EAC) = 60^\circ$ olduğuna göre $|AC| - |EC|$ kaç birimdir?



Çözüm:

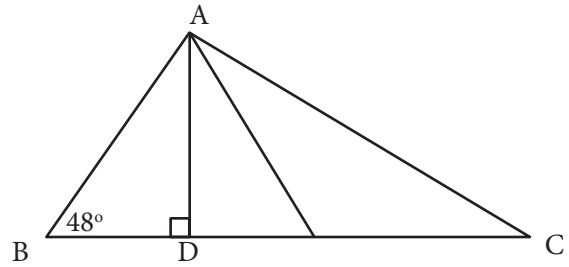
[BE] doğru parçasının AB doğrusuna göre simetrisi alınır ve AFE ikizkenar üçgeni oluşturulursa $|FB| = |BE| = 2$ birim ve $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{FAC}) = 80^\circ$ olur. $|EC| = x$ birim olursa $|FC| = |AC| = x + 4$ birim ve $|AC| - |EC| = x + 4 - x = 4$ birim bulunur.



Örnek:

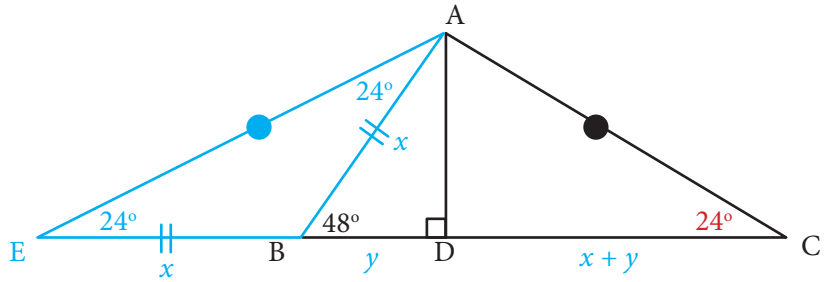
Etkinlik Formu Soru 9

ABC üçgeninde $AD \perp BC$, $m(\angle ABC) = 48^\circ$, $|DC| = |AB| + |BD|$ olduğuna göre $m(\angle BCA)$ kaç derecedir?



Çözüm:

BC kenarı AB uzunluğu kadar uzatılır ve AEB üçgeni oluşturulur. AEB ikizkenar üçgen ve $m(\widehat{AEC}) = 24^\circ$ olur. $|ED| = |DC|$ ve $AD \perp EC$ olduğundan AEC üçgeni de ikizkenar üçgendir. $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ACE}) = 24^\circ$ bulunur.



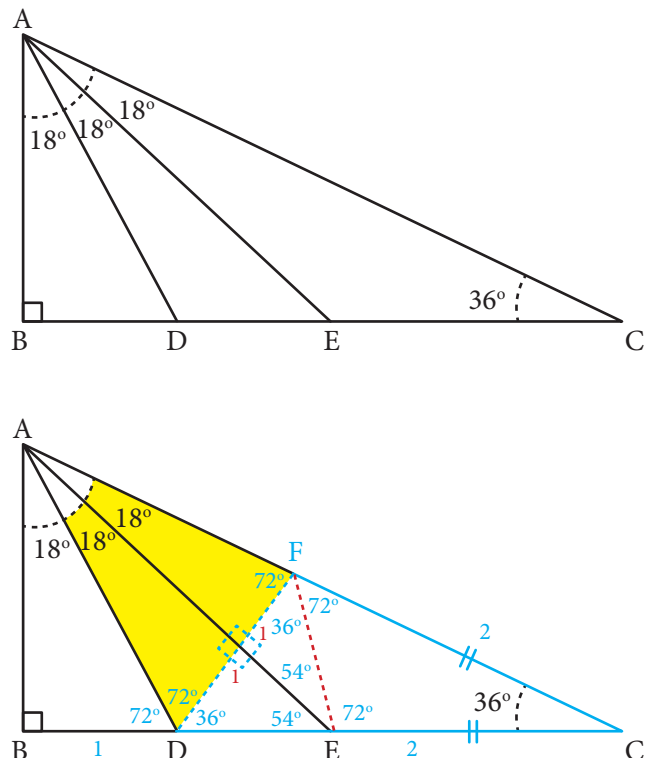
Örnek:

Etkinlik Formu Soru 10

ABC dik üçgeninde
 $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{EAC}) = 18^\circ$ ve
 $m(\widehat{ACB}) = 36^\circ$, $|BD| = 1$ birim ise $|EC|$ kaç birimdir?

Çözüm:

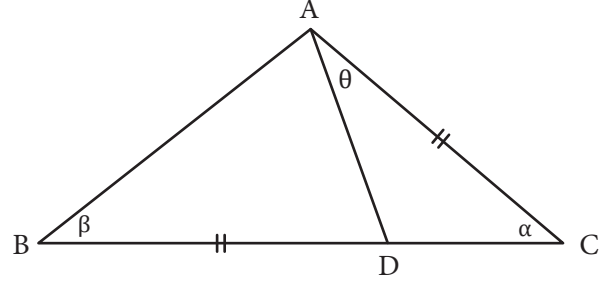
D noktasından AE doğrusuna bir dikme indirelim ve bu dikmenin AC doğrusunu kestiği nokta F olsun. AD doğrusu m(BAE) açısının açıortayı olduğundan $|DH| = 1$ olur. ADF ikizkenar üçgen olduğundan DH kenarortay olur ve $|HF| = 1$ bulunur. Bu durumda DFE üçgeni de ikizkenar olur. $m(FDE) = m(FED) = 36^\circ$ olduğundan BFC ikizkenar ve $|FC| = 2$ birim olur. $m(CFE) = m(CEB) = 72^\circ$ olduğundan FEC ikizkenar ve $|EC| = 2$ birim bulunur.



Örnek:

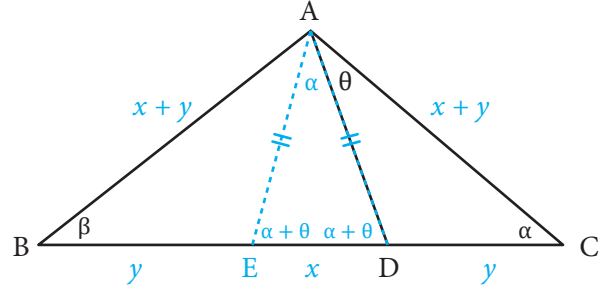
Etkinlik Formu Soru 11

ABC üçgeninde $|BD| = |AC|$ ve $2\theta + 3\alpha = 180^\circ$ olduğuna göre α ve β arasındaki bağıntıyı bulalım.



Çözüm:

$|AD| = |AE|$ olacak şekilde BC kenarında E noktası belirleyelim. $2\theta + 3\alpha = 180^\circ$ olduğundan $m(\angle EAD) = \alpha$ olur. ACB ikizkenar üçgen bulunur. $|ED| = x$ ve $|BE| = y$ olsun. $|AC| = x + y$ olur. ABE ve ADC eş üçgenler olduğundan $\beta = \alpha$ bulunur.



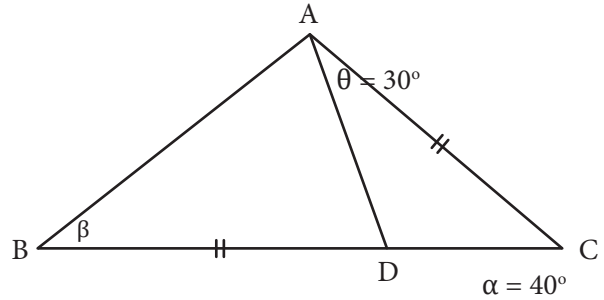
Dinamik matematik yazılımında yukarıdaki örnekte genel özellikleri verilen üçgenin açılarını bulmaya yönelik uygulama yaptırılır.

Örnek:

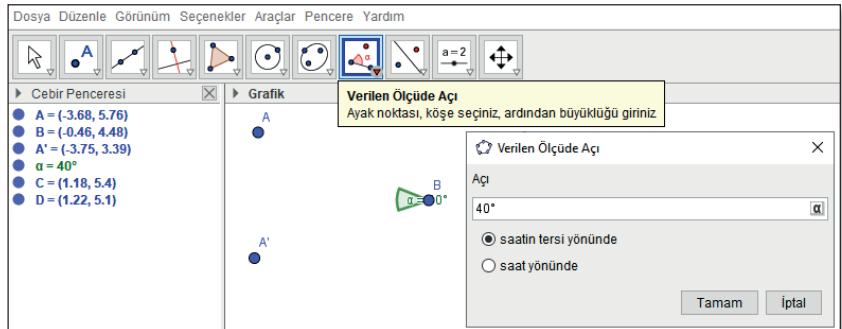
ABC üçgeninde $\theta = 30^\circ$ ve $\alpha = 40^\circ$ olarak verilsin. Üçgenin açı ve kenarları yukarıdaki örnekte genel modeli verilen üçgene uymaktadır.

$|BD| = |AC|$ ve $2\theta + 3\alpha = 180^\circ$ olduğundan

$\beta = \alpha = 40^\circ$ olur.

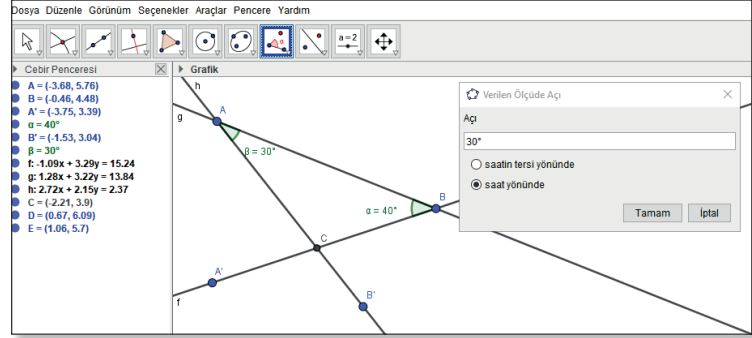


Dinamik programın “Verilen Ölçüde Açı” özelliğini kullanarak 40° ’lik ABA’ açısı oluşturulur.

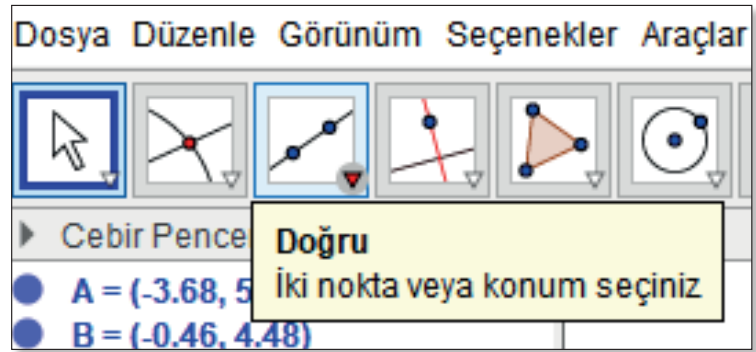




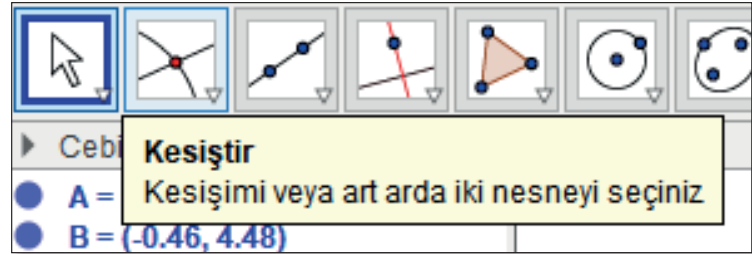
Benzer şekilde “Verilen Ölçüde Aç” özelliğini kullanarak sırasıyla B ve A noktaları seçilip 30°lik saat yönünde seçilerek BAB’ açısı oluşturulur.



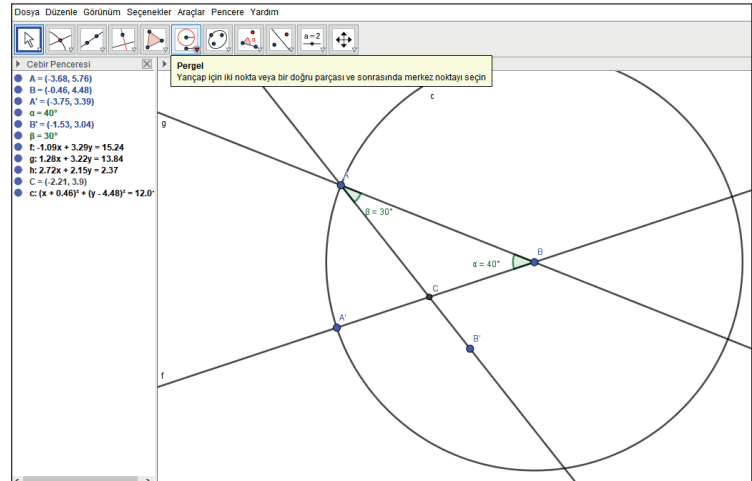
A, A' , B ve B' noktalarından geçen doğrular “Doğru” özelliği kullanılarak çizilir.



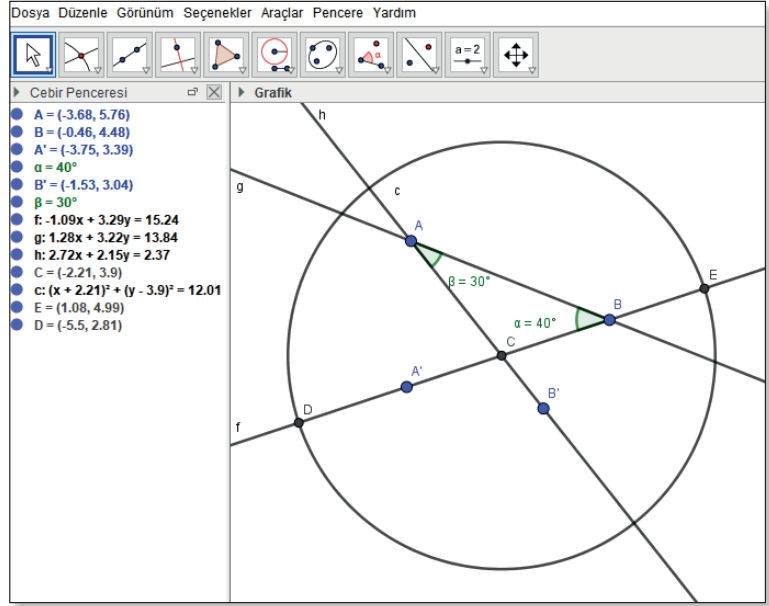
AB’ ve BA’ noktalarının geçen doğruların kesişimi “Kesiştir” özelliği C noktası olarak belirlenir.



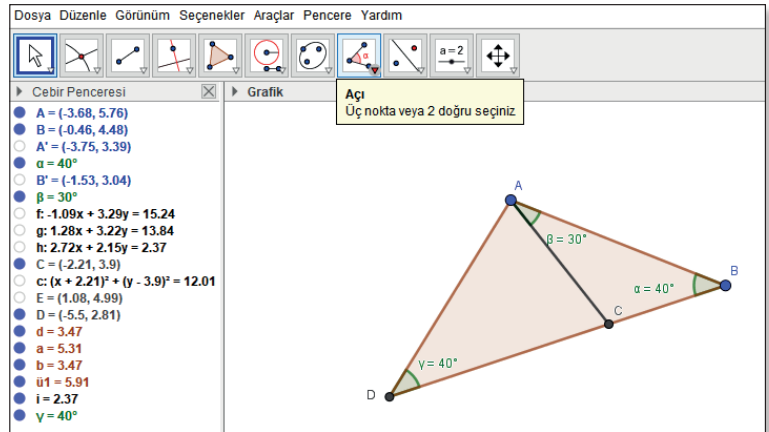
“Pergel” özelliği ile sırasıyla A ve B noktaları AB doğru parçası uzunluğunu taşımak için seçilir.



Beliren çember merkezi C olacak şekilde taşınır ve çemberin BC doğrusunu kestiği nokta “Kesiştir” özelliği ile D noktası olarak belirlenir.



ABD üçgeni çizilirse AB uzunluğu CD uzunluğuna eşit olur. “Açı” özelliğinden sırasıyla BDA seçilirse $m(\text{BDA}) = \gamma = 40^\circ$ olarak bulunmuş olur.



EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Geometri sorularında sentetik çözüm nedir?
- Langley ($20^\circ - 80^\circ - 80^\circ$) Üçgeni ve özelliklerini araştırınız.
- Pompeiu Üçgeni ve özelliklerini araştırınız.
- Morley Üçgeni ve özelliklerini araştırınız.
- (2019- TÜBİTAK Ortaokul Matematik Olimpiyatı) Dar açılı bir ABC üçgeninde A dan [BC] kenarına inen dikme ayağı D noktasıdır. [AB] kenarının orta noktası E olmak üzere, $m(\text{BAD}) = 20^\circ$ ve $|AE| = |CD|$ ise, $m(\text{BCE})$ kaçtır?



- (2019- TÜBİTAK Ortaokul Matematik Olimpiyatı) Bir ABC üçgeninde $|AB| = 11$ ve $|BC| = 17$ 'dir. $[BC]$ kenarı üzerinde bir D noktası $|DC| = 3$ olacak biçimde alınıyor. $[AC]$ kenarının orta noktası E olmak üzere, $s(BDE) = 56^\circ$ ise, $s(ABC)$ kaçtır?
- (2018- TÜBİTAK Ortaokul Matematik Olimpiyatı) $m(BAC) = 140^\circ$ ve $m(ABC) = 30^\circ$ olan bir ABC üçgeninde, A noktasının BC doğrusuna göre simetriği D, B noktasının AC doğrusuna göre simetriği ise E'dir. $m(DEC)$ kaçtır?
- ABC ikizkenar bir üçgen olmak üzere $|AB| = |AC|$ 'dir. Üçgen içerisinde $|AD| = |DB|$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor $m(DAC) = 80^\circ$ ve $m(ADB) = 140^\circ$ ise $m(DCB)$ 'yi bulunuz.

KAYNAKLAR

Şahin, M.(2013). *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Geometri-1*, Palme Yayınevi.

Küpeli, S. (2010). *100 Yılın Olimpiyat Soruları ile Geometri*, Altın Nokta Yayınevi.

Large, T.& Rogers, K. (2015). *Şekilli Matematik Sözlüğü*, TÜBİTAK Yayınları.

TÜBİTAK (2018). Ortaokul Matematik Olimpiyatı. <https://www.tubitak.gov.tr/tr/olimpiyatlar/io-matematik-olimpiyatları/icerik-matematik>

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

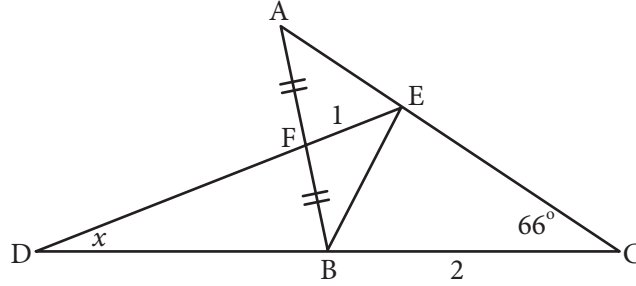
Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği'ne etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

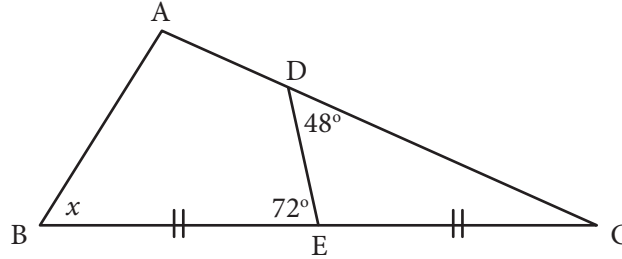
Etkinlik formundaki soruların çözümleri etkinlik içerisinde verilmiştir.

Etkinlik Formu

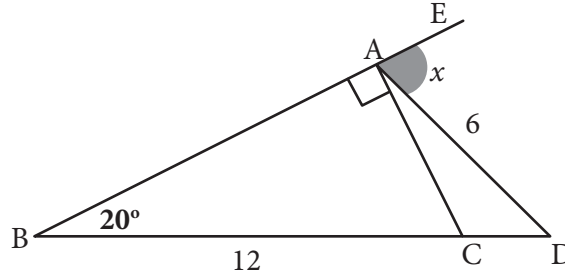
1. ABC ve DEB birer üçgen. $|AF| = |FB|$ ve $2|FE| = |BC| = 2$ birim. $m(\angle ACB) = 66^\circ$ olduğuna göre $m(\angle EDB) = x$ kaç derecedir?



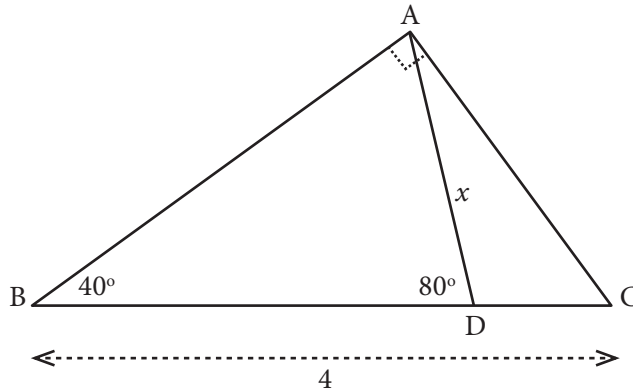
2. ABC üçgeninde $|BE| = |EC|$, $m(\angle BED) = 72^\circ$, $m(\angle EDC) = 48^\circ$, $|DC| = |BA| + |AD|$ olduğuna göre $m(\angle ABC) = x$ kaç derecedir?



3. ABC dik üçgeninde $BA \perp CA$, $|BC| = 12$ birim, $|AD| = 6$ birim, $m(\angle DBE) = 20^\circ$ olduğuna göre $m(\angle DAE) = x$ kaç derecedir?

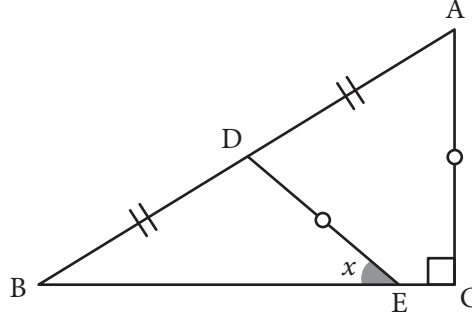


4. ABC üçgeninde $BA \perp AC$, $|BC| = 4$ birim, $m(\angle ABC) = 40^\circ$ ve $m(\angle ADB) = 80^\circ$ olduğuna göre $|AD| = x$ kaç birimdir?

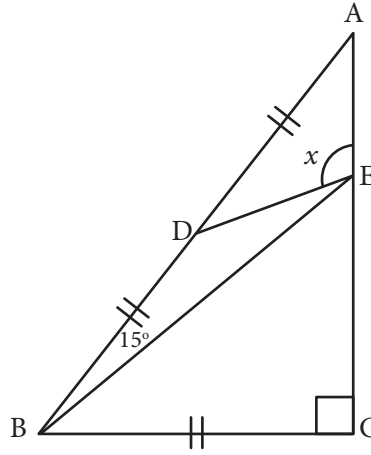




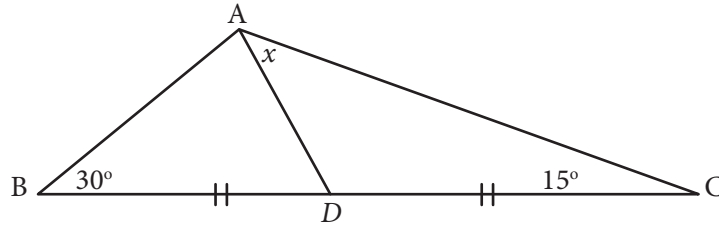
5. ABC dik üçgeninde $AC \perp BC$, $|AD| = |BD|$ ve $|DE| = |AC|$ olduğuna göre $m(\angle DEC) = x$ kaç derecedir?



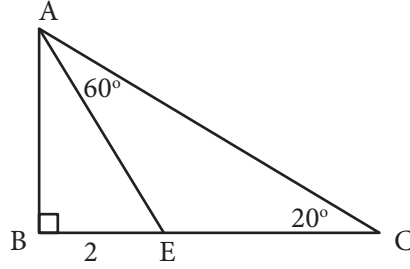
6. ABC üçgeninde $AC \perp BC$, $|AD| = |DB| = |BC|$ ve $m(\angle ABE) = 15^\circ$ olduğuna göre $m(\angle DEA) = x$ kaç derecedir?



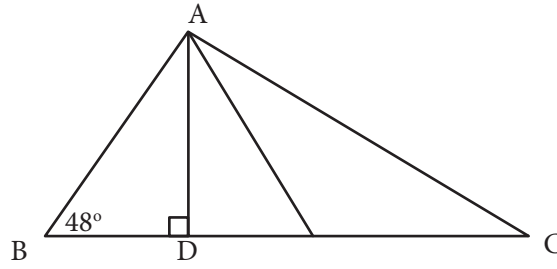
7. ABC üçgeninde $|BD| = |DC|$, $m(\angle ABC) = 30^\circ$ ve $m(\angle ACB) = 15^\circ$ olduğuna göre $m(\angle DAC) = x$ kaç derecedir?



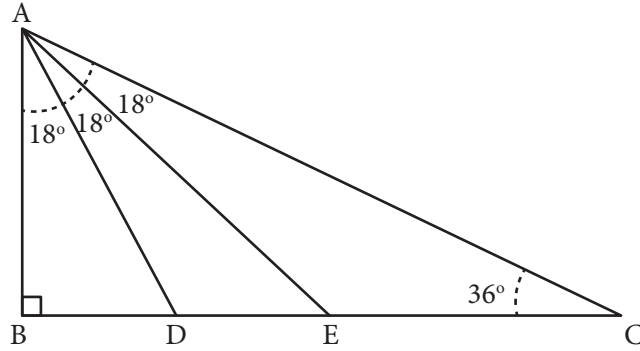
8. ABC dik üçgeninde $AB \perp BC$, $|BE| = 2$ birim, $m(\angle ACB) = 20^\circ$ ve $m(\angle EAC) = 60^\circ$ olduğuna göre $|AC| - |EC|$ kaç birimdir?



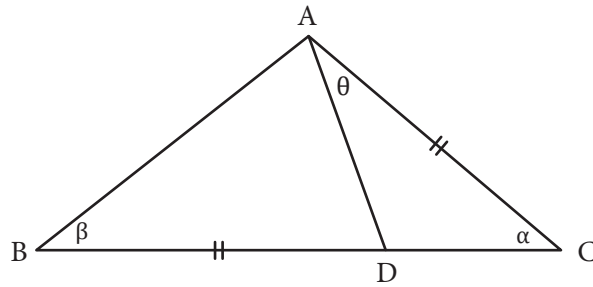
9. ABC üçgeninde $AD \perp BC$, $m(\angle ABC) = 48^\circ$, $|DC| = |AB| + |BD|$ olduğuna göre $m(\angle BCA)$ kaç derecedir?



10. ABC dik üçgeninde $m(\angle BAD) = m(\angle DAE) = m(\angle EAC) = 18^\circ$ ve $m(\angle ACB) = 36^\circ$ $|BD| = 1$ birim ise $|EC|$ kaç birimdir?



11. ABC üçgeninde $|BD| = |AC|$ ve $2\theta + 3\alpha = 180^\circ$ olduğuna göre α ve β arasındaki bağıntıyı bulalım.





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: ÜÇGENLERDE EŞLİK, BENZERLİK

: Geometri/Üçgenler

- : 1. İki üçgenin eş olmasının asgari koşullarına karar verir.
- : 2. Üçgende eşlik teoremlerini ispatlar.
- : 3. İki üçgenin benzer olmasının asgari koşullarına karar verir.
- : 4. Üçgende benzerlik teoremlerini ispatlar.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

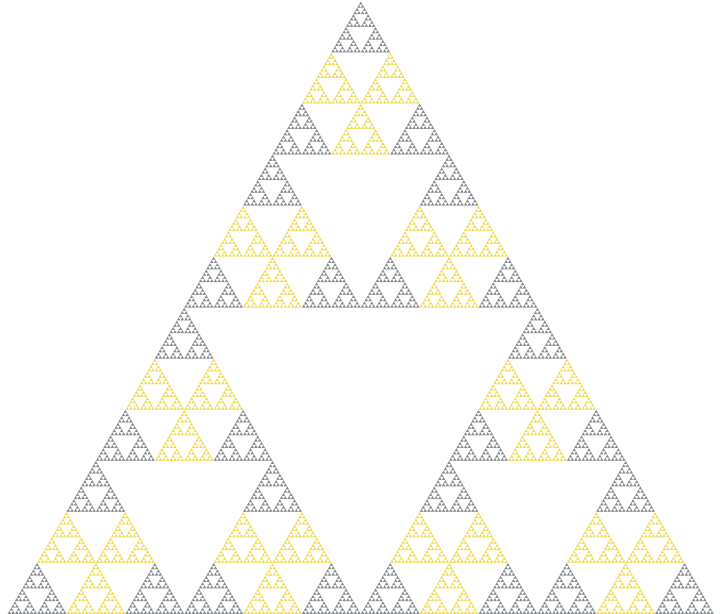
: Etkinlik Formu, pergeli, cetvel

Etkinliğin Amacı

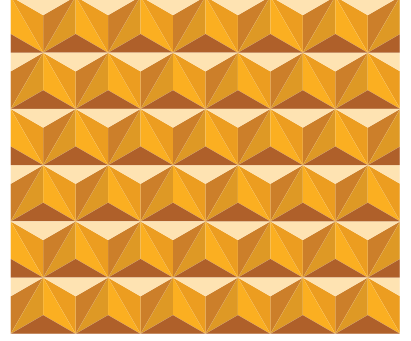
Bu etkinlikte, üçgenlerde eşlik ve benzerlik ile ilgili verilen bağıntıların ispatları ve uygulamalarının yapılması hedeflenmektedir. Dinamik matematik programı yardımıyla öğrencilerin örnek durumları teknoloji yardımıyla çözmeleri amaçlanmıştır.

Başlarken...

Fransız bilim insanı Benoît Mandelbrot tarafından geliştirilmiş olan fraktal geometri, doğayı daha iyi modellemek için yeni bir geometri kavramı olarak oluşturulmuştur. Fraktal geometri denilince ilk akla gelenlerden biri ise Polonyalı matematikçi Waclaw Sierpinski'nin adını taşıyan Sierpinski üçgenidir. Sierpinski üçgeni eşkenar üçgenin içinden küçük eşkenar üçgenler çıkarılarak elde edilmektedir. Fraktal kavramında ilk verilen şeklin belli bir oranda küçültülmesi ile yeni bir şekil inşa edilmesi esastır. Geometrinin, doğal olayların matematiksel olarak modellenmesinde kullanılması, bu konuda yapılan çalışmalar sonucunda artmıştır.

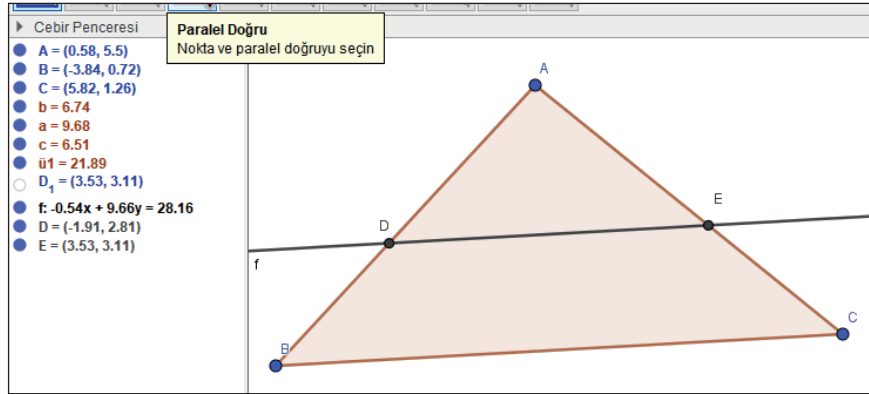


Sizce yandaki üçgenlerin kenar uzunlukları, açıları ve alanları hakkında ne söylenebilir? Tartışınız.

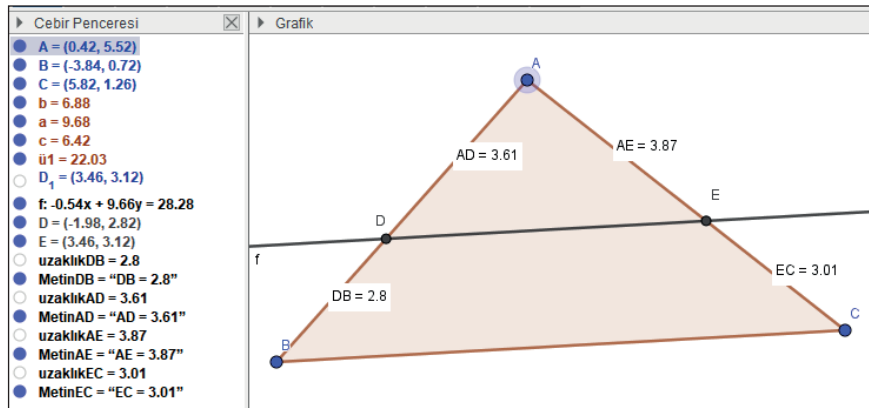


Bir dinamik matematik yazılımı kullanarak ABC üçgeni çizip [BC] kenarına paralel ve diğer kenarları kesen DE doğrusunu çizelim. Daha sonra doğrunun kenarlarda ayırdığı parçaların uzunlukları ile ilgili tabloyu dolduralım.

“Çokgen” oluştur sekmesinden üç nokta ardışık seçilerek ABC üçgeni oluşturulur. “Paralel Doğru” komutu ile önce [BC] kenarı sonra diğer kenarları kesen DE doğrusu oluşturulur.



“Uzunluk veya Uzaklık” komutundan [AD], [DB], [AE], [EC] uzunlukları bulunur.





Giriş sekmesinde

uzaklıkAD/uzaklıkDB ve uzaklıkAE/uzaklıkEC yazılarak AD/DB ve AE/EC oranlarının Cebir Penceresinde oluşması sağlanır. A,B,C değişken noktaları fare ile sürüklenerek oluşan değerler tabloya yazılır.

[AD]	[DB]	[AD]/ [DB]	[AE]	[EC]	[AE]/ [EC]



TARTIŞMA SORUSU

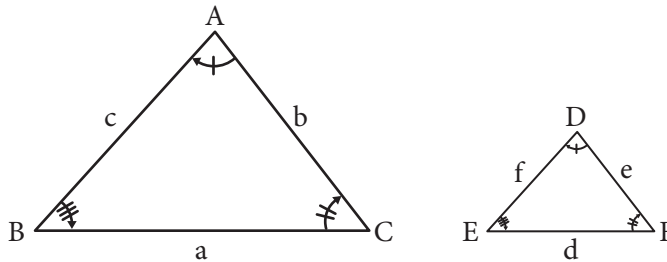
Bir üçgenin kenarlarından herhangi birine paralel ve diğer iki kenarı kesen bir doğrunun, bu kenarlarda ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları ve tablodaki oranlar hakkında ne söyleyebilirsiniz? Tartışınız.

Eşlik-Benzerlik

Geometrik bir şekil diğer bir geometrik şeklin k kat büyüğü veya küçüğü ise iki şekil birbirinin benzeridir, denir. Geometrik bir şeklin büyüteçteki görüntüsünü düşünürsek görüntüde oluşan şekil orijinal şeklin tüm elamanlarının belli oranda büyütülmüş hâlidir.

Şekildeki ABC üçgeni ve DEF üçgeni benzer ise $ABC \sim DEF$ şeklinde gösterilir. Burada üçgenler adlandırılırken harflerin yeri önemlidir. Eşit açıların yazılımındaki sıra korunmalıdır.

Benzerlik oranı k olmak üzere, $ABC \sim DEF$ ise $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$ yazılabilir.



Eğer benzerlik oranı $k=1$ ise üçgenlere eş şekiller denir. Bu durumda $a=d$, $b=e$ ve $c=f$ olur ki bu durumda $ABC \cong DEF$ yazılır.

Eşlik-Benzerlik Özellikleri

ABC ve DEF üçgenleri için aşağıdaki koşullardan birinin sağlanması durumunda iki üçgen benzerdir.

1. Açı-Açı-Açı Özelliği (AAA)

İki üçgenin üç açısının da ölçüleri eşitse bu üçgenler benzerdir. İki üçgenin iki açısının ölçüleri eşitse diğer açılarda eşit olacağından bu benzerlik Açı-Açı (AA) benzerliği olarak da adlandırılır. Yani,

$$m(\angle ABC) = m(\angle DEF), m(\angle BAC) = m(\angle EDF), m(\angle ACB) = m(\angle DFE) \text{ ise } ABC \sim DEF \text{ dir.}$$

2. Kenar-Kenar-Kenar Özelliği (KKK)

İki üçgenin tüm kenar uzunluklarının birbirine oranı eşitse üçgenler benzerdir. Yani,

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} \text{ ise } ABC \sim DEF \text{ dir.}$$

3. Kenar-Açı-Kenar Özelliği (KAK)

İki üçgende karşılıklı iki uzunluğu oranı ve bu kenarların arasındaki açı ölçüleri eşitse üçgenler benzerdir. Yani,

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} \text{ ve } m(\angle ABC) = m(\angle DEF) \text{ ise } ABC \sim DEF \text{ dir.}$$

Benzer üçgenlerde

- Benzer üçgenlerin çevreleri oranları, çevrel çemberlerinin yarıçapları oranı, iç teğet çemberlerinin yarıçapları oranı benzerlik oranına eşittir.
- Benzer üçgenlerin alanlarının oranları benzerlik oranının karesine eşittir.
- Benzer üçgenlerin orantılı kenarlarına ait kenarortay oranları ve yükseklikleri oranları ile eşit açılarına ait açıortayları oranları benzerlik oranına eşittir.



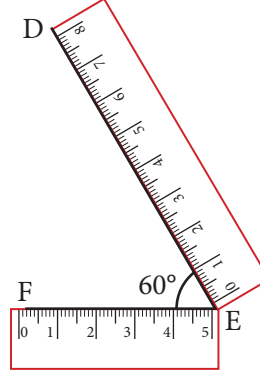
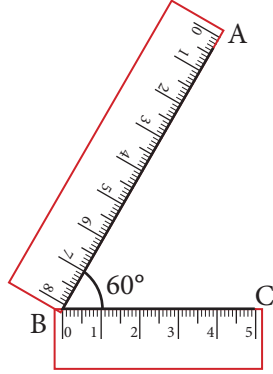
2. ETKİNLİK



Açıölçer ve Cetvel ile Üçgende Kenar - Açı - Kenar (KAK) Eşliği Oluşturma

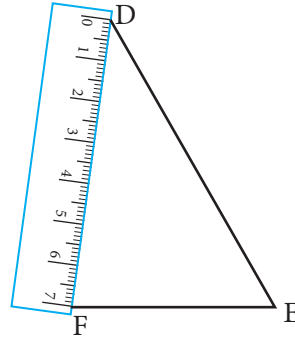
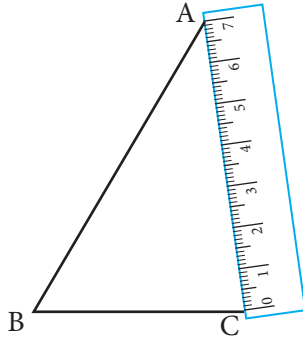
Cetvel yardımıyla 5 cm uzunluğunda iki doğru parçası çizelim.

Açıölçer kullanarak B ve E noktalarından 60° lik açı çizerek 8 cm uzunluğunda bir doğru parçası oluşturalım.



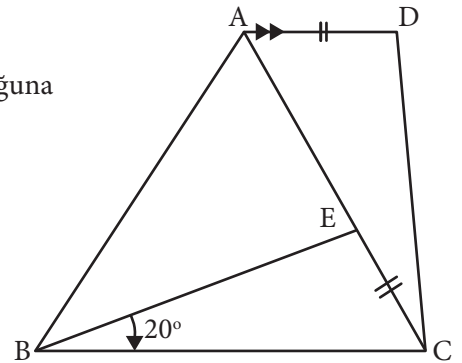
[AC] ve [DF] doğru parçalarını çizerek ABC ve DEF üçgenin oluşturalım. Cetvelle [AC] ve [DF] ölçülürse $|AC| = |DF| = 7$ cm olarak ölçülür.

ABC ve DEF üçgenleri eş üçgen olarak bulunur. Karşılıklı iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasında kalan açılar eşit olan iki üçgen eş üçgenlerdir.



Örnek:

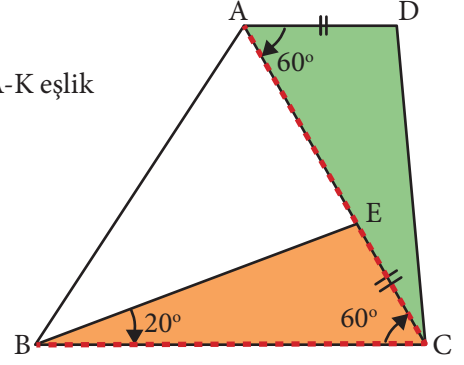
ABC eşkenar üçgen $AD \parallel BC$, $|AD| = |EC|$ ve $m(\angle EBC) = 20^\circ$ olduğuna göre $m(\angle ACD)$ kaç derecedir?



Çözüm:

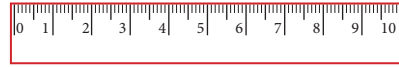
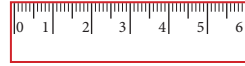
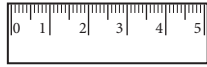
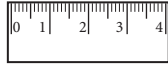
$|AC| = |BC|$, $m(\angle CAD) = m(\angle BCE) = 60^\circ$ ve $|AD| = |EC|$ olduğuna K-A-K eşlik teoreminden $\triangle BCE \cong \triangle CAD$ olur. Bu durumda

$$m(\angle ACD) = m(\angle ECB) = 20^\circ \text{ bulunur.}$$



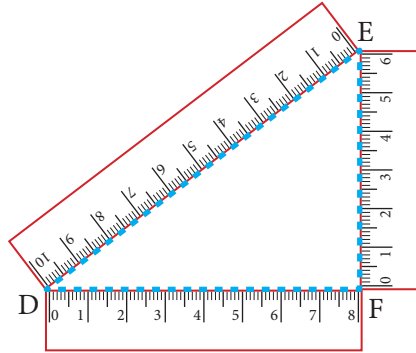
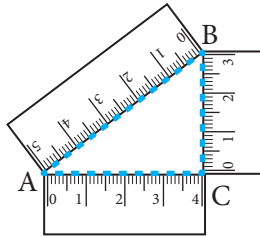
Açıölçer ve Cetvel ile Üçgende Kenar - Kenar - Kenar (KAK) Benzerliği Oluşturma

Cetvel yardımıyla 3 cm, 4 cm, 5 cm uzunluğunda ve 6 cm, 8 cm, 10 cm boylarında iki grup tahta çubuk keselim.

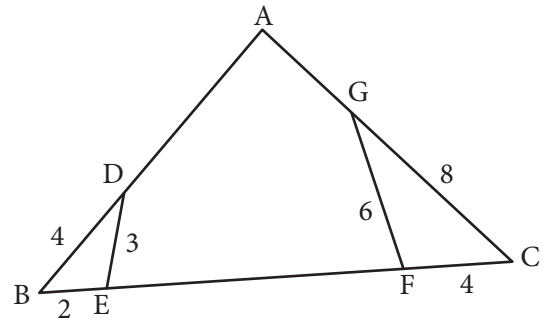


İki grup çubuklardan üçgenler oluşturalım ve oluşan üçgenlerin açıları ölçüldüğünde ABC ve DEF üçgenlerinin açılarını eşit olduğu görülür. Bu durumda $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ bulunur.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

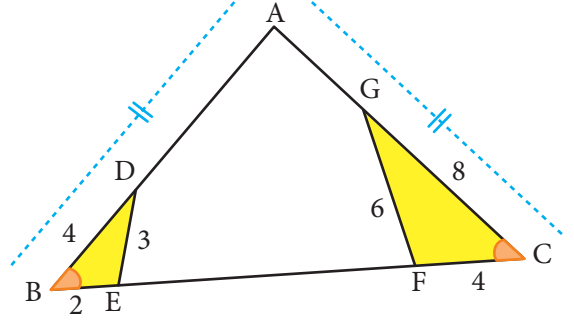
**Örnek:**

ABC üçgeninde verilenlere göre $|AD| - |AG|$ kaç birimdir?

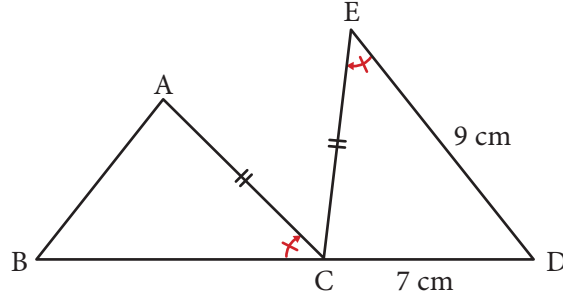


**Çözüm:**

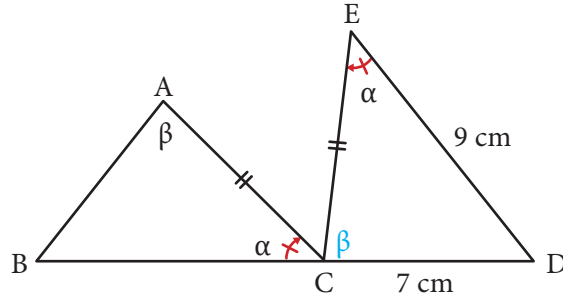
DBE ve GCF üçgenlerinin kenarlarında $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ oranı olduğundan K-K-K benzerliği vardır. Bu durumda $m(\angle ABC) = m(\angle ACB)$ ve $|AB| = |AC|$ bulunur. $|AD| - |AG| = 4$ birim olur.

**Örnek:**

ABC ve CED üçgenleri için B, C ve D doğrusal noktalar $m(\angle CED) = m(\angle ACB)$, $|EC| = |AC|$, $|ED| = 9$ cm, $|CD| = 7$ cm ve $m(\angle BAC) + m(\angle ECB) = 180^\circ$ olduğuna göre $|BD|$ kaç cm'dir?

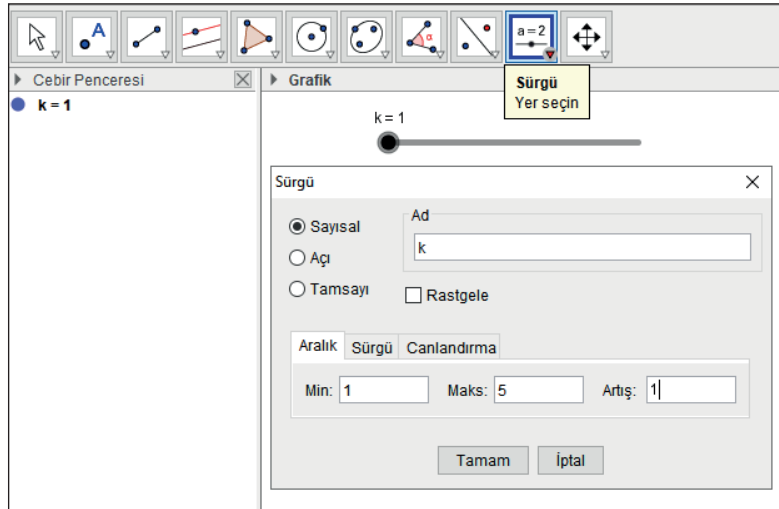
**Çözüm:**

$m(\angle ACB) = \alpha$, $m(\angle BAC) = \beta$ (ACE) = θ olsun. $m(\angle BAC) + m(\angle ECB) = 180^\circ$ yani $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ olduğuna göre $m(\angle CED) = \beta$ olur. $\triangle ACB \cong \triangle CED$ bulunur. Bu durumda $|ED| = |BC| = 9$ cm olur ve $|BD| = 9 + 7 = 16$ cm bulunur.

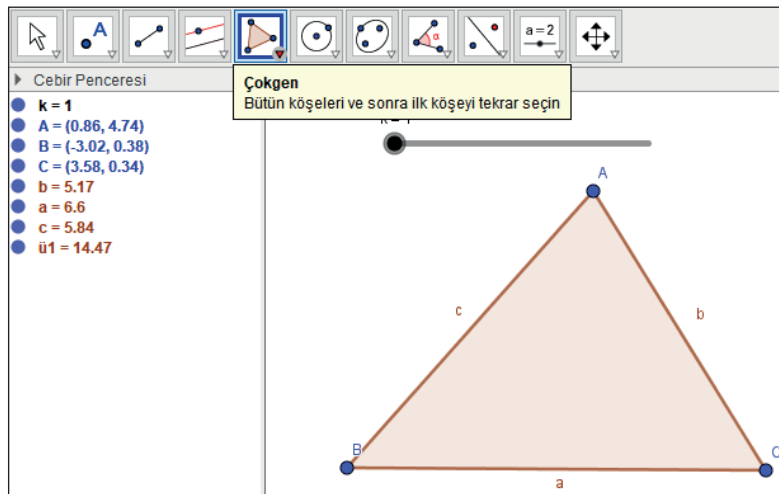


Dinamik matematik programında benzer üçgenlerin benzerlik oranına göre kenar uzunluklarının, çevrelerinin ve alanlarının değişimini inceleyelim.

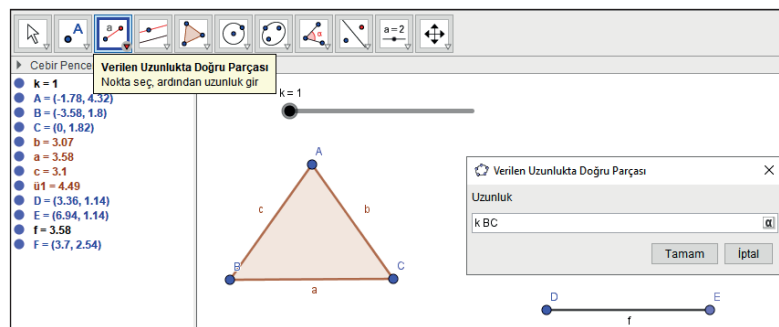
“Sürgü” komutundan k sürgüsü Min: 1, Maks: 5, Artış: 1 olacak şekilde oluşturulur.



“Çokgen” komutundan ABC üçgeni oluşturulur.

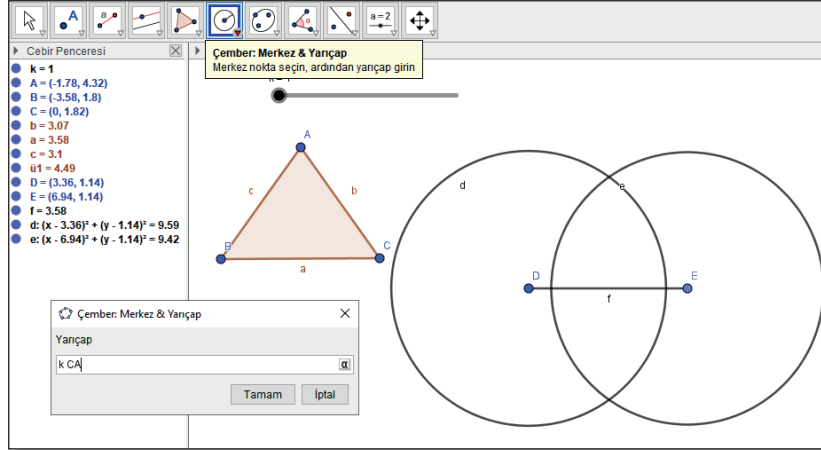


“Verilen Uzunlukta Doğru Parçası” komutuyla önce D noktası ve çıkan komut satırına “k AB” yazılarak k sürgüsüne bağlı $|DE| = k \cdot |AB|$ olacak [DE] çizilir.

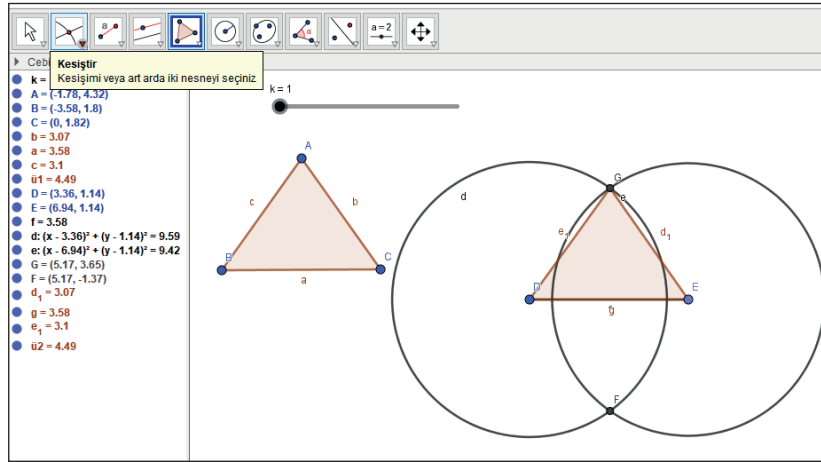




“Çember: Merkez Yarıçapla” komutu seçilip sırasıyla D noktası ve çıkan komut satırında yarıçap değeri olarak “k BA” ve E noktası seçilerek çıkan komut satırında yarıçap değeri olarak “k CA” yazılıp çemberler oluşturulur.



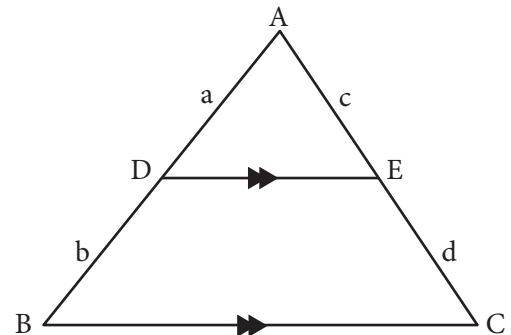
Oluşan çemberler “Kesıştır” komutuyla kesistirilir. Oluşan D, E, G noktalarından oluşturulan üçgen ABC üçgeninin k oranında benzeridir. k sürgüsü hareket ettirilerek yeni oluşacak üçgenlerin çevre uzunlukları, alan oranları cebir penceresindeki değerlerden incelenir.



Temel Orantı Teoremi

Bir üçgenin bir kenarına paralel olan ve diğer iki kenarı farklı noktalarda kesen doğru, kestiği kenarlar üzerinde orantılı parçalar oluşturur.

$$DE \parallel BC \text{ ise } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ dir.}$$



İspat:

Bu teoremi ispatlamak için üçgenlerde alan bağıntısını bilmek yeterlidir. Bir üçgenin alanı tabanı ile tabana ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır.

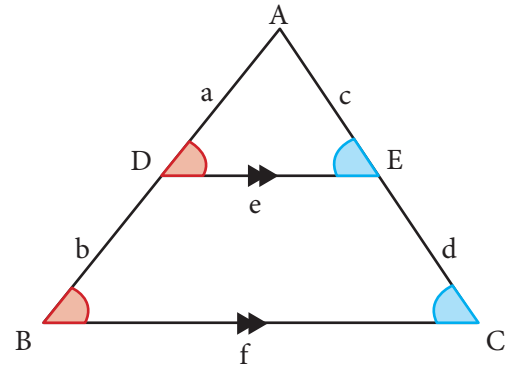
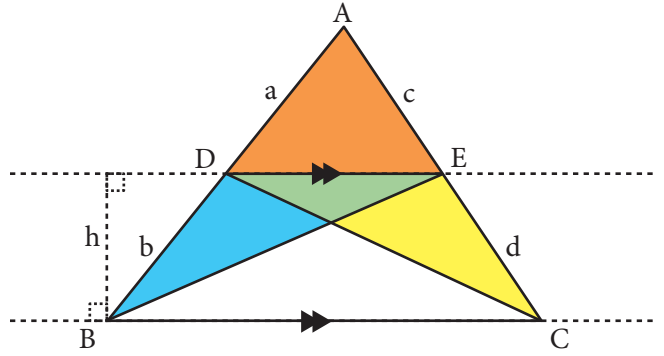
$$Alan(BDE) = \frac{|DE| \cdot h}{2} = Alan(CED) \text{ olur. Yükseklikleri aynı üçgenlerin alanları tabanları oranında olacaktır}$$

olacağından

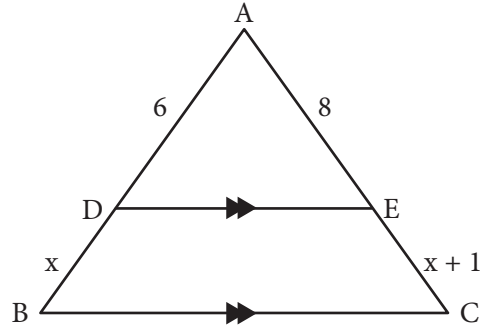
$$\frac{Alan(ADE)}{Alan(BDE)} = \frac{Alan(ADE)}{Alan(CDE)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bulunur.}$$

Sonuç:

$$ADE \sim ABC \text{ olduğundan } \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f} \text{ olur.}$$

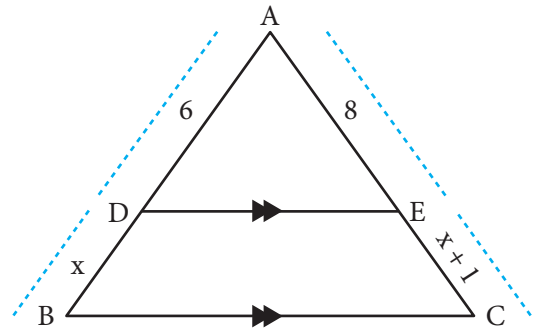
**Örnek:**

ABC üçgeninde $DE \parallel BC$ ve $|AD| = 6 \text{ cm}$, $|AE| = 8 \text{ cm}$, $|DB| = x \text{ cm}$ ve $|EC| = x + 1 \text{ cm}$ olduğuna göre x kaç cm'dir?

**Çözüm:**

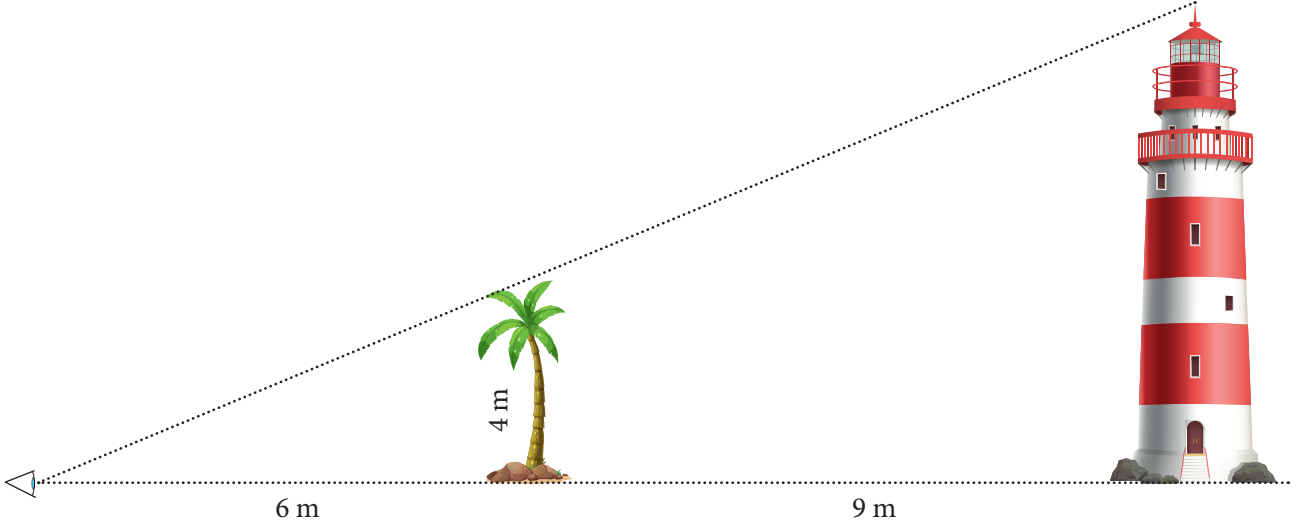
$DE \parallel BC$ olduğundan temel benzerlik teoreminden

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{x+1} \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

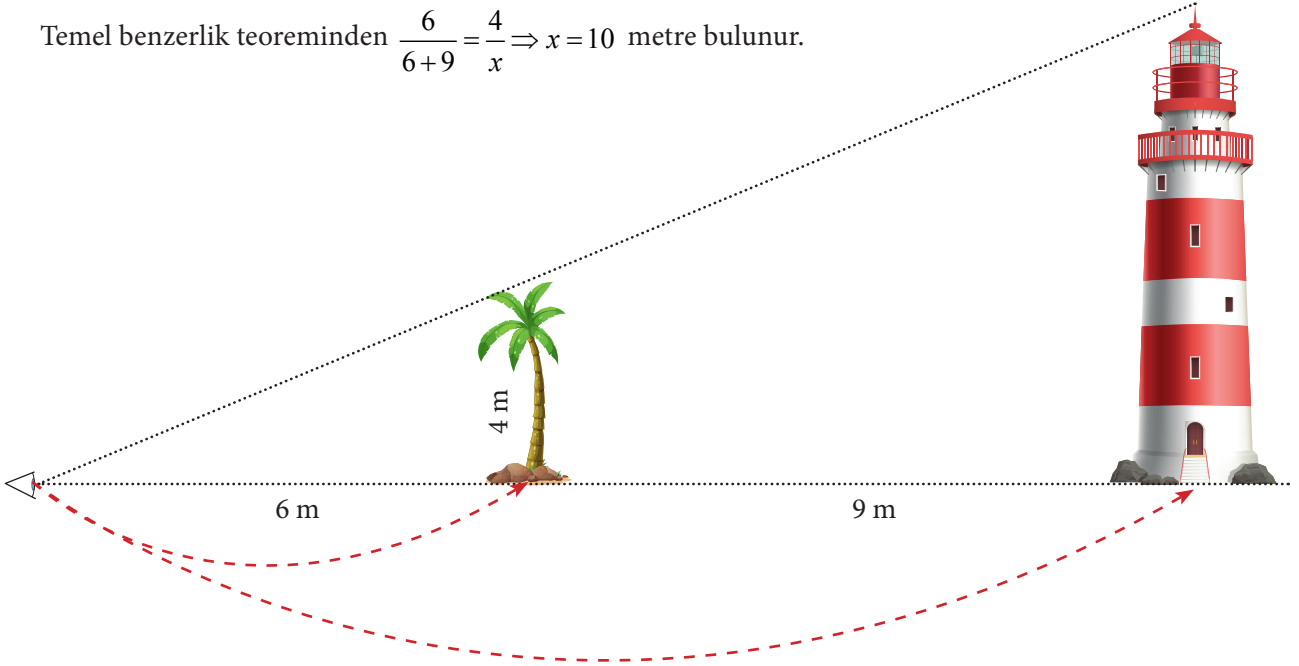


**Örnek:**

Görselde, yer düzleminde bulunan bir göz 6 m uzaklıktaki yer düzlemine dik ve doğrusal palmiye ağacının en üst noktasından 9 m uzaklıktaki deniz fenerinin en üst noktasını görmektedir. Deniz fenerinin boyu kaç metredir?

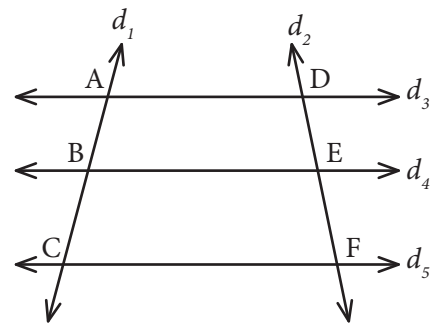
**Çözüm:**

Temel benzerlik teoreminden $\frac{6}{6+9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 10$ metre bulunur.

**Thales Teoremi:**

Birbirini paralel en az üç doğru ve bunları kesen iki doğru orantılı doğru parçaları oluşturur.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|} \text{ dir.}$$

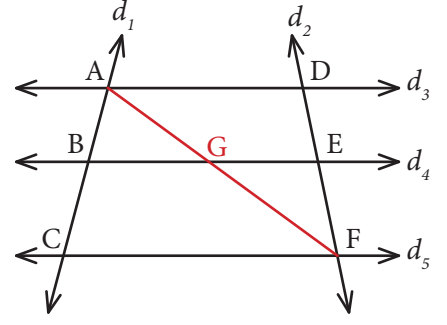


İspat:

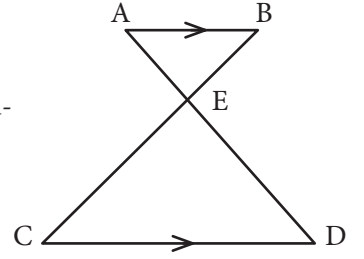
ACF üçgeninde Temel Orantı Teoremi'nden $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AG|}{|GF|}$ (1)

AFD üçgeninde Temel Orantı Teoremi'nden $\frac{|AG|}{|GF|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ (2)

(1) ve (2)'den $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ bulunur.

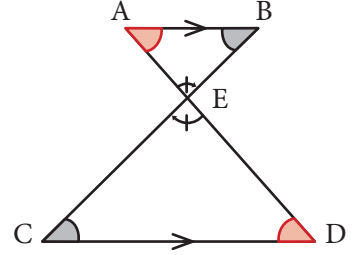
**Kural:**

AB//CD ise $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|CD|}$ 'dir. Bu kural kelebek benzerliği olarak da adlandırılır.

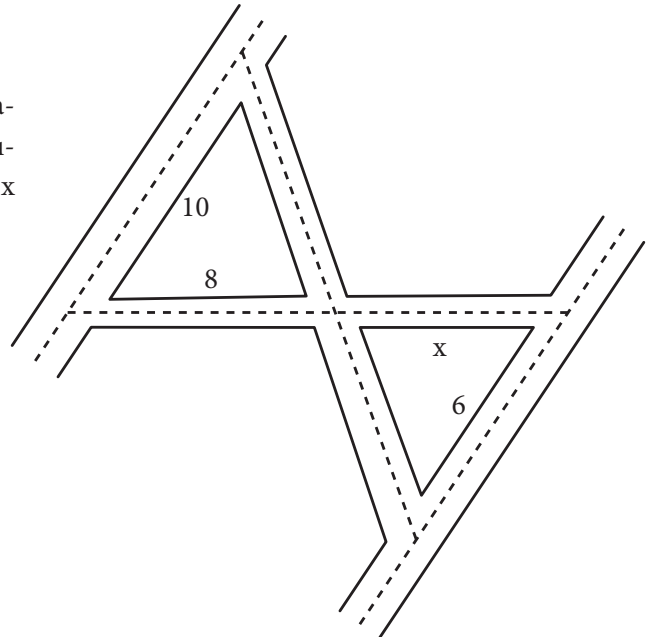
**İspat:**

İç ters açılardan $m(\angle DAB) = m(\angle ADC)$ ve $m(\angle CBA) = m(\angle BDC)$ olduğundan $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ bulunur.

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|CD|} \text{ olur.}$$

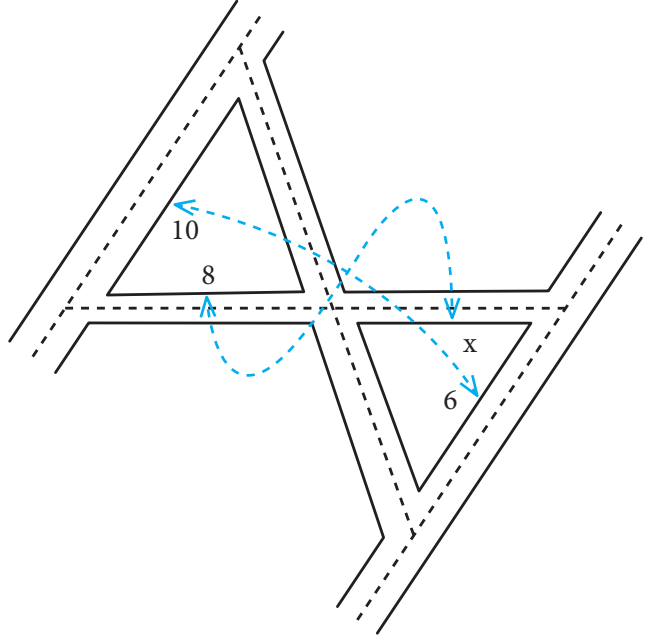
**Örnek:**

Şekilde, bir demir köprünün çapraz direkleri arasında oluşan üçgenlerin kenar uzunluklarından bazılarının metre cinsinden verilmiştir. Verilenlere göre x kaç metredir?



**Çözüm:**

Kelebek benzerliğinden $\frac{10}{6} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 4,8$ metre bulunur.

**Etkinlik Formu Cevapları**

Etkinlik formundaki soruların çözümleri etkinlik içerisinde verilmiştir.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- Homoteti kavramını ve homotetik şekiller hakkında araştırma yapınız.
- Çapraz Merdivenler Problemi (Crossed Ladders Problem) hakkında araştırma yapınız.
- Benzerlik konusunda yapılmış görsel ispatları araştırınız.
- Benzer üçgenlerin benzer kenarlarına ait açıortayları, kenarortayları ve yükseklikleri oranları benzerlik oranına eşit olduğunu ispatlayınız.
- (TÜBİTAK 2020 Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı 1.Aşama) Bir ABC üçgeninde [BC] ve [AC] kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları alınıyor. $m(\text{BAD})=m(\text{EDC})$, $m(\text{DAC})=m(\text{ACD})$, $\text{IBDI}=2$, $\text{IAEI}=3$ ve $\text{ICDI}=4$ ise, IECI kaçtır?

KAYNAKLAR

Şahin, M.(2013). *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Geometri-1*, Palme Yayınevi.

Küpeli, S. (2010). *100 Yılın Olimpiyat Sorularıyla Geometri*, Altın Nokta Yayınevi.

Large, T.& Rogers, K. (2015). *Şekilli Matematik Sözlüğü*, TÜBİTAK Yayınları.

TÜBİTAK(2020) *Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı 1.Aşama* <https://www.tubitak.gov.tr/tr/olimpiyatlar/ulusal-bilim-olimpiyatlari/icerik-matematik>

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

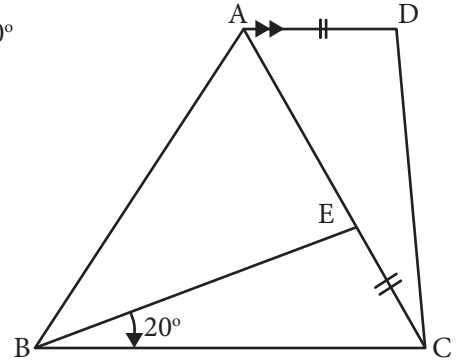
Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği'ne etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu

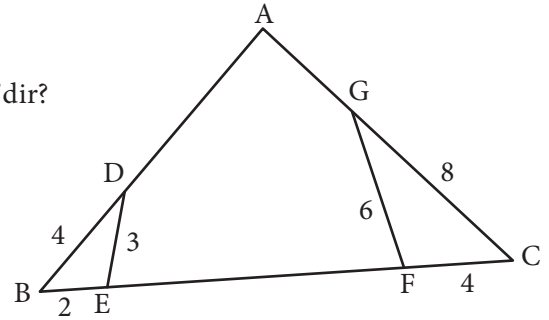
1. Bir dinamik matematik yazılımı kullanarak ABC üçgeni çizip $[BC]$ kenarına paralel diğer kenarları kesen DE doğrusunu çizelim ve doğrunun kenarlarda ayırdığı parçaların uzunlukları ile ilgili tabloyu dolduralım.

[AD]	[DB]	[AD]/ [DB]	[AE]	[EC]	[AE]/ [EC]

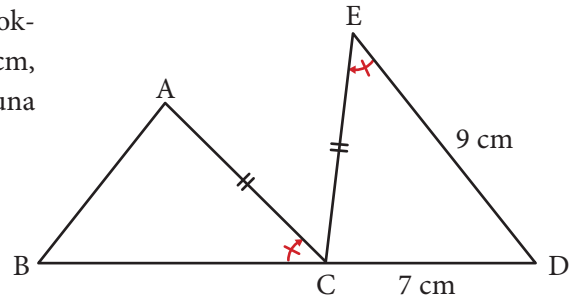
2. ABC eşkenar üçgen $AD \parallel BC$, $|AD| = |EC|$ ve $m(\angle EBC) = 20^\circ$ olduğuna göre $m(\angle ACD)$ kaç derecedir?



3. ABC üçgeninde verilenlere göre $|AD| - |AG|$ kaç cm'dir?

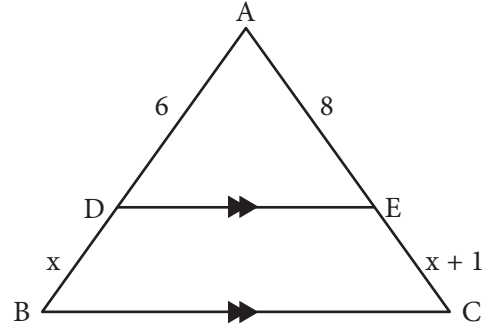


4. ABC ve CED üçgenleri için B, C ve D doğrusal noktalar $m(\angle CED) = m(\angle ACB)$, $|EC| = |AC|$, $|ED| = 9$ cm, $|CD| = 7$ cm ve $m(\angle BAC) + m(\angle ECB) = 180^\circ$ olduğuna göre $|BD|$ kaç cm'dir?

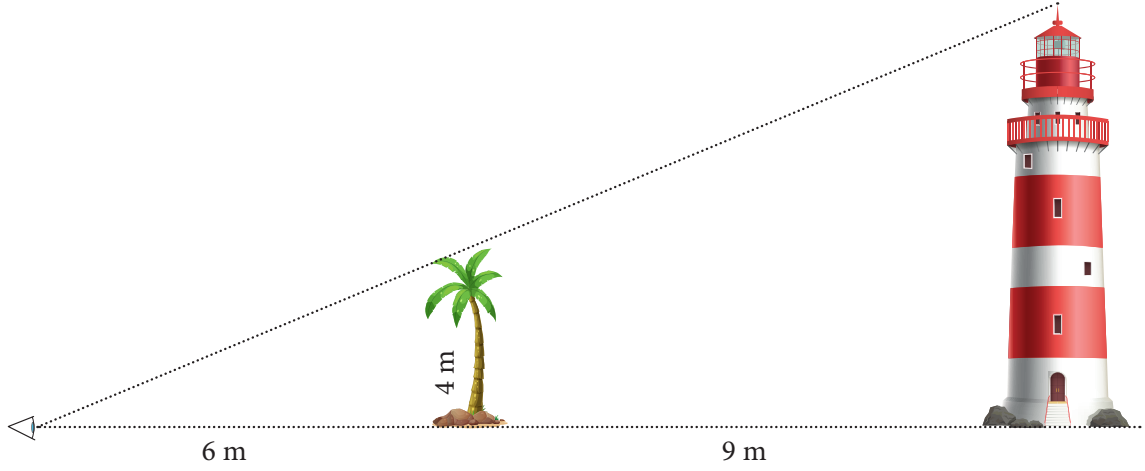




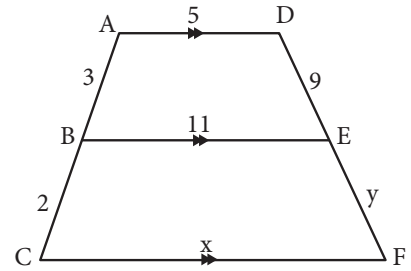
5. ABC üçgeninde $DE \parallel BC$ ve $|AD| = 6$ cm, $|AE| = 8$ cm, $|DB| = x$ cm ve $|EC| = x + 1$ cm olduğuna göre x kaç cm'dir?



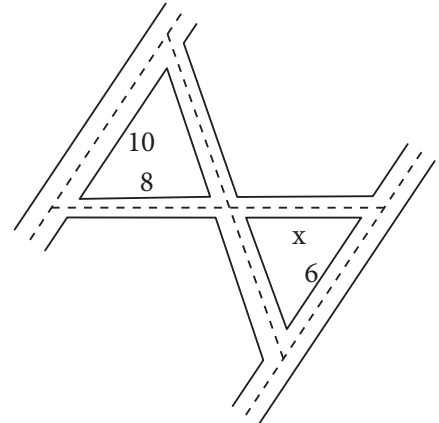
6. Görselde yer düzleminde bulunan bir göz 6 m uzaklıktaki palmiye ağacının en üst noktasından 9 m uzaklıktaki deniz fenerinin en üst noktasını görmektedir. Deniz fenerinin boyu kaç metredir?



7. Şekilde, bazı kenar uzunlukları verilen ACFD dörtgeninde $AD \parallel BE \parallel CF$ 'dir. Verilenlere göre $x+y$ kaç birimdir?



8. Şekilde, birbirine paralel kenarları olan bir demir köprünün çapraz direkleri arasında oluşan üçgenlerin kenar uzunluklarından bazılarının metre cinsinden verilmiştir. Buna göre x kaç metredir?





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

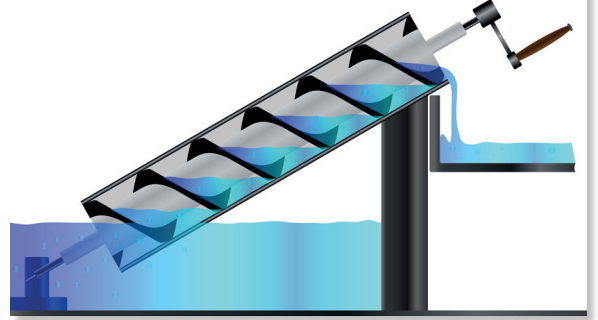
ETKİNLİK ADI	: PİSAGOR ÜÇLÜLERİ
MODÜL/KONU	: Geometri/Üçgenler
KAZANIMLAR	: Üçgende benzerlik teoremlerini ispatlar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

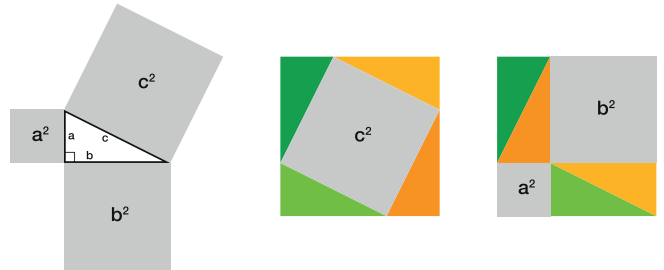
Bu etkinlikte, Pisagor üçlülere ve bu üçlülere veren bağıntılar incelenecektir. Pisagor üçlülerinin katlarının da Pisagor üçlüsü olmasının sebebinin benzerlikle olan ilişkisi gösterilecektir. Öğrencilerin önceki öğrenmelerinde geçen kavramlarla Pisagor üçlülerini ilişkilendirmeleri amaçlanmaktadır.

Başlarken...

Fen bilgisi proje dersinde öğretmenleriyle birlikte Arşimet burgusu(vidası) yapacak öğrenciler, burgunun boyunun uzunluğunu hangi koşullara göre belirlemeleri gerektiğini tartışırken öğretmenleri, öğrencilere bunun için geometride öğrendikleri hangi teoremi kullanmaları gerektiğini sorar. Sizce öğrenciler hangi cevabı vermişlerdir?



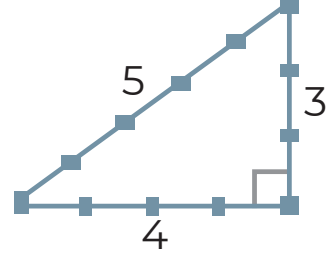
Pisagor Bağntısı: Pisagor bağıntısı bir dik üçgende dik kenarların karelerinin toplamı, dik açının karşısındaki kenarın(hipotenüsün) karesine eşittir, şeklinde tanımlanır ve $a^2 + b^2 = c^2$ olarak gösterilir. Bilinen en eski matematiksel teoremlerden biridir. Pisagor'un geometriyi kurduğu prensipler, kendisinden 250 yıl sonra, Öklid'in "Elementler" kitabında yer almış ve hiç değişmeden günümüze kadar gelmiştir.





Pisagor Üçlülere

a, b, c birer pozitif tam sayı olmak üzere, $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağlayan (a, b, c) sıralı üçlüsüne **Pisagor üçlüsü** denir. Kenar uzunlukları Pisagor üçlüsüne uyan dik üçgenlere de **Pisagor üçgeni** denir. ebob $(a, b, c) = 1$ ise (ortak bölenlerinin en büyüğü 1 ise), bu tür Pisagor üçlülerine **ilkel(asal) Pisagor üçlülere** denir. Örneğin “3, 4, 5” en çok bilinen ilkel Pisagor üçlüsüdür. “3, 4, 5” üçgenini bildiğimiz için herhangi bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için “ $3k, 4k, 5k$ ” üçgeninin de verilen bağıntıyı sağladığını kolaylıkla gösterebiliriz. Bu Pisagor üçlüsünün eski uygarlıklar da kullanıldığı kaynaklarda geçmektedir. Binaları inşa ederken dik açılar yapabilmek için ellerindeki bir ipin her metresine düğüm atmışlar 3, 4 ve 5 metrelik aralıklarla ipi düğüm noktalarından tutup gererek dik üçgen oluşturmuşlardır.



Düzlemde herhangi bir kare kullanarak “ $3k, 4k, 5k$ ” olacak Pisagor üçlüsünün oluşumunu gösterelim.

1. adım Herhangi bir kare çizelim. Karenin kenarlarının orta noktalarını belirleyelim.	2. adım Taban kenarları ve orta noktaları şekildeki gibi birleştirelim.	3. adım Oluşan BEF üçgeni kenarları “ $3k, 4k, 5k$ ” olan dik üçgen olur.

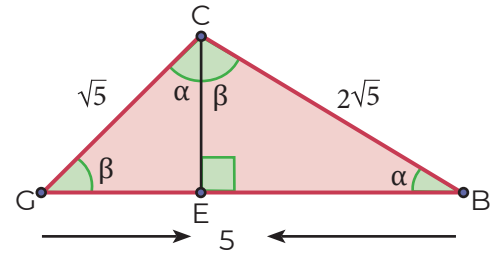
İspat:

$|AF| = |DF| = k\sqrt{5}$ olsun. Bu durumda Pisagor teoreminden $|BF| = 5k$ bulunur.

$BGC \cong BFA$ olduğundan $|BG| = 5k$ ve $|GC| = k\sqrt{5}$ ve

$|BC| = 2k\sqrt{5}$ olur. $GCB \approx CEB$ olduğundan ve

$\frac{|CB|}{|EB|} = \frac{|GB|}{|CB|}$ olduğundan $\frac{2\sqrt{5}}{|EB|} = \frac{5}{2\sqrt{5}}$ ise $|EB| = 4$ birim ve



$|GE| = 1$ birim bulunur. Bu durumda $|EC| = 3$ birim olur.

Benzer şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ olacak şekilde “ $3k, 4k, 5k$ ” üçgenleri de Pisagor üçlüsüne uyar.

Bu şekilde bir Pisagor üçlüsünün katı olan Pisagor üçlülerine “ilkel olmayan Pisagor üçlülere” denir. Acaba 3-4-5 üçgeninden başka ilkel Pisagor üçlülere var mıdır? Aklımıza ilk olarak “5, 12, 13”, “8, 15, 17” ve “7, 24, 25” gelir. Daha önemlisi ilkel Pisagor üçlülerini veren bir formül var mıdır?

Teorem 1:

Pisagor üçlülerini veren bağıntı; m ve n aralarında asal doğal sayılar olmak üzere;

$a = m^2 - n^2$; $b = 2mn$; $c = m^2 + n^2$ olarak bilinmektedir.

İspat:

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $\text{ebob}(m, n) = 1$ yani aralarında asal olsun. Bu durumda Pisagor bağıntısını sağlamalıdır.

$a^2 + b^2 = c^2$ ise

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 = c^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örneğin; $m = 3$ ve $n = 2$ alırsak; $a = 3^2 - 2^2 = 5$; $b = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ ve $c = 3^2 + 2^2 = 13$ olur ki bu da bize (5, 12, 13) üçlüsünü verir.

Acaba bu teoremle tüm Pisagor üçlülerine ulaşabilir miyiz? Cevabımız hayırdır. Ancak tüm ilkel Pisagor üçlülerine dolayısıyla da tüm üçlülere ulaşabiliriz.

Bu durumu bir örnekle açıklayalım: m, n 'yi kullanan formül, “9, 12, 15” gibi ilkel olmayan Pisagor üçlüsünü vermez. Bu durumda formülün tüm Pisagor üçlülerini vermeyeceğini söyleyebiliriz.

$a = m^2 - n^2$; $b = 2mn$; $c = m^2 + n^2$ olmak üzere “9, 12, 15” üçlüsünün formül ile neden verilmediğini gösterelim.

“9, 12, 15” üçlüsü “3, 4, 5” üçlüsünün üç katıdır. Üçlümüzde (pozitif) tam sayı değerleri istediğimizden, $m > n$ olmalıdır aksi takdirde üçlüdeki ilk sayı negatif olacaktır. $2mn$ değeri ise dik kenarlardan birine eşit olmak zorundadır ve “9, 12, 15”teki tek çift sayı 12’dir, yani

$$12 = 2mn$$

Dolayısıyla $m \cdot n = 6$ ve $m > n$, bu yüzden sadece iki durumda olabilir:

- i. $m = 6$ ile $n = 1$
- ii. $m = 3$ ve $n = 2$

3	4	5
6	8	10
12	16	20
15	20	25
18	24	30
		



İlk durumda üçlü (35, 12, 37) verir ve ikinci durumda ise (5, 12, 13) bulunur. 9, 12, 15 üreten iki değer $m = 2\sqrt{2}$, $n = \sqrt{2}$ 'dir.

Pisagor üçlülerini veren teoremin uygulamalarına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 1-2)

Teorem 2:

n pozitif tam sayı olmak üzere $a = 2n + 1$, $b = 2n^2 + 2n$ ve $c = 2n^2 + 2n + 1$ için “a, b, c” Pisagor üçlüsüdür. Ardışık sayılar içeren Pisagor üçlülerine “**İkiz Pisagor üçlüler**” denir. Örneğin “3, 4, 5” ve “7, 24, 25” ikiz Pisagor üçlüleridir.

İspat:

Bir önceki teoremin ispatında $m = n + 1$ olarak alırsak

$$a = m^2 - n^2 = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

$$b = 2mn = 2(n + 1)n = 2n^2 + 2n$$

$$c = m^2 + n^2 = (n + 1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Örneğin; $n = 10$ seçelim $a = 2 \cdot 10 + 1 = 21$, $b = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 = 220$, $c = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 221$ yani (21, 220, 221) Pisagor üçlüsü bulunur.

Dik kenarlardan birisi ve hipotenüsü ardışık olan Pisagor üçlülerini veren bağıntının uygulamalarına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 3)

Formülümüzü daha kolay hâle getirmek için $n = 1$ olarak alalım. Bu durumda $a = m^2 - 1$, $b = 2m$, $c = m^2 + 1$ olacak şekilde farklı bir desen üretebiliriz. $m = 6$ için (35, 12, 37) üçlüsü elde edilir.

$n=1$ değeri için Pisagor üçlülerini veren bağıntının uygulamalarına yer verilir. (Etkinlik Formu Soru 4)

$1 \frac{1}{3}, 2 \frac{2}{5}, 3 \frac{3}{7} \dots n \frac{n}{2n+1}$ olacak şekilde verilmiş bileşik kesirler ile bir dik kenarı ile hipotenüsü ardışık Pisagor üçgeni arasında bir ilişki var mıdır? ($n \in \mathbb{Z}^+$)

$1 \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ve $2 \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ ve $3 \frac{3}{7} = \frac{24}{7}$ olur ki bu kesirlerin “3, 4, 5”, “5, 12, 13” ve “7, 24, 25” üçgenlerini gösterdiklerini sezgisel olarak söyleyebiliriz.

Genel hâlini çözersek $n \frac{n}{2n+1} = \frac{2n^2 + 2n}{2n+1}$ bulunur. Bu durum Teorem 2'de ispatlanmıştır.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- $n > 2$ ve n tek sayı olmak üzere dik kenar uzunlukları n , $\frac{n^2 - 1}{2}$, hipotenüs uzunluğu $n \cdot \frac{n^2 + 1}{2}$ olacak şekilde Pisagor üçlülere elde edilir. Araştırınız.
- Ardışık Pell sayıları (1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, ...) m , n olarak seçildiğinde dik kenarları ardışık olan Pisagor üçgenleri bulunur. Örneğin $m = 5$, $n = 2$ olarak seçilirse “20, 21, 29” Pisagor üçlüsü elde edilir. Araştırınız.
- Dik kenarları ardışık tam sayılar olan örneğin “3, 4, 5” ve “20, 21, 29” Pisagor üçlülerini veren yukarıdaki başka formül var mıdır? Araştırınız.
- Üçgensel sayılardan Pisagor üçlülere oluşturulmuş dik üçgenlerle elde edilebilir mi? Araştırınız.
- Bir kareyi Pisagor üçlülere ile kaplayabilir miyiz?

KAYNAKLAR

- Conway, J. H. ve Guy, R. (1998), *Sayılar Kitabı*, Springer Science & Business Media.
- Dye, R. H., & Nickalls, R. W. D. (1998), 82.9 A new algorithm for generating pythagorean triples. *The Mathematical Gazette*, 82(493), 86-91.
- Evans, C. (1991). 75.23 Pythagorean Triples. *The Mathematical Gazette*, 75(473), 317-317.
- Head, A. (ty). *Pythagorean Theorem*, <http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMT668.Student.Folders/HeadAngela/essay1/Pythagorean.html> (Erişim Tarihi: 18.05.2021)
- Jepsen, C., & Yang, R. (1998). Making Squares From Pythagorean Triangles. *The College Mathematics Journal*, 29(4), 284-288.
- Şafak, A. (1996). Pisagor üçlülere. *Matematik Dünyası Dergisi*, 3, 23-24.

Ölçme Değerlendirme

Bu etkinliğe ait Derecelendirme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.



Etkinlik Formu Cevapları

1.

m	n	a, b, c
2	1	3, 4, 5
3	2	5, 12, 13
4	1	15, 8, 17
4	3	7, 24, 25
5	2	21, 20, 29
5	4	9, 40, 41
6	1	35, 12, 37
6	5	11, 60, 61
7	2	45, 28, 53
7	4	33, 56, 65
7	6	13, 84, 85

2.

Pisagor Üçlüsü	İlkel-Bir İlkelin Katı	m, n
14, 48, 50	$2 \times (7, 24, 25)$	7, 1
15, 20, 25	$5 \times 3, 4, 5$	–
15, 36, 39	$3 \times 5, 12, 13$	–
15, 112, 113	ilkel	8, 7
16, 30, 34	$2 \times (8, 15, 17)$	–
16, 63, 65	ilkel	8, 1
17, 144, 145	ilkel	9, 8
18, 24, 30	$6 \times 3, 4, 5$	–
18, 80, 82	$2 \times 9, 40, 41$	9, 1
19, 180, 181	ilkel	10, 9

3.

m	n	$a = 2n + 1, b = 2n^2 + 2n$ ve $c = 2n^2 + 2n + 1$
2	1	(3, 4, 5)
3	2	(5, 12, 13)
4	3	(7, 24, 25)
5	4	(9, 40, 41)
6	5	(11, 60, 61)

4.

n	m	m^2-1	$2m$	m^2+1
1	2	3	4	5
1	3	8	6	10
1	4	15	8	17

**Etkinlik Formu**

1. Aşağıdaki tabloda verilen m ve n doğal sayılarına karşılık gelen Pisagor üçlülerini bulunuz. Boş bırakılan satırlara uygun m ve n değerlerini yazarak sonuçlar elde ediniz.

m	n	$a = m^2 - n^2$	$b = 2mn$	$c = m^2 + n^2$
2	1			
3	2			
4	1			
4	3			
5	2			
5	4			
6	1			
6	5			
7	2			
7	4			
7	6			

2. Tabloda verilen boşlukları Pisagor üçgenlerinin ilkel olup olmadıklarını değilse hangi ilkel üçlünün katı olduğunu varsa m ve n değerlerini bulunuz.

Pisagor Üçlüsü	İlkel-Bir İlkelin Katı	m, n
14, 48, 50	$2 \times (7, 24, 25)$	7,1
15, 20, 25		–
15, 36, 39		
15, 112, 113	ilkel	
16, 30, 34	$2 \times (8, 15, 17)$	
16, 63, 65	ilkel	8,1
17, 144, 145		
18, 24, 30		–
18, 80, 82		9,1
19, 180, 181		

3. Tabloda m , n değerlerini ardışık sayılar vererek dik kenarlardan birisi ile hipotenüsün ardışık olduğu Pisagor üçlülerini elde ediniz.

m	n	$a = 2n+1$, $b = 2n^2 + 2n$ ve $c = 2n^2 + 2n + 1$
2	1	(3, 4, 5)
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	

4. Tabloda $n=1$ seçildiğinde oluşacak Pisagor üçlülerini yazınız.

n	m	m^2-1	$2m$	m^2+1
1	2			
1	3			
1	4			



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI
MODÜL/KONU
KAZANIMLAR

: ÜÇGENDE YARDIMCI ELEMANLAR

: Geometri/Üçgenler

1. Üçgende iç ve dış açıortay teoremlerini ispatlar.
2. Üçgende kenarortay teoremini ispatlar.
3. Üçgenin kenar orta dikmelerinin kesişimini inşa eder.
4. Üçgenin çeşidine göre yüksekliklerinin kesiştiği noktanın konumunu neden-sonuç ilişkisi kurarak belirler.

SÜRE

: 4 ders saati

KULLANILACAK
MATERYALLER

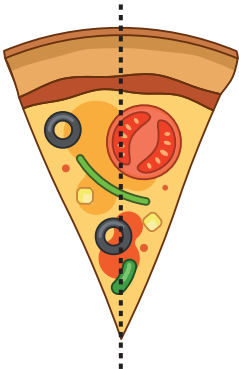
: Etkinlik Formu, pergeli, cetvel

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, üçgenin yardımcı elemanları olan açıortay, kenarortay, kenar orta dikmeleri ve yükseklikleri ile ilgili verilen bağıntıların ispatları ve uygulamalarının yapılması hedeflenmektedir. Dinamik matematik programı yardımıyla öğrencilerin örnek durumları teknoloji yardımıyla çözmeleri amaçlanmıştır.

Başlarken...

Matematikçiler cetvel ve pergeli yardımıyla yapılan çizimlerle eski zamanlardan itibaren çok ilgilenmişlerdir. Verilen bir açı birimsiz cetvel ve pergeli kullanarak iki eş parçaya rahatlıkla ayrılabilir. Matematik tarihinin ünlü problemlerinden biri verilen herhangi bir açının birimsiz cetvel ve pergeli kullanarak üç eşit parçaya ayıramayacağını ifade eder. Matematikçiler bu problem üzerine çok uzun süre araştırmalar yapmışlar, belli açılar için sonuçlar bulmuşlardır.



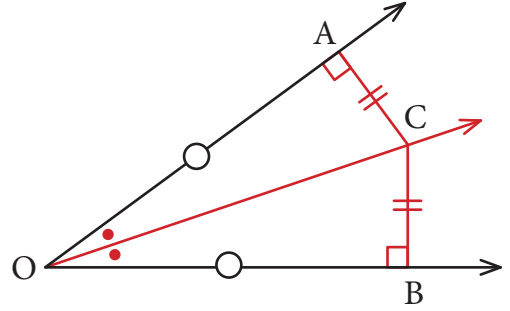
Kardeşiyle birlikte masada kalan son pizza dilimini eşit dilimler şeklinde paylaşmak isteyen Asya, sizce hangi geometrik kavramı kullanmalıdır?

TANIM

Açıortay: Herhangi bir açının ölçüsünü iki eş açığa bölen ışına açıortay denir. Yandaki şekilde [OC] ışını AOB açısının açıortayıdır.

Açıortay üzerindeki herhangi bir noktadan açının kenarlarına çizilen dik uzunluklar birbirine eşittir yani $|AC| = |CB|$ 'dir.

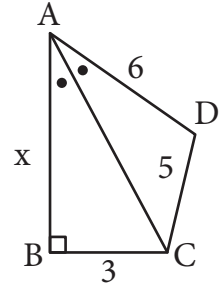
İspat: AOC ve BOC üçgenleri eş olduğundan $|OA| = |OB|$ 'dir.



Örnek:

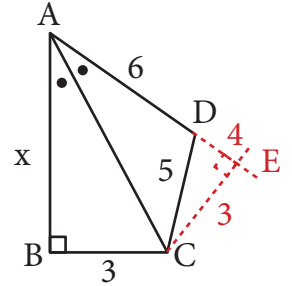
Etkinlik Formu Soru 1

ABCD dörtgeninde $AB \perp BC$, $m(\angle BAC) = m(\angle CAD)$, $|AD| = 6$ birim, $|CD| = 5$ birim ve $|BC| = 3$ birim olduğuna göre $|AB| = x$ kaç birimdir?



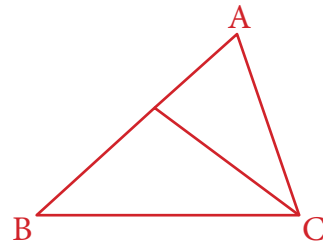
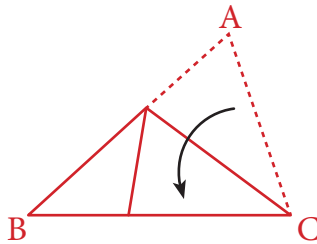
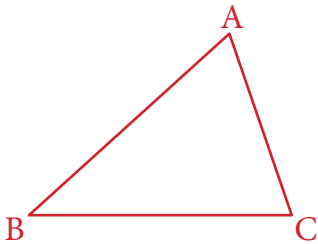
Çözüm:

$CE \perp AE$ olacak şekilde oluşturulan CDE dik üçgeninde [AC] açıortay doğrusu olduğundan $|BC| = |CE| = 3$ birim bulunur. CDE dik üçgeninde Pisagor bağıntısından $|DE| = 4$ birim olur. Bu durumda $|AE| = |AB| = x = 6 + 4 = 10$ birim bulunur.



Kâğıt Katlayarak Üçgende Açıortay Çizimi

ABC üçgeni biçimindeki kâğıt AC ve BC kenarları üst üste gelecek biçimde katlanır. Kâğıt açılarak kat izi çizilirse C açısının açıortayı elde edilir.



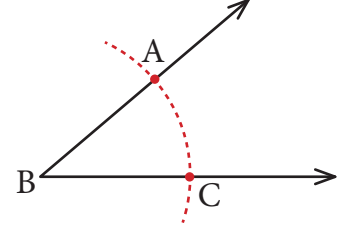


Pergel ve Cetvel Kullanarak Bir Açının Açıortayını Çizmek

Bir ABC açısının açıortay doğrusunu çizmek için;

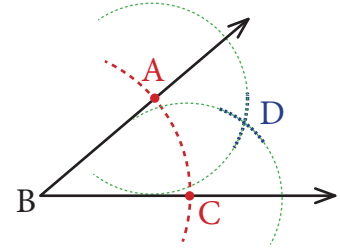
1. Adım:

Pergeli herhangi bir uzunlukta açarak B merkezli AC yayını çizelim.



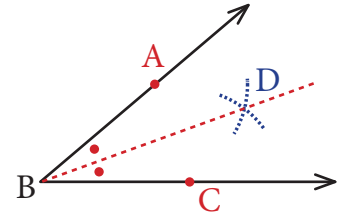
2. Adım:

Pergeli bozmadan A ve C merkezli yaylar çizip D kesişim noktasını belirleyelim.



3. Adım:

BD doğrusu ABC açısının açıortayı olarak bulunur.

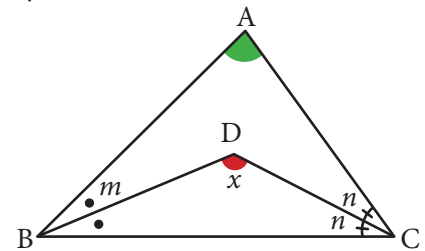


Teorem:

Bir üçgenin iki iç açıortayı arasında kalan açının ölçüsü, üçüncü açının yarısının 90° fazlasıdır.

İspat:

BAC ve BDC üçgenlerinin iç açıları için, $2m + 2n + \alpha = 180^\circ$ ve $x + m + n = 180^\circ$ eşitlikleri ortak çözülerek $x = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ bulunur.

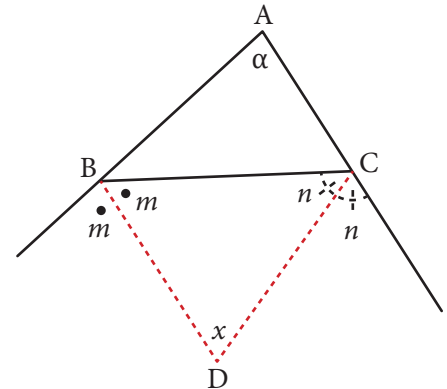


Teorem:

Bir üçgenin iki dış açıortayı arasında kalan açı ile kullanılmayan üçüncü açının yarısı birbirinin tümleridir.

İspat:

BAC ve BDC üçgenlerinin iç açıları toplamından $180^\circ - 2m + 180^\circ - 2n + \alpha = 180^\circ$ ve $m + n + x = 180^\circ$ eşitlikleri birlikte çözümlerse $x = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ olarak bulunur.

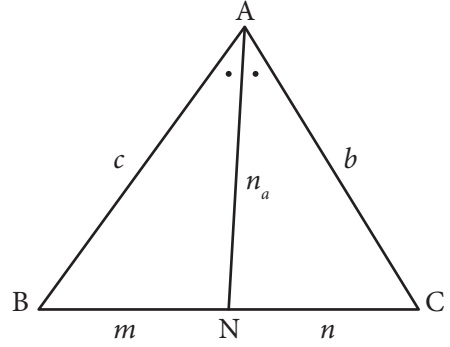


TANIM

Üçgende İç Açortay Bağıntısı: ABC üçgeninde bir köşeye ait açortay doğrusunun karşı kenarda ayırdığı uzunluklar komşu kenarlarla orantılıdır.

[AN] açortay doğrusu ise

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|NB|}{|NC|} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{m}{n} \text{ dir.}$$



İspat:

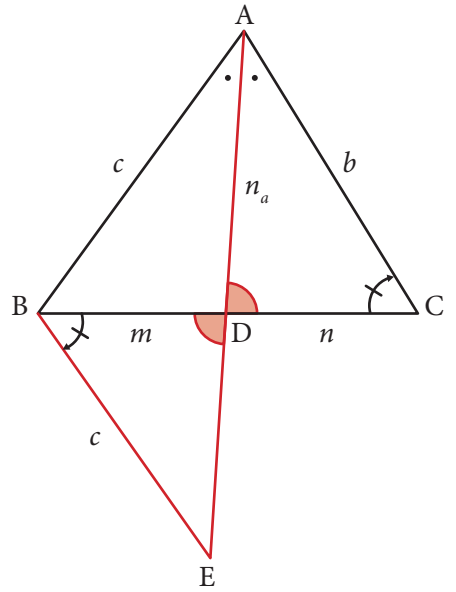
B noktasından geçen [AC] kenarına paralel doğru parçası [BE]'nin $m(\angle BAC)$ açısının açortay doğrusu ile kesiştiği nokta E olsun. ABE üçgeni ikizkenar olur dolayısıyla, $|BE| = c$

İç ters açılar oldukları için $m(\angle CAE) = m(\angle AEB)$ ve $m(\angle ACB) = m(\angle CBE)$ bulunur.

Bu durumda EBD ve ACD üçgenleri benzer olduğundan

$$(EBD \approx ACD)$$

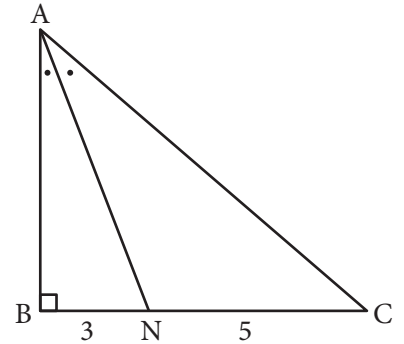
$$\frac{c}{b} = \frac{m}{n} \text{ olur.}$$



Örnek:

Etkinlik Formu Soru 2

ABC dik üçgeninde $AB \perp BC$ ve [AN] açortay olmak üzere, $|BN| = 3$ birim ve $|NC| = 5$ birim olduğuna göre $\text{çevre}(ABC)$ kaç birimdir?



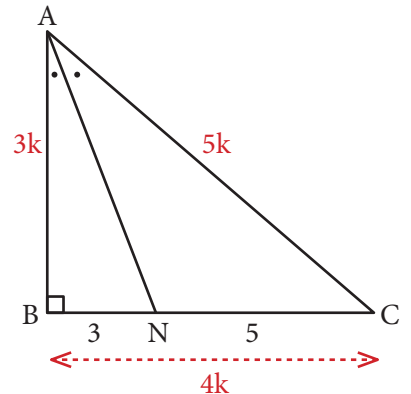
Çözüm:

[AN] açortay olduğundan

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|NB|}{|NC|} = \frac{3}{5} \text{ olur. Bu durumda Pisagor teoreminden } |AB| = 3k$$

ve $|AC| = 5k$ olarak alınırsa $|BC| = 4k = 8$ bulunur.

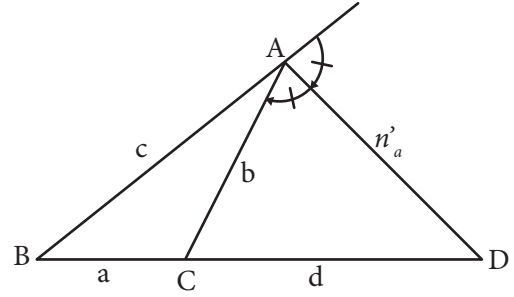
$|AB| = 3k = 6$ ve $|AC| = 5k = 10$ olur. $\text{Çevre}(ABC) = 6 + 8 + 10 = 24$ bulunur.



**TANIM**

Üçgende Dış Açı Ortay Bağlantısı: ABC üçgeninin dış açıortayı [AD] olmak üzere

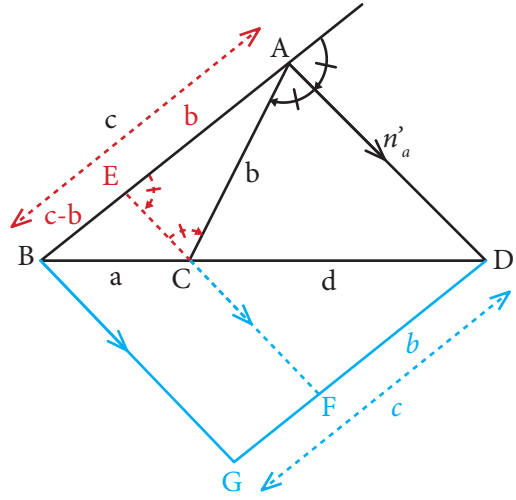
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DB|} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d}{d+a} \text{ dir.}$$

**İspat:**

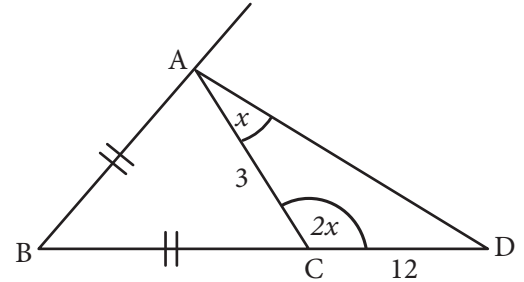
EC//AD çizilirse AEC ikizkenar üçgen olur.

BG//AD çizilerek ABGD paralel kenarı oluşur. BGD üçgeninde temel benzerlik teoreminden

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|DF|}{|DG|} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d}{d+a} \text{ elde edilir.}$$

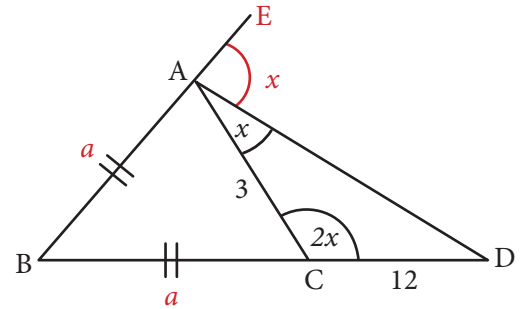
**Örnek:****Etkinlik Formu Soru 3**

ABC üçgeninde $|AB| = |BC|$ ve $|AC| = 3$ birim, $|CD| = 12$ birim olduğuna göre $|AB|$ kaç birimdir?

**Çözüm:**

ABC ikizkenar üçgen olduğundan $m(\angle CAE) = m(\angle ACD) = 2x$ ve $m(\angle DAE) = x$ olur. Bu durumda AD dış açıortay olur.

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{12}{12+a} = \frac{3}{a} \text{ ve } a=4 \text{ bulunur.}$$

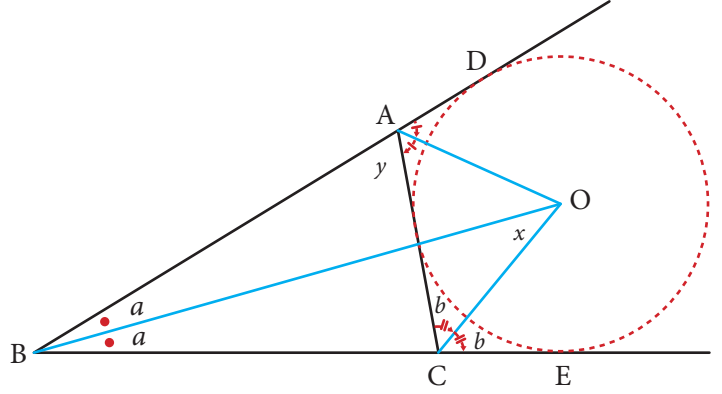


Teorem:

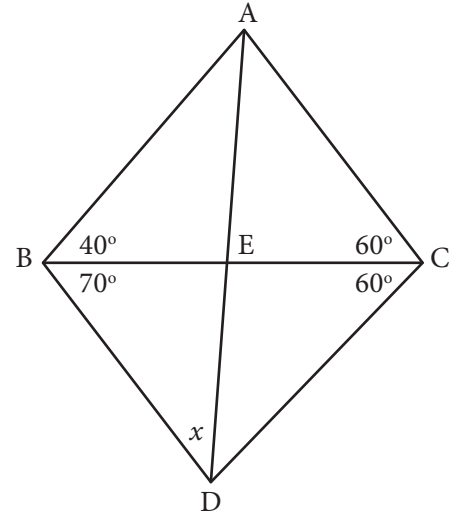
Bir üçgende, bir köşeden çizilen iç açıortay ile diğer iki köşeden çizilen dış açıortaylar bir noktada kesişir. Bu nokta dış teğet çemberinin merkezidir. İç açıortay ile dış açıortay arasında kalan açı, üçüncü açının yarısıdır.

İspat:

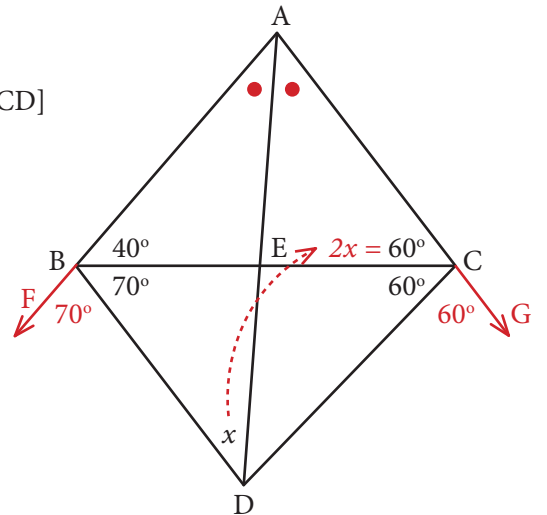
OAC üçgeninden $x + a = b$, ABC üçgeninden $y + 2a = 2b$ olur. Bu durumda $y = 2x$ bulunur.

**Örnek:****Etkinlik Formu Soru 4**

ABCD dörtgeninde $m(\angle ABC) = 40^\circ$, $m(\angle DBC) = 70^\circ$, $m(\angle ACB) = 60^\circ$ ve $m(\angle BCD) = 60^\circ$ olduğuna göre $m(\angle ADB) = x$ kaç derecedir?

**Çözüm:**

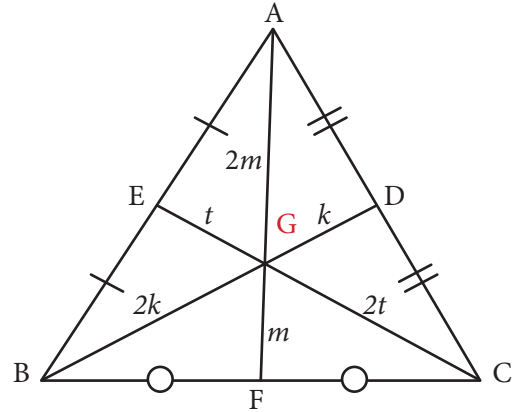
Doğru açıdan $m(\angle BCG) = 60^\circ$ ve $m(\angle FBC) = 70^\circ$ olur. [BD] ve [CD] dış açıortay olduğundan $2x = 60^\circ$ ise $x = 30^\circ$ bulunur.





TANIM

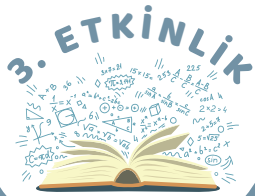
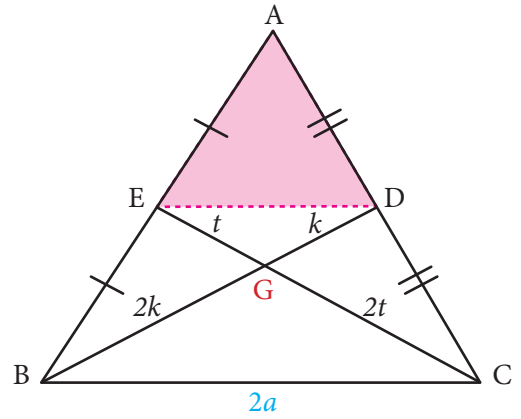
Kenar Ortay: Üçgende bir kenarın orta noktasını karşı köşeye birleştiren doğru parçasına **kenarortay** denir. Bir ABC üçgeninde tüm kenarortaylar bir noktada kesişir ve bu noktaya **ağırlık merkezi** denir. Ağırlık merkezi köşeye bir birim kenara iki birim uzaklıktadır.



İspat:

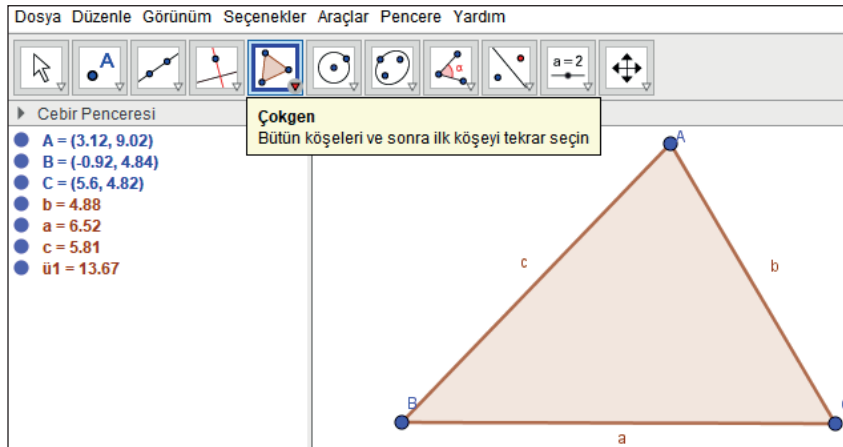
[AB] ve [AC] kenarlarına ait kenarortayları çizelim ve kesişim noktalarına G diyelim. [ED] orta taban olduğundan $ED \parallel BC$ ve $2|ED| = |BC|$ olur. EGD ve CGB benzer üçgenler olur ($EGD \approx CGB$).

Bu durumda $2|GD| = |BG|$ ve $2|EG| = |GC|$ bulunur. Benzer şekilde üçüncü kenarortay içinde benzer eşitlikler gösterilirse G noktası kenarortayların kesim noktası olarak belirlenir.

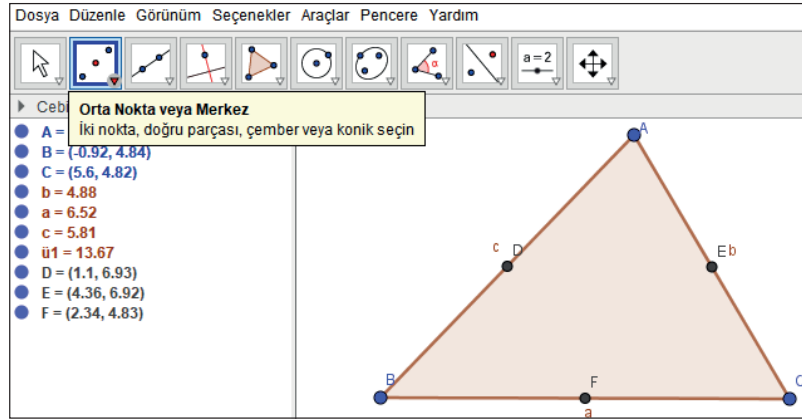


Dinamik Matematik Programında Üçgende Kenarortayların Kesim Noktasının İncelenmesi

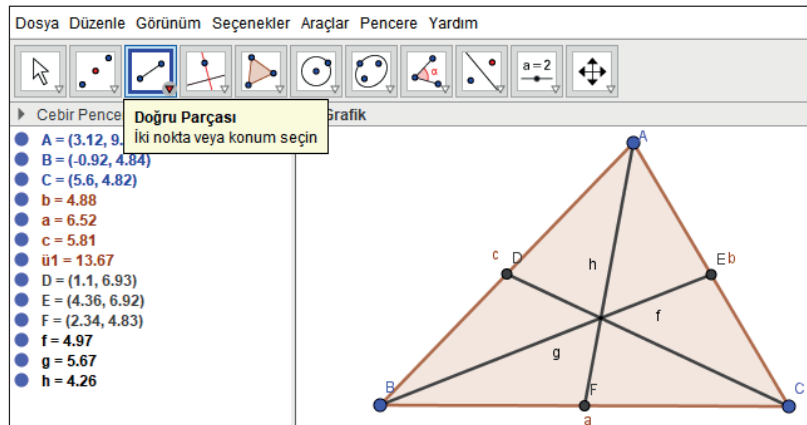
“Çokgen” sekmesinden ekranda üç nokta seçilerek bir ABC üçgeni çizilir.



“Orta Nokta veya Merkez” sekmesiyle köşeler ikilerli seçilerek kenarların orta noktaları belirlenir.

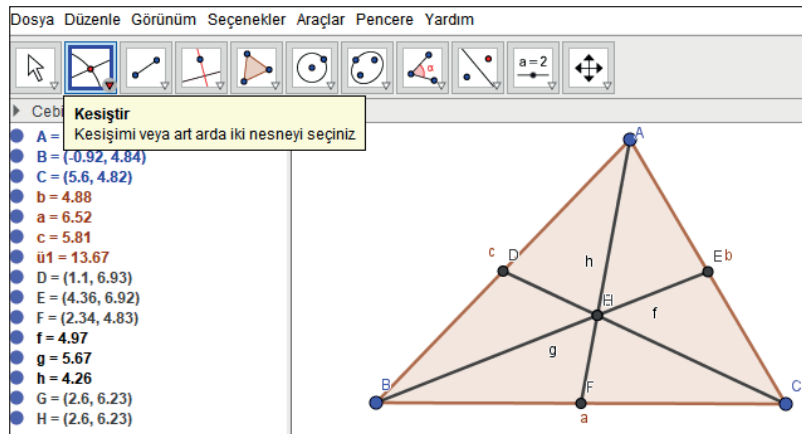


“Doğru Parçası” sekmesinden kenarortaylar belirlenir. Üçüncü kenarortayın ilk iki kenarortayın kesim noktasından geçtiğine dikkat çekilir. Dinamik noktalar olan A, B ve C noktalarının fare ile hareket ettirilmesine rağmen kesim noktasının değişmediği uygulama olarak yaptırılır.



“Kesıştır” komutuyla kenarortaylar ikilerli kesıştırilerek oluşan noktaların aynı olduğu vurgulanır.

Orta nokta veya merkez komutu seçili iken üçgene tıkladığında da üçgenin ağırlık merkezi olan G noktasını belirlenmektedir. Bu şekilde belirlenen noktaların aynı olduğu gözlemlenir.

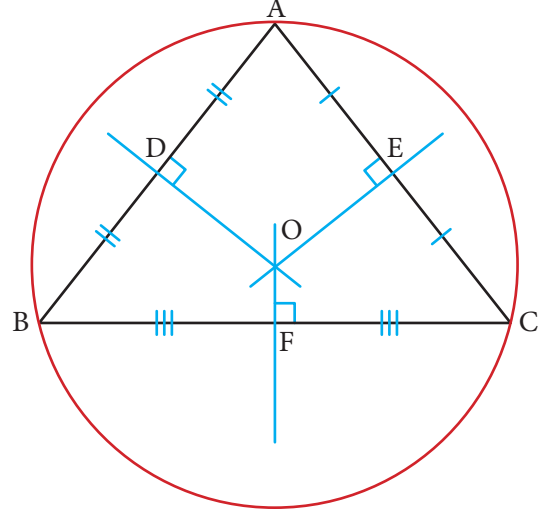




Üçgenin Kenar Orta Dikmeleri ve Çevrel Çemberi

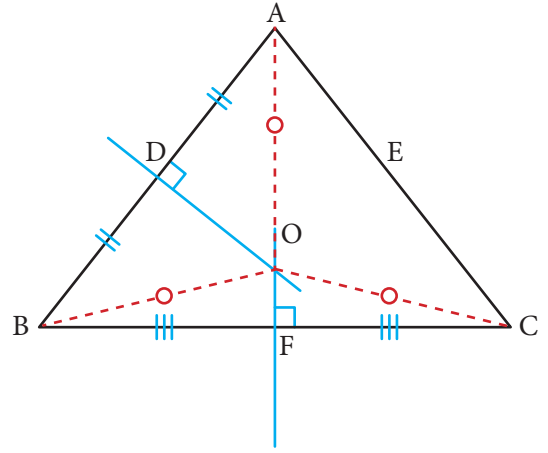
Teorem:

Bir ABC üçgeninde, kenarların orta dikmeleri bir noktada kesişir. Bu nokta çevrel çemberin merkezidir.

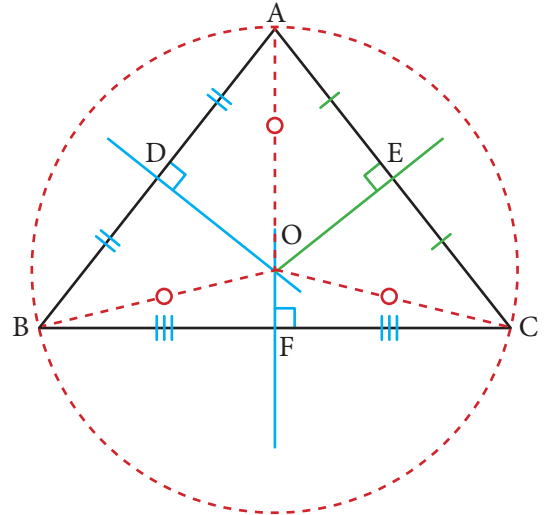


İspat:

ABC üçgeninde $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına ait kenar orta dikmelerini çekelim. Bu durumda yükseklik aynı zamanda kenarortay olduğu için AOB ve BOC ikizkenar üçgen olur ve $|OA| = |OC|$ olur.



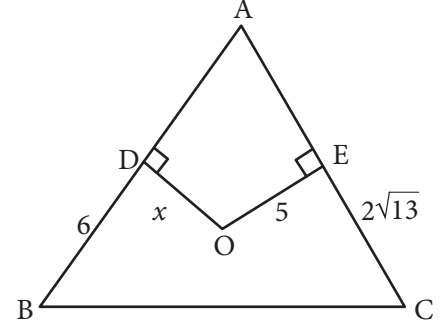
AOC ikizkenar olarak bulunduğundan $[AC]$ kenarına ait kenarortayı yüksekliğine eşit olur ve O noktasından geçer. O noktası üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta olduğundan çevrel çemberinin merkezidir.



Örnek:

Etkinlik Formu Soru 5

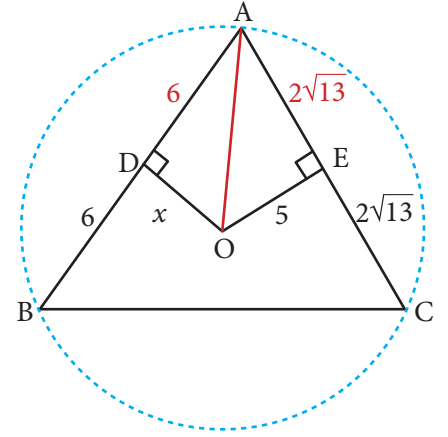
ABC üçgeninde O çevrel çemberin merkezi olmak üzere $|BD| = 6$ birim, $|OE| = 5$ birim, $|EC| = 2\sqrt{13}$ birim olduğuna göre $|OD| = x$ kaç birimdir?



Çözüm:

O çevrel çember olduğundan [OE] ve [OD] kenar orta dikme $|BD| = |DA| = 6$ birim, $|EC| = |EA| = 2\sqrt{13}$ birim olur.

Pisagor bağıntısından $6^2 + x^2 = (2\sqrt{13})^2 + 5^2$ olur $x = \sqrt{41}$ bulunur.

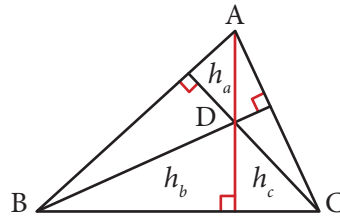


Üçgende Yükseklik

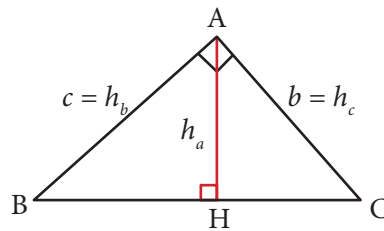
Üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenara çizilen dikmeye üçgenin o kenarına ait yüksekliği denir. Bir ABC üçgeninin a, b, c kenarlarına ait sırasıyla h_a , h_b , h_c olmak üzere üç yüksekliği vardır. Bir üçgende yükseklikler tek noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin diklik merkezi denir.

Üçgenin dar, dik ve geniş açılı olmasına göre diklik merkezi için üç farklı durumda oluşur.

Dar açılı ABC üçgeninde diklik merkezi üçgenin iç bölgesindedir. Diklik merkezi D noktasıdır.

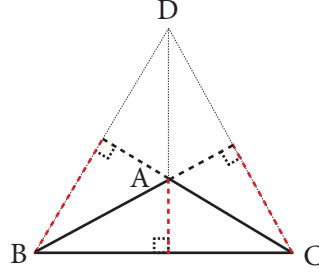


ABC üçgeni dik üçgen ise diklik merkezi dik kenarların kesim noktası olan A noktasıdır.





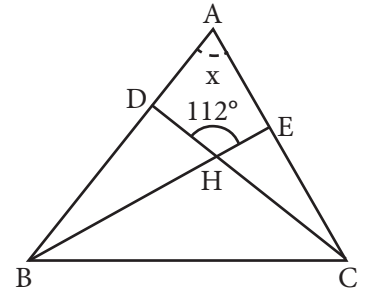
Geniş açılı ABC üçgeninde diklik merkezi üçgenin dış bölgesinde yükseklik doğrularının kesim noktası olan D noktasıdır.



Örnek:

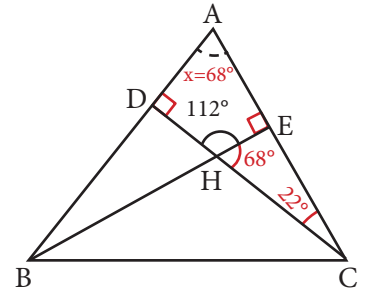
Etkinlik Formu Soru 6

Bir ABC üçgeninde H noktası diklik merkezi, $m(\text{DHE}) = 112^\circ$ olmak üzere $m(\text{DAC}) = x$ kaç derecedir?



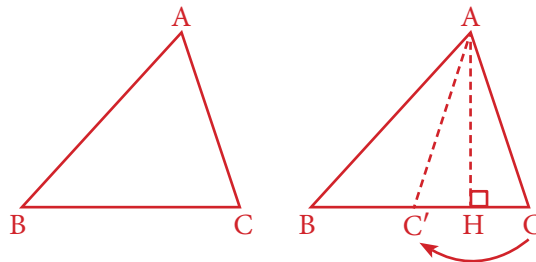
Çözüm:

H diklik merkezi olduğundan $CA \perp AB$ ve $BE \perp AC$ olduğundan $m(\text{EHC}) = 68^\circ$ olur. EHC ve ADC dik üçgen olduğundan $m(\text{ACD}) = 22^\circ$ ve $m(\text{DAC}) = x = 68^\circ$ olarak bulunur.



Kâğıt Katlayarak Üçgende Yükseklik Çizimi

ABC üçgeni şeklindeki kesilmiş kâğıt C köşesinden tutulup şekildeki gibi kat izi A noktasından geçecek şekilde BC kenarı kendi üzerine katlanır. Kat izi çizilirse A noktasından geçen [BC] kenarına ait yükseklik elde edilmiş olur.



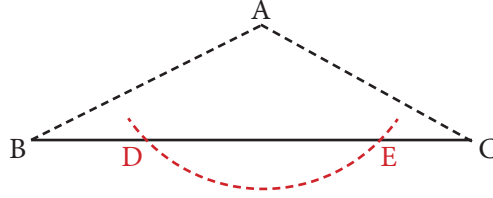


Pergel ve Cetvel Kullanarak Bir Üçgende Herhangi Bir Kenara Ait Yüksekliği Bulmak

Bir ABC üçgeninde A noktasından BC doğrusuna yükseklik çizmek

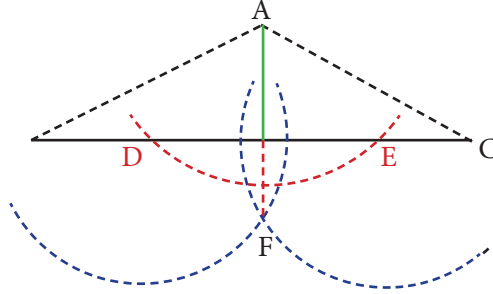
1. Adım:

Pergeli herhangi bir uzunlukta açarak A merkezli BC doğrusunu D,E noktalarında kesen DE yayını çizelim.



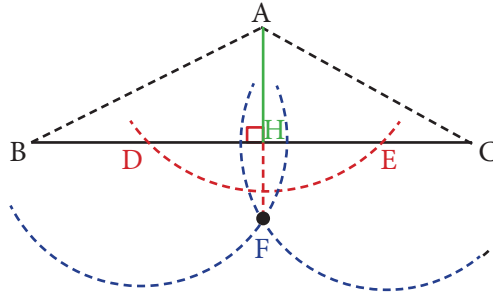
2. Adım:

Pergeli DE uzunluğundan küçük olacak şekilde açıp D merkezli ve E merkezli yayların kesim noktası F noktasını belirleyelim.



3. Adım:

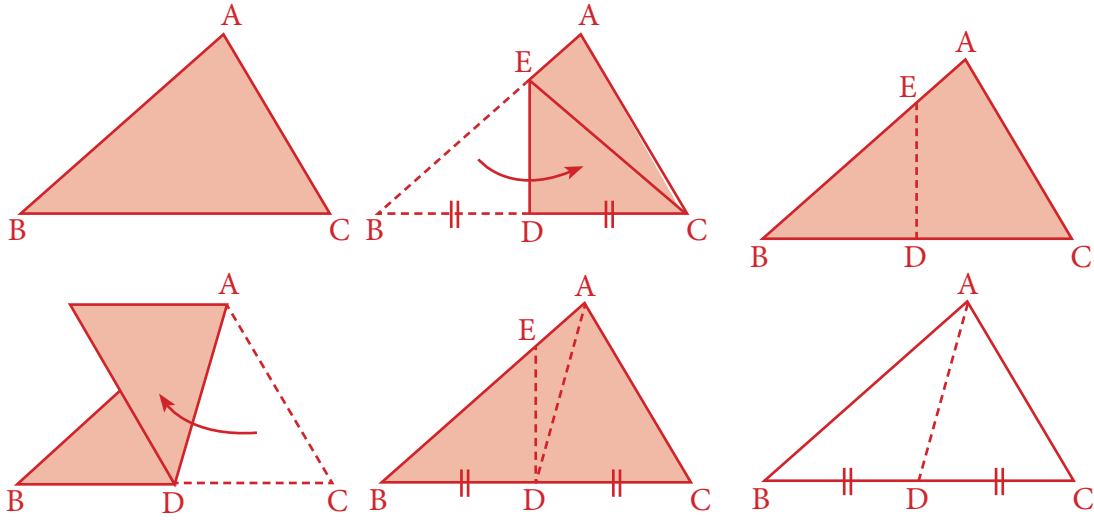
A ve F noktalarından geçen doğrunun BC doğrusuyla kesişim noktası H noktası olmak üzere; [AH] doğru parçası BC kenarına ait yüksekliktir.





Kâğıt Katlayarak Kenar Orta Dikmesi ve Kenarortay Çizimi

ABC üçgeni biçimindeki kâğıt B köşesi ve C köşesinin üstüne gelecek şekilde katlanır. BC kenarının orta noktası olan D noktası ve kenar orta dikmesi olan [ED] belirlenir. C köşesi AD boyunca katlanarak BC kenarının kenarortayı olan [AD] belirlenir.



EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Çeşitkenar bir ABC üçgeninde A köşesinden çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay arasındaki sıralama $h_a < n_a < V_a$ şeklinde olduğunu araştırınız.
- Bir üçgende yükseklikler toplamının üçgenin çevresinden küçük olduğunu ispatlayınız.
- Bir ABC üçgeninde $\frac{b-c}{2} < V_a < \frac{b+c}{2}$ ve u yarı çevre olmak üzere $u < V_a + V_b + V_c < 2u$ olduğunu ispatlayınız.

KAYNAKLAR

Şahin, M.(2013). *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Geometri-1*, Palme Yayınevi.

Küpeli, S. (2010). *100 Yılın Olimpiyat Sorularıyla Geometri*, Altın Nokta Yayınevi.

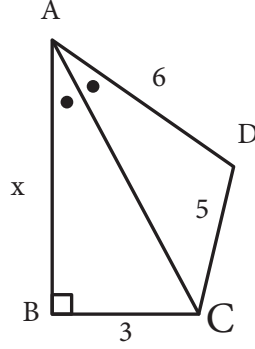
Large, T.& Rogers, K. (2015). *Şekilli Matematik Sözlüğü*, TÜBİTAK Yayınları.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

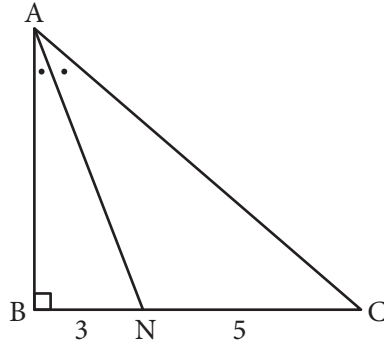
Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu

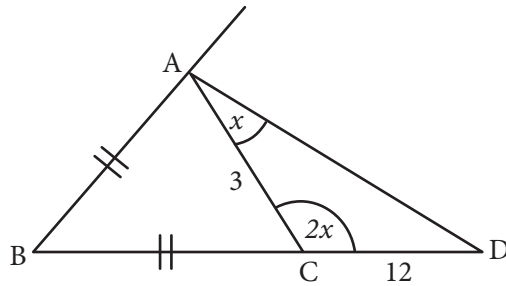
1. ABCD dörtgeninde $AB \perp BC$ $m(\angle BAC) = m(\angle CAD)$, $|AD| = 4$ birim, $|CD| = 5$ birim ve $|BC| = 4$ birim olduğuna göre $|AB| = x$ kaç birimdir?



2. ABC dik üçgeninde $AB \perp BC$ ve $[AN]$ açıortay olmak üzere, $|BN| = 3$ birim ve $|NC| = 5$ birim olduğuna göre $\text{çevre}(ABC)$ kaç birimdir?

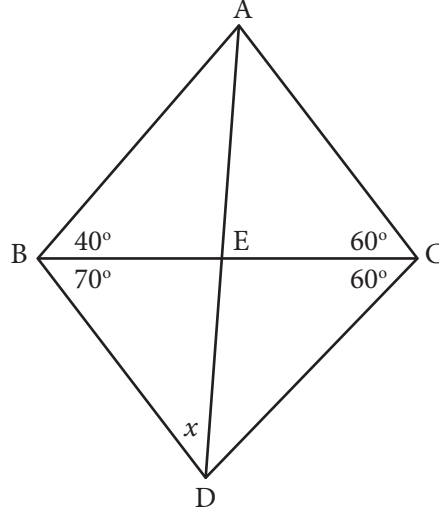


3. ABC üçgeninde $|AB| = |BC|$ ve $|AC| = 3$ birim, $|CD| = 12$ birim olduğuna göre $|AB|$ kaç birimdir?

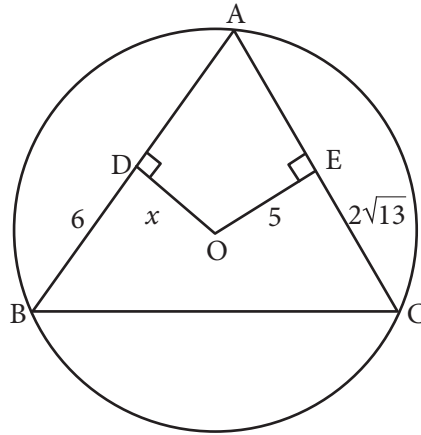




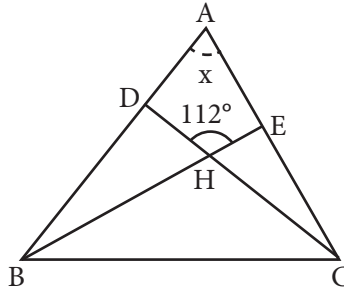
4. ABCD dörtgeninde $m(\angle ABC) = 40^\circ$, $m(\angle DBC) = 70^\circ$, $m(\angle ACB) = 60^\circ$ ve $m(\angle BCD) = 60^\circ$ olduğuna göre $m(\angle ADB) = x$ kaç derecedir?



5. ABC üçgeninde O çevrel çemberin merkezi olmak üzere $|BD| = 6$ birim, $|OE| = 5$ birim, $|EC| = 2\sqrt{13}$ birim olduğuna göre $|OD| = x$ kaç birimdir?



6. Bir ABC üçgeninde H noktası diklik merkezi olmak üzere $m(\angle DHE) = 112^\circ$ olmak üzere $m(\angle DAC) = x$ kaç derecedir?





Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI	: ÜÇGENSEL BÖLGELERİN ALANLARI
MODÜL/KONU	: Geometri/Üçgenler
KAZANIMLAR	: 1. Üçgenin farklı alan formüllerini ispat eder. : 2. Benzer üçgenlerin alanları oranının benzerlik oranının karesi olduğunu ispat eder.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu, dinamik matematik yazılımı

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, öğrencilerin üçgende alan bulma kurallarını veren bağıntıları keşfetmeleri amaçlanmıştır. Öğrencilerin bir dinamik matematik yazılımı ile üçgende alan hesaplamaları yapmaları hedeflenmiştir. Ayrıca öğrencilerin dinamik matematik yazılımı etkinliği ile benzer üçgenlerin alanları oranının benzerlik oranının karesi olduğunu keşfetmesi beklenmektedir.

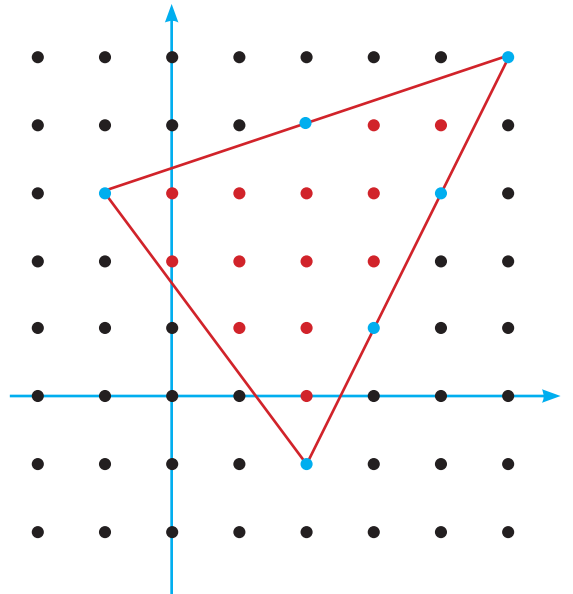
Başlarken...

Matematik projeleri ve sunumları denilince ilk aklara gelen konulardan birisi olan Pick Teoremi çivilikle alan hesabı olarak bilinir (Avusturyalı matematikçi Georg A. Pick, 1899). Bu teorem ne işe yarar ve nasıl uygulanır? Pick Teoremi aralarındaki mesafe bir birim olan çivilere takılan bir lastik parçasının belirlediği alanı bulmamıza yarar. Bu şekil herhangi bir çokgensel bölge olabilir.

i: Bölgenin içinde kalan kırmızı noktalar

b: Çokgenin üzerinde bulunan mavi noktalar

Çokgenin Alanı = $i + \frac{b}{2} - 1 = 13 + \frac{6}{2} - 1 = 15$ olarak bulunur.





Öğrenciler Pick Teoremi ile uygulama yapmaları için Etkinlik Formuna yönlendirilir (Etkinlik Formu Soru 1, 2).

Alan Hesaplama

Bozok, dedesinin getirdiği çikolatadan birkaç parça kopardıktan sonra acaba ne kadarını yedim diye düşünmeye başladı.

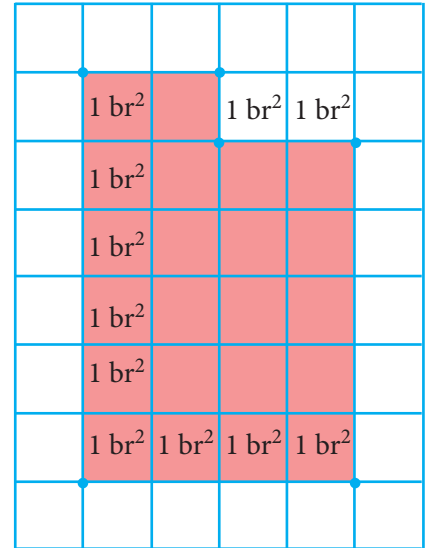
Sizce çikolatanın ne kadarını yediğini bulmak için hangi geometrik kavramdan yararlanmalıdır?



Geometride alan hesaplamak için şekil birimkarelerden oluşan kareli kâğıdın üzerine çizilir ve kâğıt üzerinde kapladığı alan karesel bölgelere ayrılır.

Yandaki şekilde kenarları bir birim olan karesel bölgelerden oluşmuş şeklin alanı 22 birimkaredir.

Dikdörtgensel bölgelerin alanları kenarların oluştuğu birim-kare sayılarının çarpımı olarak bulunabilir.



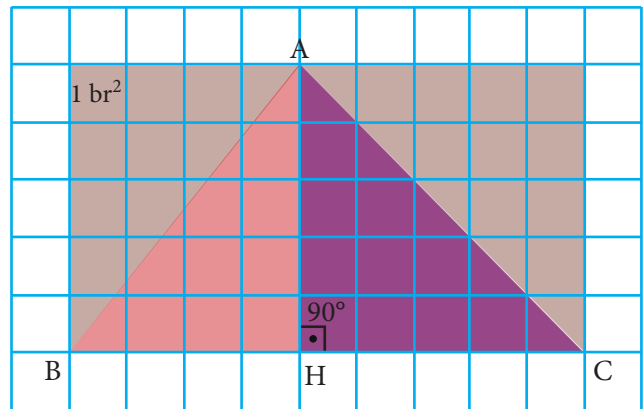
Dikdörtgensel bölgenin alanı yardımıyla üçgen-sel bölgelerin alanlarını da bulabilir miyiz?

Örneğin yandaki şekilde,

$\text{Alan}(\text{ABC}) = \text{Alan}(\text{ABH}) + \text{Alan}(\text{AHC})$ olduğundan dolayı $\text{Alan}(\text{ABC})$ aslında dikdörtgensel bölgenin alanının yarısıdır.

$\text{Alan}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} |\text{AH}| \cdot |\text{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 = \frac{45}{2}$ birimkare olarak bulunur.

Sizce üçgenin alanını veren bir bağıntı bulunmaya çalışılırsa hangi uzunlukları bilmemiz gerekir?



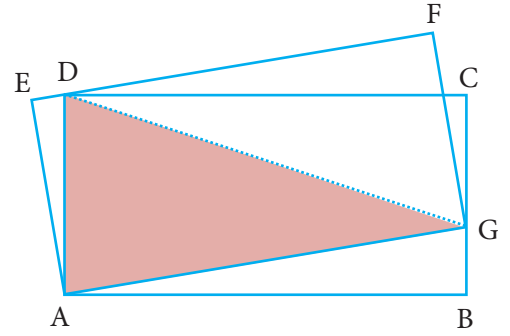
Örnek:

Şekildeki ABCD ve AGFE dikdörtgenlerinin alanları arasında nasıl bir bağıntı vardır?

Çözüm:

$$\text{Alan}(\text{ADG}) = \frac{\text{Alan}(\text{ABCD})}{2} = \frac{\text{Alan}(\text{AGFE})}{2} \text{ olduğundan}$$

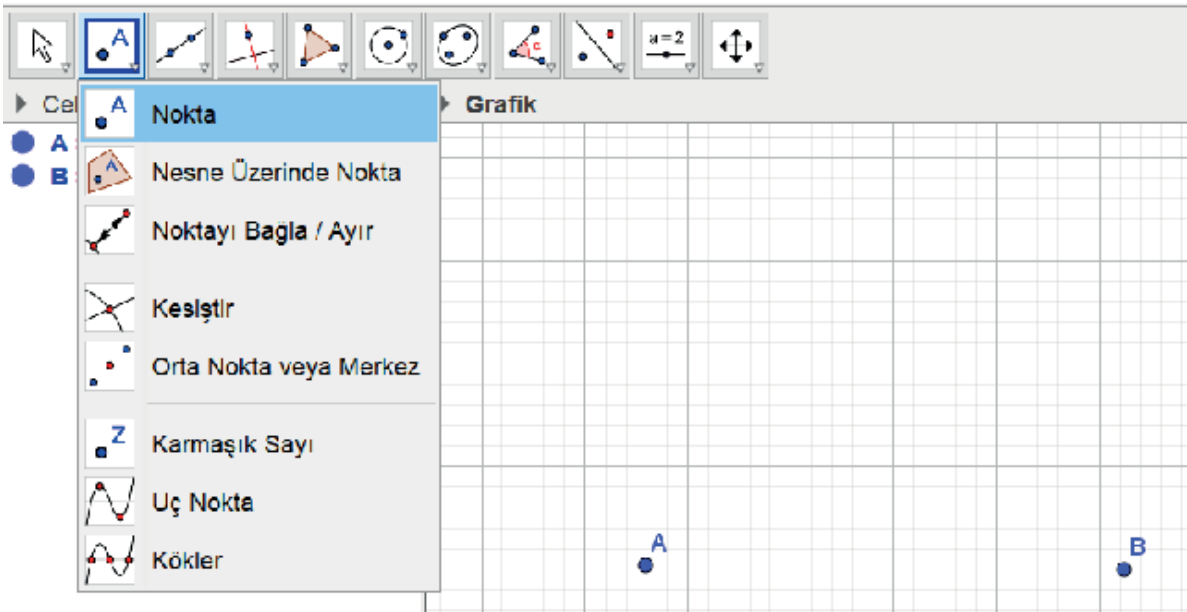
$$\text{Alan}(\text{ABCD}) = \text{Alan}(\text{AGFE}) \text{ olur.}$$



Dinamik matematik yazılımı açılır. “Perspektifler” penceresinden “Cebir&Grafik” kısmına girilir.

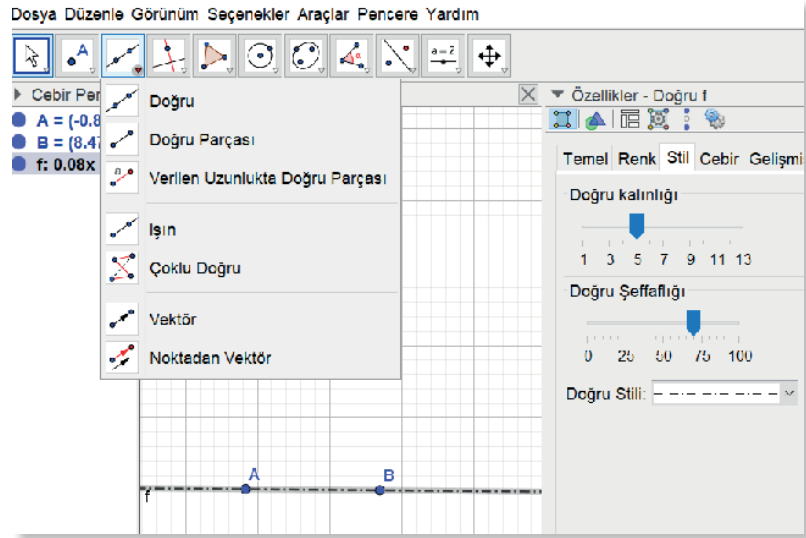
Hazır menülerden “Nokta” özelliği ile A ve B Noktaları belirlenir.

Dosya Düzenle Görünüm Seçenekler Araçlar Pencere Yardım

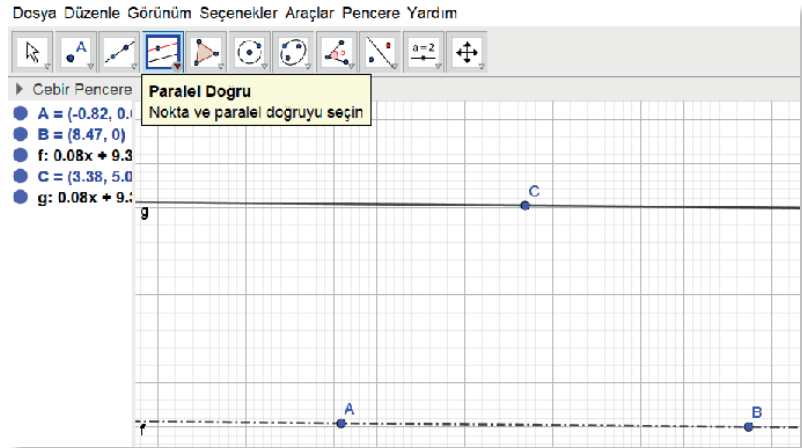




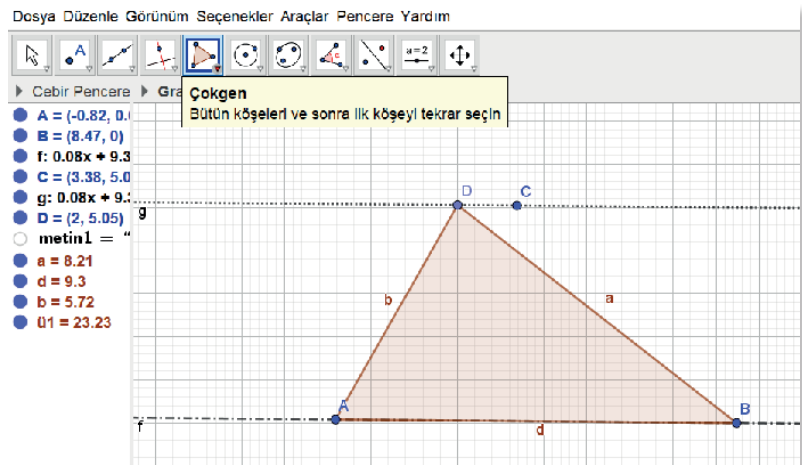
Hazır menülerden “Doğru” özelliği seçilir, A ve B noktalarından geçen doğru tanımlanır. Doğru Stili kesikli çizgi seçilir.



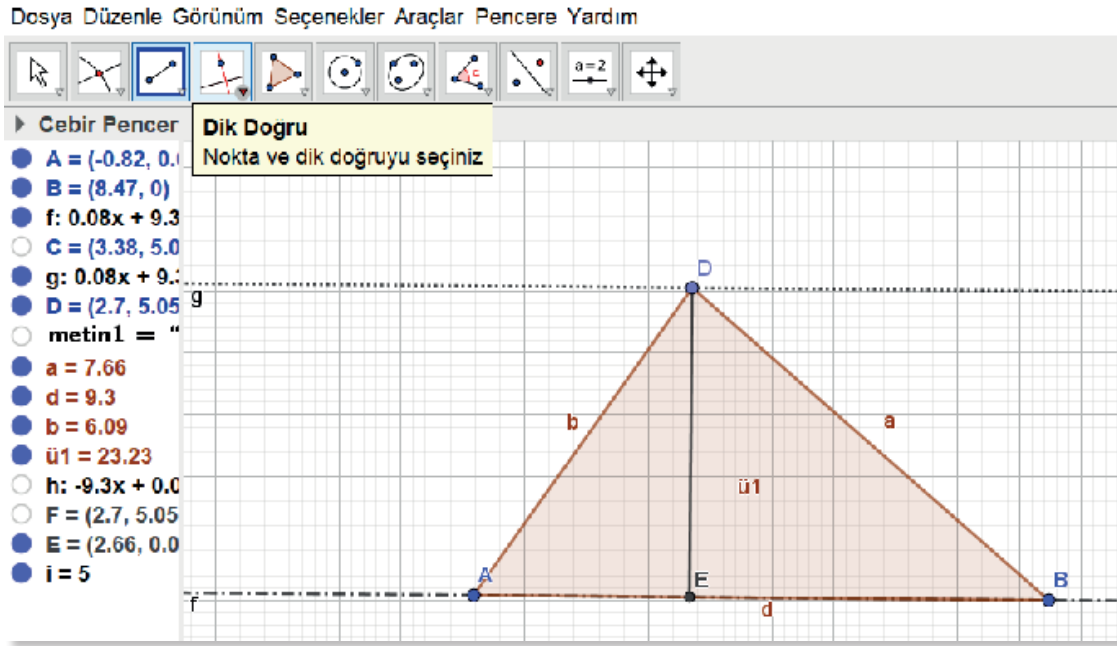
“Paralel Doğru” oluştur özelliğinden önce AB doğrusu sonra başka bir nokta seçilir ve stili kesikli çizgi olarak değiştirilir.



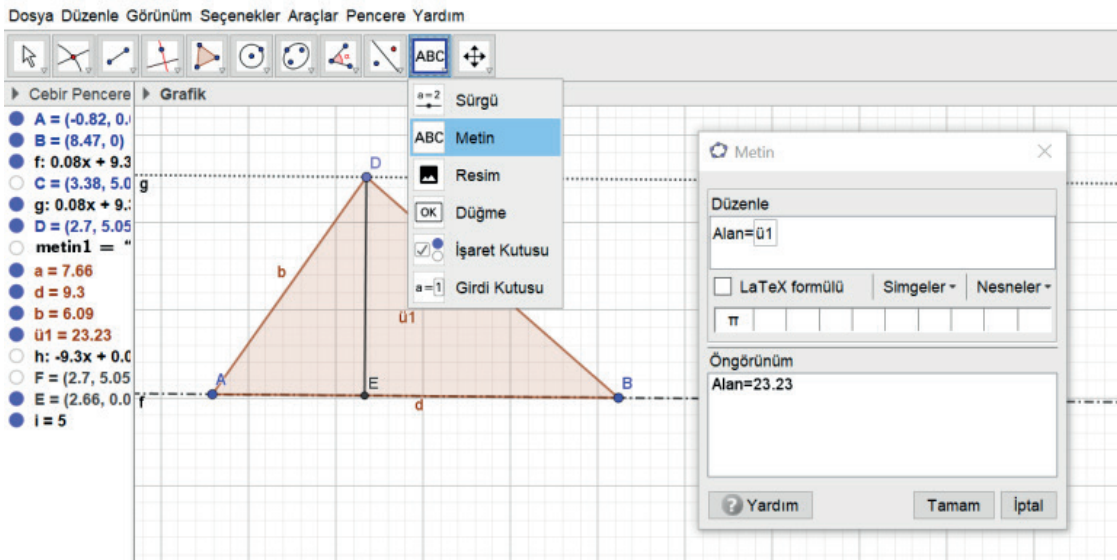
Paralel doğru üzerinde bir D noktası seçilir. Çokgen oluştur seçeneğiyle köşeleri A,B ve D noktaları olan üçgen oluşturulur.



“Dik Doğru” özelliği ile D noktasından geçen ve AB doğrusuna dik olan doğru seçilir. Doğru ve AB doğrusunun kesişim noktası belirlenerek dikme ayağı oluşturulur. D ve E dikme ayağı noktasından geçen doğru parçası belirlenir. Dik doğru üzerine sağ tıklanarak Nesneyi Göster özelliği ile dik doğru görünmez hâle getirilir.

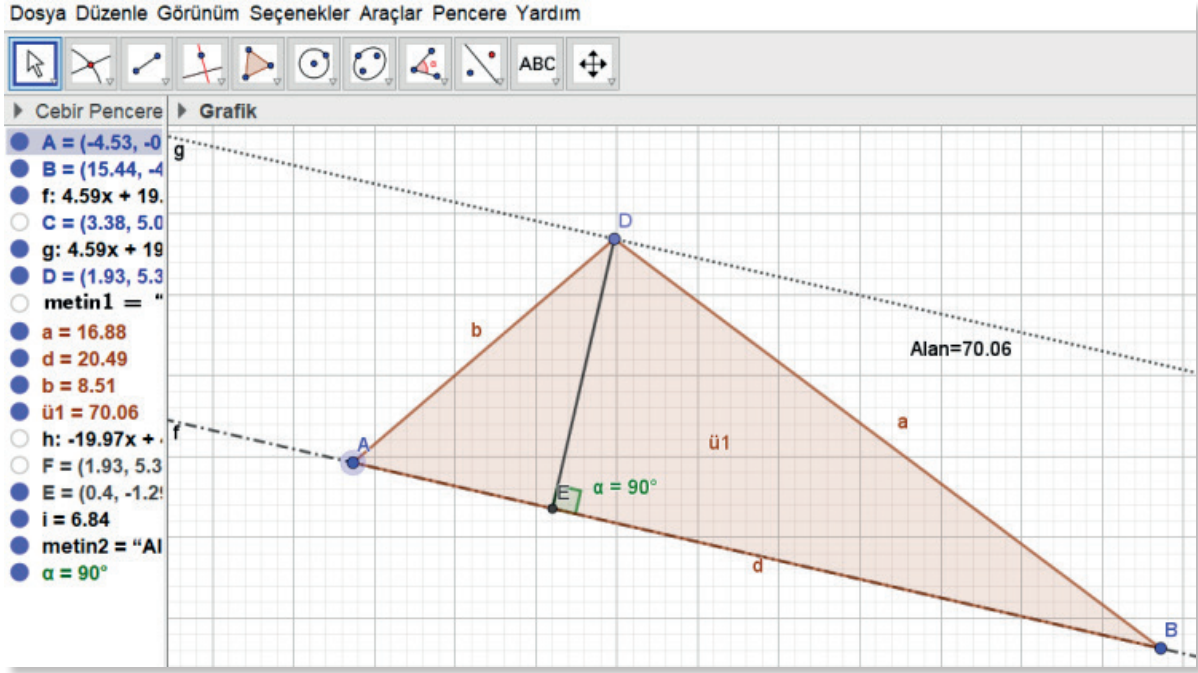


Metin özelliği seçilir ve Alan = $\hat{u}_1$ yazılır.





A, B ve D noktaları dinamik noktalar olduğundan fare ile sürüklendikçe değişen üçgenin alanı ekranda belirir.



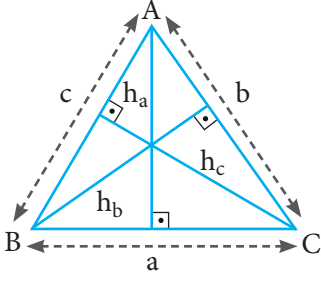
Öğrencilerden $AB = d$ tabanı ve $DE = h$ yüksekliğini Cebir Penceresinden bulduğu değerleri aşağıdaki tabloda yazmaları ve aralarında nasıl bir ilişki olduğunu tartışmaları sağlanır.

AB	DE	Alan
10	4	
12	6	
12	8	

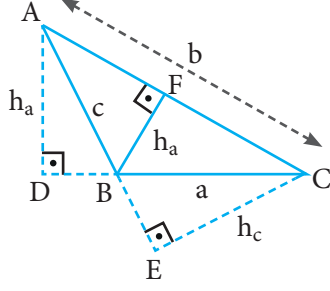
Üçgende Alan

Bir üçgensel bölgenin alanı, bir kenar uzunluğu ile o kenar uzunluğuna ait yüksekliğin uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir. A, B, C köşelerinden oluşan üçgensel bölgenin alanı $\text{Alan}(\widehat{ABC})$ biçiminde gösterilir.

Dar Açılı Üçgende Alan

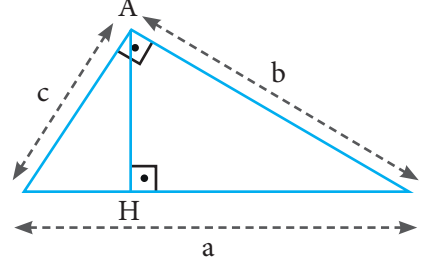


Geniş Açılı Üçgende Alan



$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

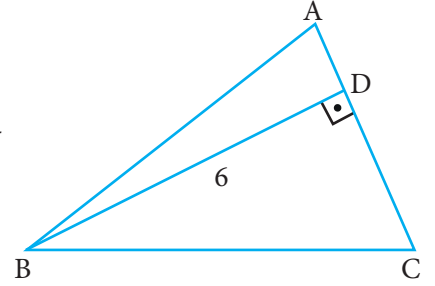
Dik Açılı Üçgende Alan



$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Örnek:

Şekildeki ABC üçgeninde $[BD] \perp [AC]$, $|BD| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm olduğuna göre, $\text{Alan}(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?



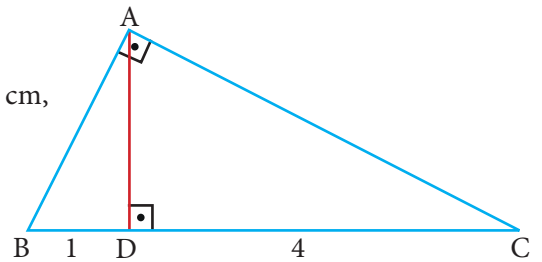
Çözüm:

Şekilde üçgenimizin tabanı $[AC]$ bu tabana ait yükseklik ise $[BD]$ 'dir. $\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot (\text{taban} \times \text{yükseklik})$

$$\begin{aligned} \text{bağıntısından } \text{Alan}(\widehat{ABC}) &= \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \text{ olur.} \\ &= 12 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Örnek:

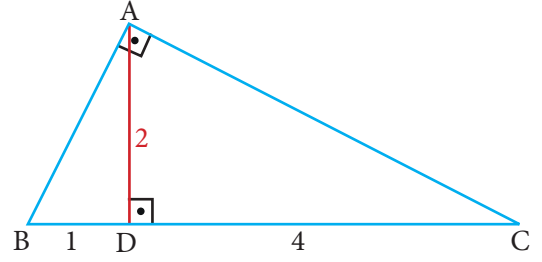
Şekildeki ABC üçgeninde $[AB] \perp [AC]$ $[AD] \perp [BC]$ $|BD| = 1$ cm, $|DC| = 4$ cm olduğuna göre, $\text{Alan}(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?



**Çözüm:**

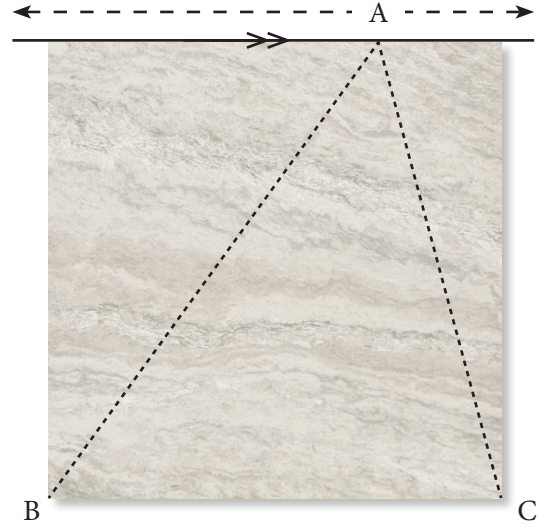
Şekildeki ABC üçgeninde $|AD|^2 = |BD| \cdot |DC|$ {Öklid bağıntısı} $|AD|^2 = 1 \cdot 4$ ise $|AD| = 2$ cm

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} |BC| \cdot |AD| = \frac{1}{2} 5 \cdot 2 = 5 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$



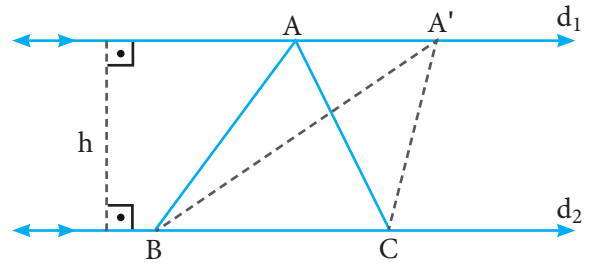
Üçgende alan ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu 3-7).

Kare şeklindeki fayansın alt köşelerinden ve üst kenarından bulunan herhangi bir noktayı lastikle birleştirerek bir üçgen oluşturalım. A noktasını doğru boyunca hareket ettirirsek üçgenin alanı nasıl değişir? Tartışınız.

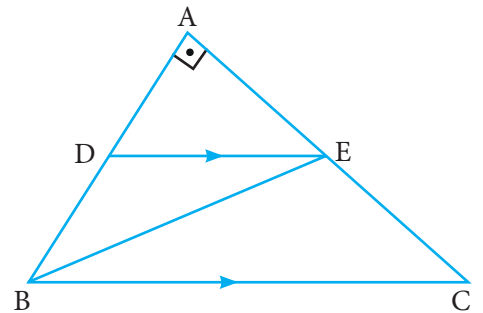
**Özellik:**

$d_1 // d_2$ olmak üzere ABC üçgeninin A noktası hareket ettirildiğinde oluşan A'BC üçgeninin alanı değişmez. Bu üçgenlerin tabanları ve yükseklikleri aynı uzunluktadır.

$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{A'BC}) = \frac{|BC| \cdot h}{2}$$

**Örnek:**

ABC dik üçgen $[AB] \perp [AC]$, $[DE] \parallel [BC]$, $|BD| = 6$ birim $|AC| = 10$ birim olduğuna göre $A(\widehat{BEC})$ kaç birimkaredir?

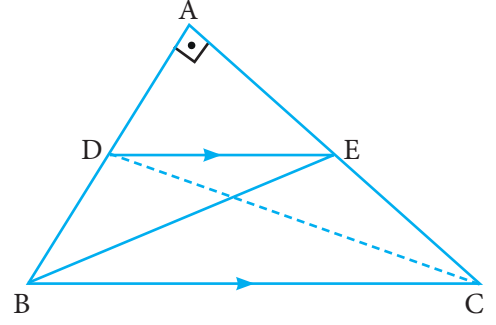


Çözüm:

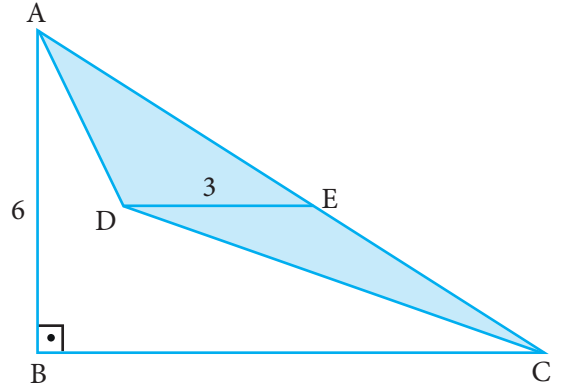
$A(\widehat{BEC}) = A(\widehat{BDC})$ olacağından

$$A(\widehat{BEC}) = A(\widehat{BDC}) = \frac{|BD| \cdot |AC|}{2} = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30$$

birimkare bulunur.

**Örnek:**

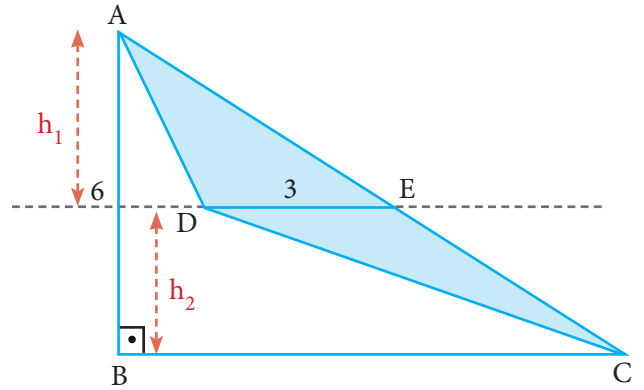
Görselde köşeleri A, B ve C noktaları olan dik üçgen şeklinde bir bahçenin çizimi verilmiştir. Beyaz alan yeşillendirilecek, taralı alan ise çocukların oyun parkı olarak değerlendirilecektir. DE köşelerini birleştiren BC kenarına paralel doğru yerine 3 m uzunluğunda bir tahterevalli yerleştirilecektir. AB köşeleri arasındaki uzaklık 6 m olduğuna göre çocukların oyun parkının alanı kaç m² dir?

**Çözüm:**

$[DE] \parallel [BC]$ olduğundan

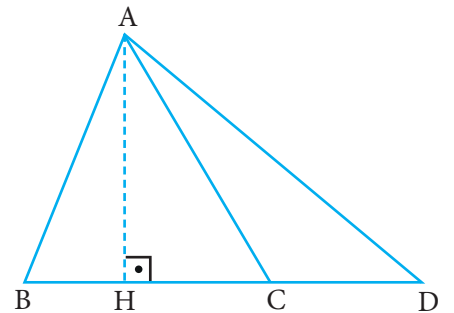
$$\begin{aligned} A(\widehat{ADC}) &= A(\widehat{ADE}) + A(\widehat{DEC}) \\ &= \frac{3 \cdot h_1}{2} + \frac{3 \cdot h_2}{2} \\ &= \frac{3(h_1 + h_2)}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

bulunur.

**Özellik:**

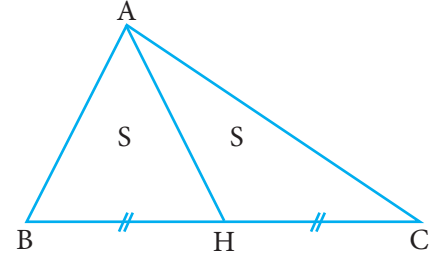
Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı bu yüksekliklere ait taban uzunlukları oranına eşittir. Benzer şekilde tabanları eşit olan üçgenlerin alanları oranı yükseklikleri oranına eşittir.

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{ACD})} = \frac{\frac{|BC| \cdot |AH|}{2}}{\frac{|CD| \cdot |AH|}{2}} = \frac{|BC|}{|CD|}$$



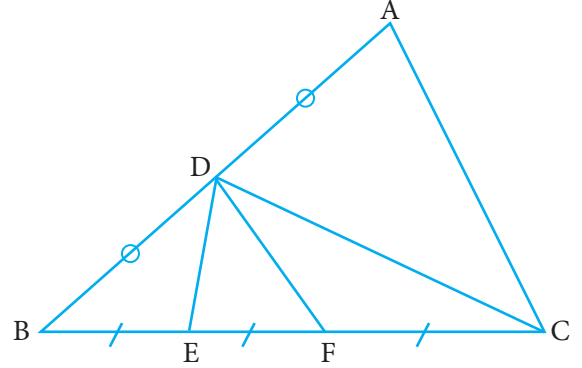


Kenarortay, üçgeni alanları eşit olan iki parçaya ayırır.



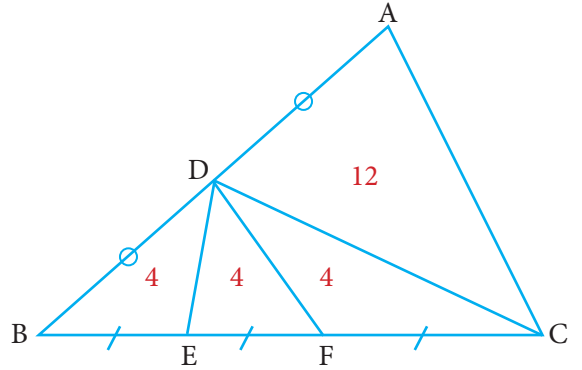
Örnek:

Şekildeki ABC üçgeninde $A(\widehat{DEF}) = 4$ birimkare
 $|BE| = |EF| = |FC|$ ve $|BD| = |DA|$ olduğuna göre,
 $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?



Örnek:

$|BE| = |EF| = |FC|$ olduğundan
 $A(\widehat{DBE}) = A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{DFC}) = 4$ birimkare ve
benzer şekilde $A(\widehat{ABC}) = 24$ birim kare bulunur.

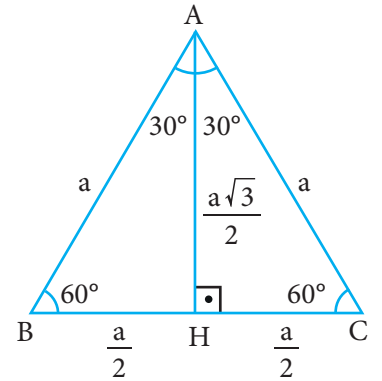


Üçgende alan ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 8-16).

Özellik:

Eşkenar Üçgenin Alanı: Bir kenara ait yükseklik $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ olarak buluruz.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

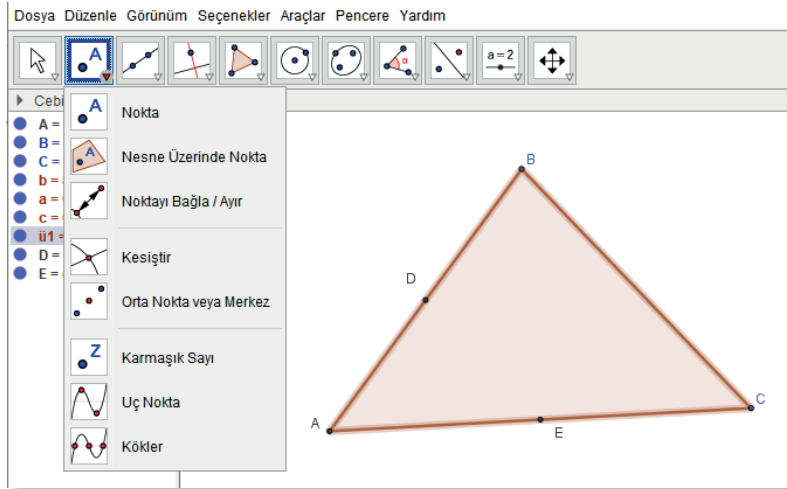


Üçgende alan ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 17, 18).

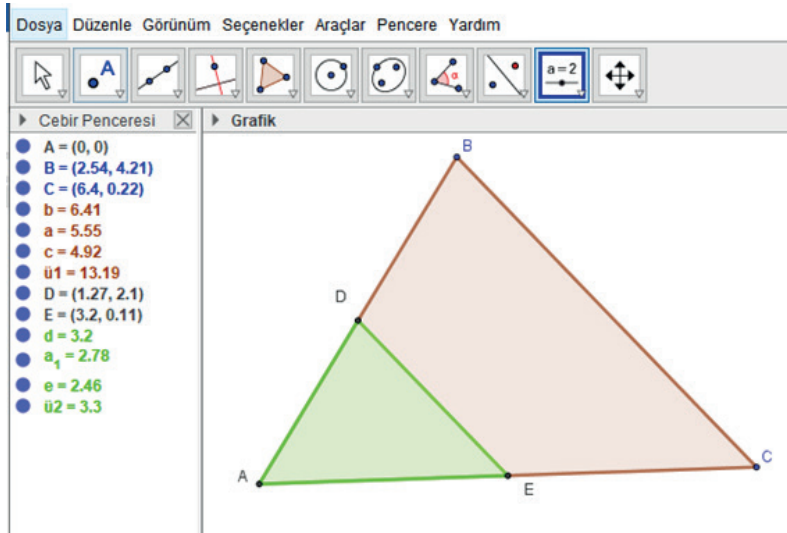


Benzer üçgenlerin alanları oranı dinamik matematik yazılımında uygulamalı olarak yapılacaktır.

Hazır menülerden “Çokgen” seçilip ABC üçgeni oluşturulur. Orta nokta özelliği ile AB ve AC kenarlarının orta noktaları belirlenir

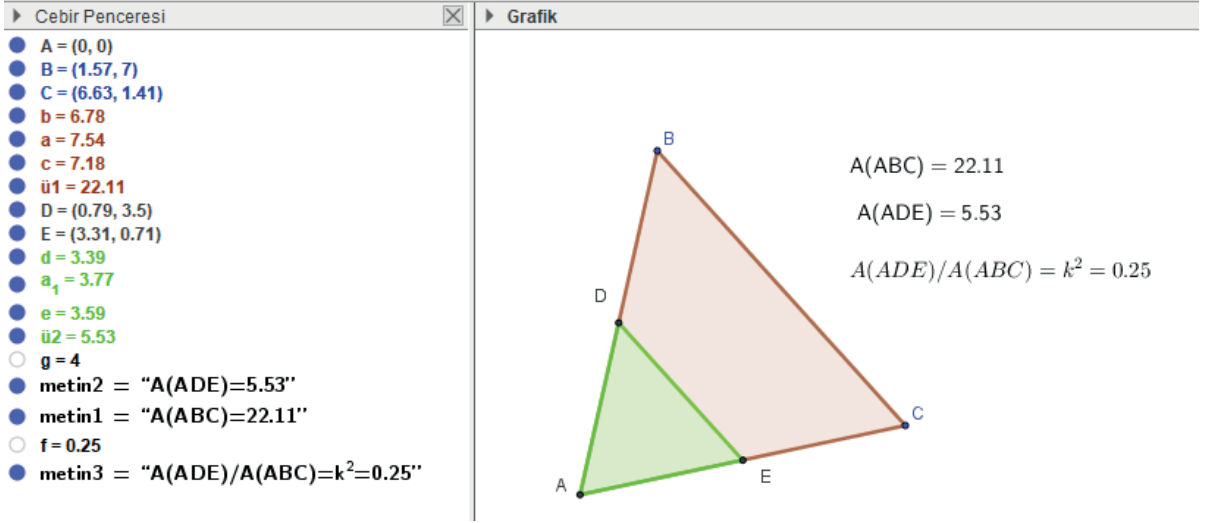


ABC üçgeni ile benzerlik oranı 1/2 olan ADE üçgeni oluşturulur.



Giriş sekmesinde ü1/ü2 yazılarak ABC üçgeni ve ADE üçgenin alanları oranı f olarak hesaplatılır.

Giriş:



Yazılım dinamik özelliği sayesinde B ve C noktaları değiştirip farklı üçgenler için alan oranı f oranının değerini inceleyiniz? Benzer şekilde AD ve AE kenarlarının orta noktaları ve A noktasıyla oluşturacağınız üçgenin alanının benzer olduğu ABC üçgenine oranını bulunuz.

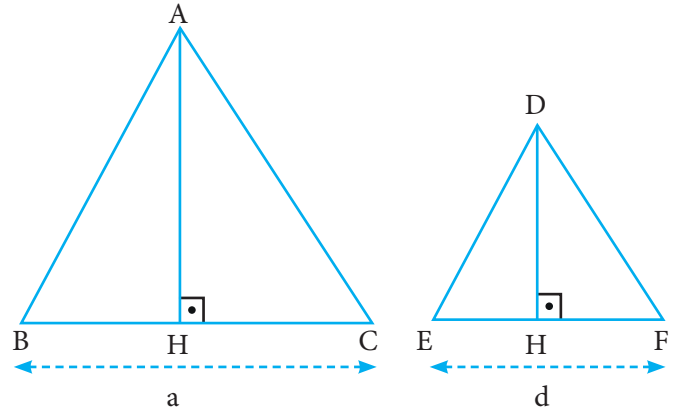
Özellik:

Benzer Üçgenlerin Alanları

Benzer iki üçgenin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir.

$(\widehat{ABC}) \sim (\widehat{DEF})$ ve benzerlik oranı k ise

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2 \text{ olur.}$$



İspat:

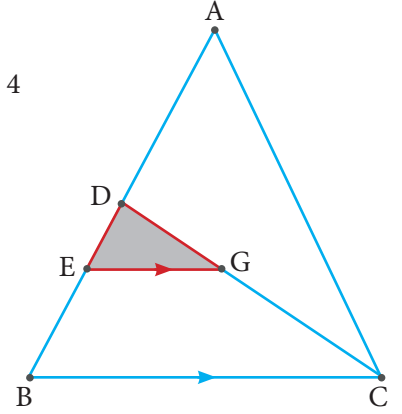
$$\frac{a}{d} = \frac{h}{h'} = k$$

$$\begin{aligned} \frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} &= \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{d \cdot h'}{2}} = \frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{d \cdot h'} = \frac{a}{d} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k \\ &= k^2 \end{aligned}$$

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2 \text{ olur.}$$

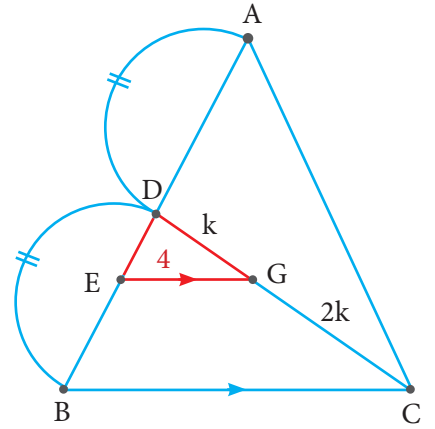
Örnek:

Şekilde G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi EG // BC ve $A(\widehat{DEG}) = 4$ birimkare olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?

**Çözüm:**

$$\frac{A(\widehat{DEG})}{A(\widehat{DBC})} = \left(\frac{k}{3k}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ ise } A(\widehat{DBC}) = 36 \text{ birimkare olur.}$$

$$\frac{A(\widehat{ADC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{|AD|}{|DB|} = 1 \text{ ise } A(\widehat{ABC}) = 72 \text{ birimkare olur.}$$



Üçgende alan ile ilgili uygulamalara yer verilir (Etkinlik Formu Soru 19, 20).

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ**Araştırma Soruları**

- Pick Teoremi'nin ispatını araştırınız.
- Heron üçgenlerini araştırınız.
- Bir üçgeni hem iki eşit çevreye hem iki eşit alana bölen doğru var mıdır?
- Alanı çevresine eşit olan üçgenler var mıdır?
- Çevresi verilen bir üçgenin alanının en büyük ve en küçük değeri nasıl hesaplanır?
- Dinamik matematik programlarında üçgende alan hesaplama uygulamaları yaptırılabilir.
- Brüt ve net alan kavramlarını araştırınız.



KAYNAKLAR

Wells, D. (2019), *Geometrinin Gizli Dünyası*, Doruk Yayınları.

Küpeli, S. (2010). *100 Yılın Olimpiyat Sorularıyla Geometri*. Altın Nokta Basın Yayın Dağıtım.

Large, T. & Rogers, K. (2015), *Şekilli Matematik Sözlüğü*, Tübitak Yayınları.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. 3, 2, 4, 6, 7, 9, 3, 3.5

2. Uygulama sorusu...

3. 30

4. 31

5. 48

6. 10

7. 4

8. 22

9. 48

10. $1/3$

11. 45

12. 27

13. 20

14. 12

15. 72

16. 16

17. $225\sqrt{3}$

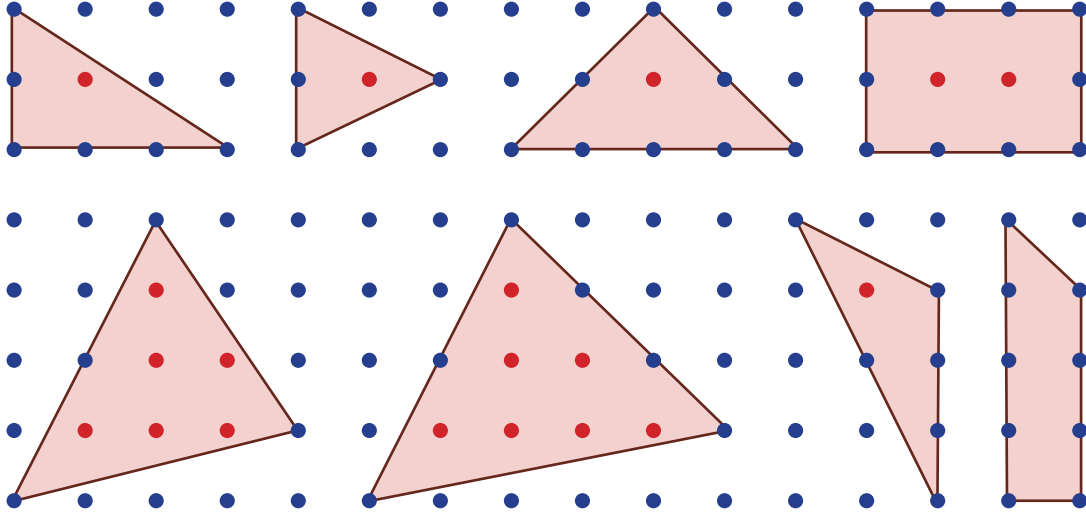
18. $\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$

19. $1/2$

20. 12

**Etkinlik Formu**

1. Birimkareli kâğıtta verilen çokgensel bölgelerin alanlarını Pick Teoremi'ni kullanarak bulunuz.



2. Bilgisayardan veya telefonunuzdan Pick Teoremi dinamik matematik/geometri etkinliğine aşağıdaki karekodu okutarak ulaşabilirsiniz.

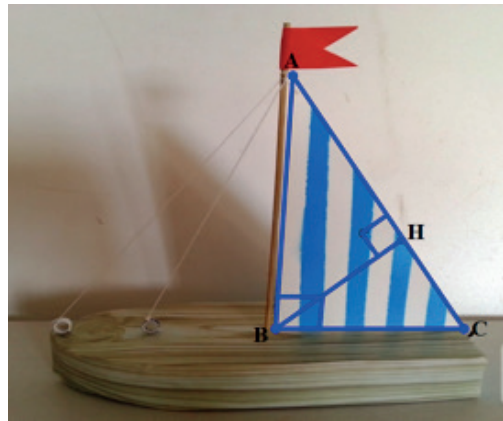


3. Şekildeki gibi maket yelkenli yaptığınızı düşünün. Maketinizin her birimi bir metreye karşılık gelsin. Acaba yelkenli için en az kaç metre kare kumaş almalıyız.

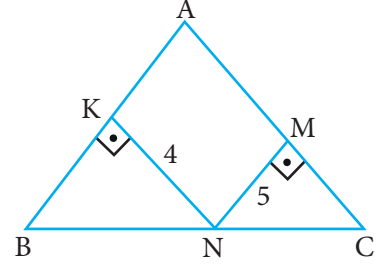
ABC bir üçgen,

$$|AC| = 10 \text{ birim}$$

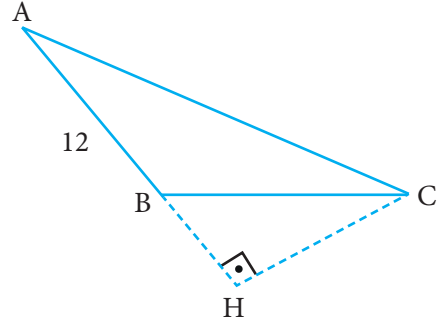
$$|BH| = 6 \text{ birim}, AC \perp BH, AB \perp BC$$



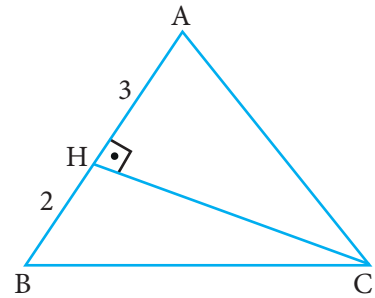
4. ABC üçgen $NK \perp AB$, $NM \perp AC$, $|AB| = 8$ birim,
 $|AC| = 6$ birim, $|KN| = 4$ birim, $|MN| = 5$ birim
 olduğuna göre, $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?



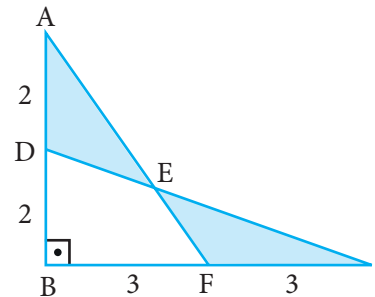
5. ABC üçgen A, B, H doğrusal, $[AH] \perp [HC]$,
 $|AB| = 12$ birim, $|HC| = 8$ birim, olduğuna göre
 $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?



6. ABC üçgen, $CH \perp AB$, $|AB| = |AC|$, $|AH| = 3$ birim,
 $|BH| = 2$ birim olduğuna göre, $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?

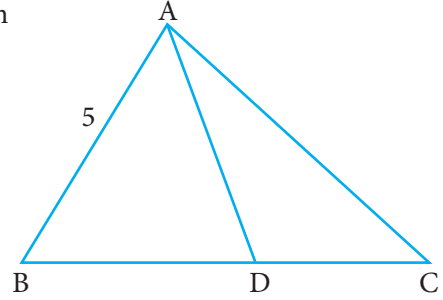


7. $[AF] \cap [DC] = \{E\}$
 $AB \perp BC$, $|AD| = |DB| = 2$ birim,
 $|BF| = |FC| = 3$ birim
 Verilenlere göre, taralı alanlar toplamı kaç birimkaredir?

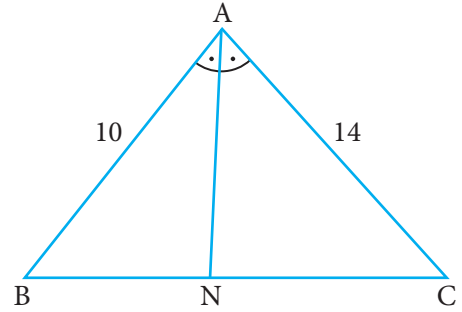




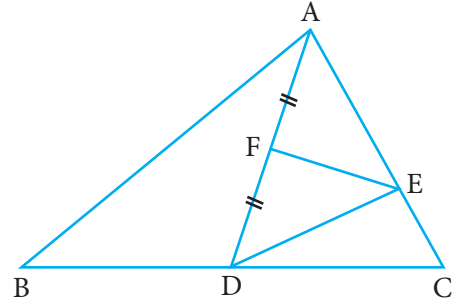
8. ABC üçgen, $|AB| = |AD| = |DC| = 5$ birim $|BD| = 6$ birim olduğuna göre, $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?



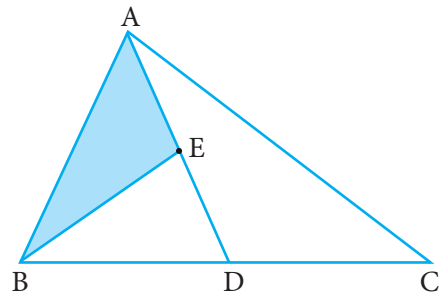
9. ABC üçgen, $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC})$
 $|AB| = 10$ birim
 $|AC| = 14$ birim
 $\text{Alan}(\widehat{ABN}) = 20$ birimkare olduğuna göre,
 $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?



10. ABC üçgen, $|AF| = |FD|$, $|AE| = |EC|$ ve
 $4|BD| = 3|DC|$
Verilenlere göre, $\frac{A(\widehat{AFE})}{A(\widehat{ABD})}$ oranı kaçtır?



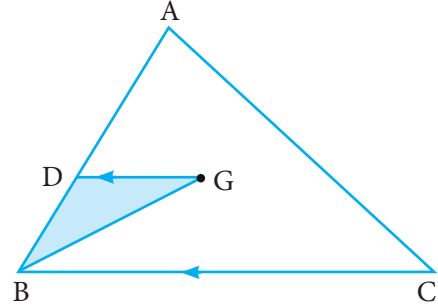
11. ABC üçgeninde $|BD| = 2|DC|$, $|AE| = |ED|$
Taralı alan 15 birimkare olduğuna göre, ABC üçgeni-
nin alanı kaç birimkaredir?



12. ABC üçgeninde G kenarortayların kesim noktasıdır.

$DG \parallel BC$ ve $A(\widehat{DBG}) = 3$ birimkaredir.

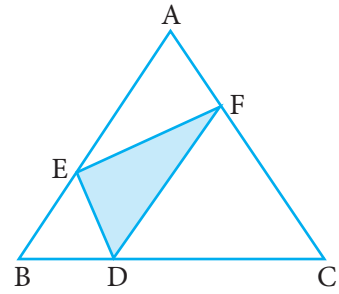
Verilenlere göre, $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?



13. ABC üçgen $DF \parallel AC$, $|DC| = 3|BD|$,

$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = 120$ birimkare olduğuna göre $\text{Alan}(\widehat{EDF})$

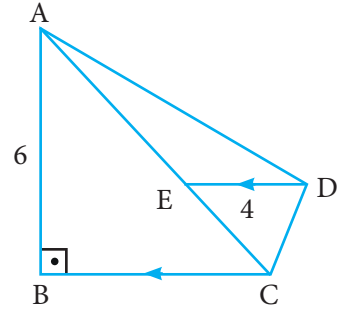
kaç birimkaredir?



14. ABC üçgen, $AB \perp BC$, $ED \parallel BC$

$|DE| = 4$ birim, $|AB| = 6$ birim olduğuna göre,

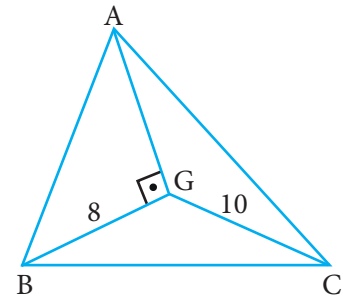
$A(\widehat{ACD})$ kaç birimkaredir?



15. ABC üçgeninde G kenarortayların kesim noktasıdır.

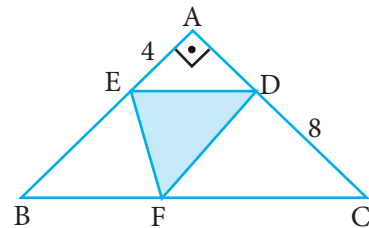
$AG \perp BG$, $|BG| = 8$ birim, $|GC| = 10$ birim olduğuna

göre, $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?



16. Şekilde; ABC bir üçgendir. $DE \parallel BC$, $[AB] \perp [AC]$ dır.

$|AE| = 4$ cm, $|DC| = 8$ cm ise, $A(\widehat{DEF})$ kaç cm^2 dir?





17. Üçgen trafik levhaları genellikle eşkenar üçgen şeklindedir. Şekildeki levhanın bir kenarı 30 cm olduğuna göre alanı kaç santimetre karedir.



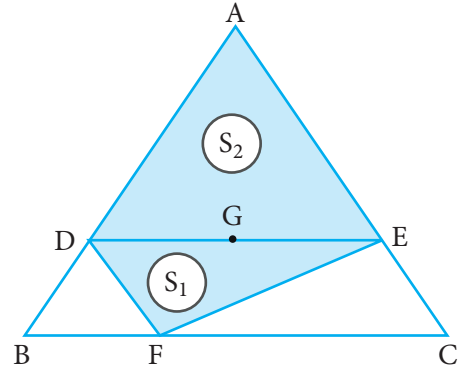
18. Alanları eşit olan bir eşkenar üçgen ile bir karenin çevreleri oranı nedir?

19. ABC üçgeninde G kenarortayların kesim noktasıdır.

$DE \parallel BC$, $G \in [DE]$

$S_1 = A(DFE)$ ve $S_2 = A(ADE)$ olduğuna göre,

$\frac{S_1}{S_2}$ oranı kaçtır?

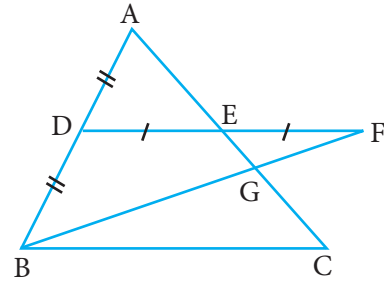


20. ABC üçgen, B, G, F doğrusal

$DF \parallel BC$, $|AD| = |DB|$,

$|DE| = |EF|$

Verilenlere göre, $\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{EFG})}$ oranı kaçtır?



21. ABC ve DEF üçgenleri benzer üçgenlerdir.

$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre, bu iki üçgenin benzerlik oranının $\frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.



Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

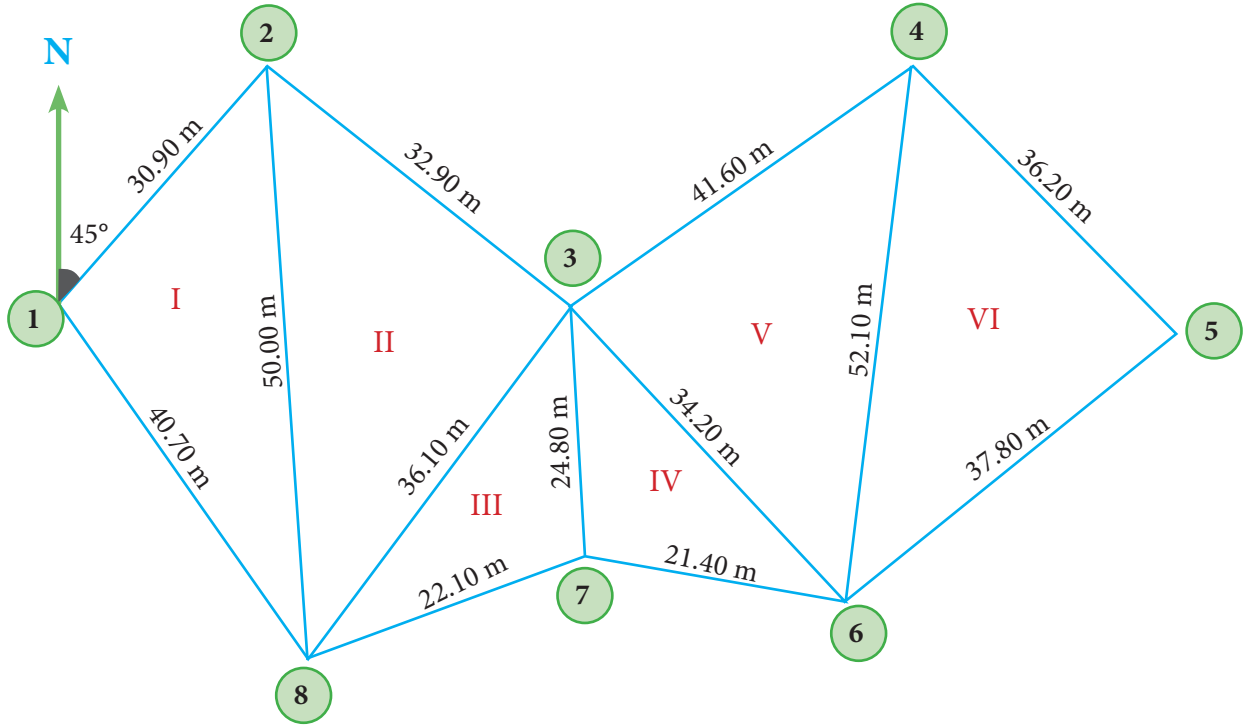
ETKİNLİK ADI	: ÜÇGENDE FARKLI ALAN FORMÜLLERİ
MODÜL/KONU	: Geometri/Üçgenler
KAZANIMLAR	: 1. Üçgenin farklı alan formüllerini ispat eder. 2. Üçgenin alanı ile ilgili problemleri kurar ve çözer.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Etkinlik Formu, dinamik matematik yazılımı

Etkinliğin Amacı

Bu etkinlikte, genel alan formülü dışında iki kenarı ve bu iki kenar arasındaki açı-
sı, çevrel çember yarıçapı ve kenar uzunlukları, iç teğet çember yarıçapı ve çevre-
si, kenar uzunlukları verilen üçgenlerin alanını elde eden formüllerin ispatlanması
amaçlanmaktadır. İspatlar yapılırken öğrencilerin karşılaştıkları güçlüklerin ve kul-
landıkları farklı stratejileri tartışması sağlanır. Problem kurma çalışmalarında çizim
yapılmadan verilen (sözel) problem durumlarına yer verilir.

Başlarken...

Ölçme Bilgisi (Topografya); yeryüzünün tamamının veya bir kısmının ölçülmesi, değerlendirilmesi, çizi-
midir. Başta jeodezi ve fotogrametri mühendisliği olmak üzere, inşaat, şehir ve bölge planlama, jeoloji, çevre,
maden, orman, ziraat mühendisliği ve mimarlık alanlarının temel konularındandır. Bir arazi parçasının şek-
lini ve büyüklüğünü belirtecek planın çıkarılabilmesi için gereken elemanların ölçülmesi işlemine “Alan Ölç-
mesi” denir. Alan ölçmelerinde genellikle yapılan işlem, arazi kenar uzunlukları ile detayların ölçülmesinden
ve geometrik alan formüllerinden yararlanılarak alanların hesaplanmasından oluşmaktadır. Elde edilen de-
ğerlerin bir ölççe göre kâğıt üzerine geçirilmesi yani planların elde edilmesi ise işin amacını oluşturmaktadır.
Genellikle küçük arazi parçalarının alanları basit araçlarla ölçülebilmektedir. Alanı ölçülecek araziye birtakım
üçgenlere ayırarak yapılan ölçme işlemine, çizgisel metod veya üçgenlere bölme metodu denir. Örneğin bir
tarlanın alanının ölçülmesi istenirse söz konusu tarla arazisi üçgenlere bölünür ve meydana gelen üçgenlerin
bütün kenarları ölçülür. Elimizde sadece basit uzunluk ölçme araçları bulunduğu durumlarda bu metotla ölç-
me yapılabilir.

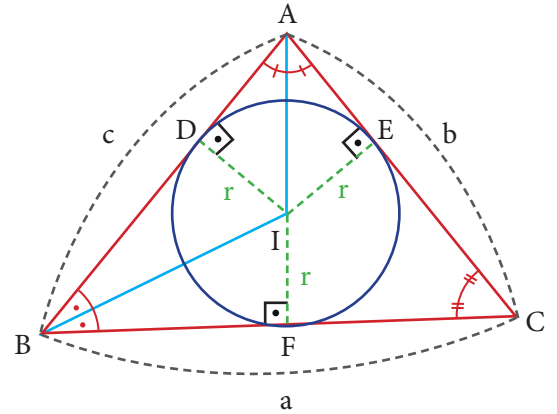


İç Teğet Çemberinin Yarıçapı ve Çevre Uzunluğu Bilinen Üçgenin Alanı

ABC üçgeninde O merkezli iç teğet çemberinin yarıçapı r olsun. Üçgenin yarı çevresi $u = \frac{\text{Ç}(\text{ABC})}{2} = \frac{a + b + c}{2}$ olmak üzere $\text{Alan}(\text{ABC}) = u \cdot r$ olarak hesaplanır.

İspat:

İç teğet çemberinin merkezinden kenarlara indirilen dikmeler çemberin yarıçapı ve aynı zamanda AIB, AIC, BIC üçgenlerinin yükseklikleri olur.



$$\text{Alan}(\text{ABC}) = \text{Alan}(\text{AIB}) + \text{Alan}(\text{AIC}) + \text{Alan}(\text{BIC})$$

$$= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} = \frac{(a + b + c) \cdot r}{2} = u \cdot r$$

Sonuç

Yükseklikleri eşit r olduğu için;

$\frac{\text{Alan}(\text{BIC})}{a} = \frac{\text{Alan}(\text{AIC})}{b} = \frac{\text{Alan}(\text{AIB})}{c}$ eşitliği vardır. İç teğet çemberinin merkezinin üçgenin köşeleri ile oluşturduğu üçgenlerin alanları, bu üçgenlerin ABC üçgeni ile ortak olan kenarlarıyla orantılıdır.

Örnek:

Çevresi 12 birim ve iç teğet çemberinin yarıçapı 3 birim olan üçgenin alanını bulalım.

Çözüm:

$$u = \frac{\text{Ç (ABC)}}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ birim ve Alan(ABC) = } u \cdot r = 6 \cdot 3 = 18 \text{ birimkare bulunur.}$$

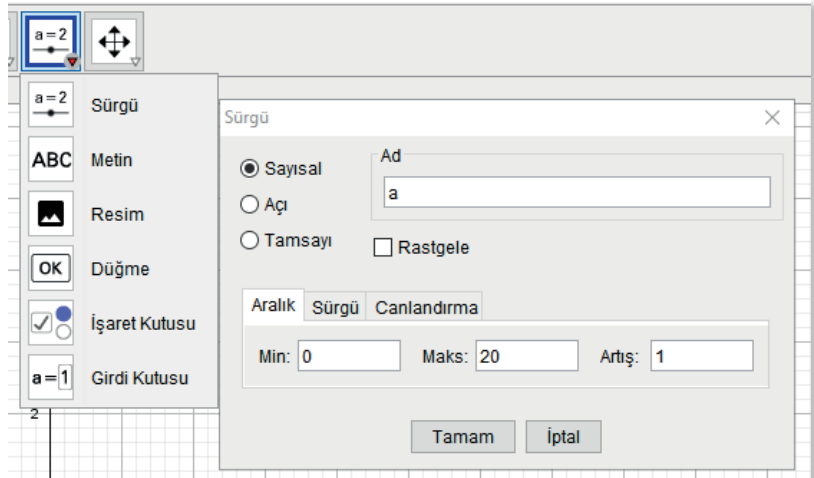
İç teğet çemberi yardımıyla alan bulma sorularına yer verilir (Etkinlik Formu 1).

Okulun arkasındaki bahçenin ekilebilecek alanını hesaplamak için öğretmen ve Ayşe ellerinde şerit metre, kâğıt ve kalem olarak bahçeye inmişler. Öğretmen, Ayşe'ye şeklin düzgün olmadığını ama üçgenlere parçalarlarsa alanını bulabileceklerini söyler. Sizce kenarları bilinen bir üçgenin alanını nasıl bulabiliriz? Kenarları 3, 4, 5 birim ve 6, 7, 8 birim olan iki üçgenin alanlarını bulurken nasıl bir yol izlemeliyiz?



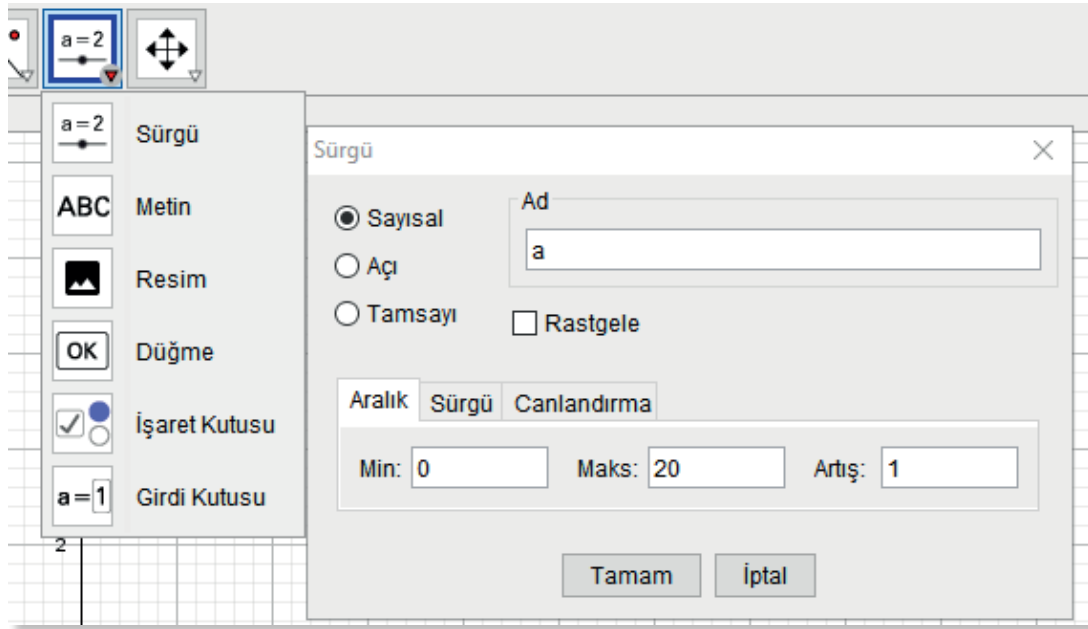
Dinamik matematik yazılımında Heron Alan Formülü'nü keşfetmeye yönelik uygulama yaptırılır.

"Sürgü" oluştur sekmesinden a, b, c sürgüleri min:0, max:20 Artış 1 olacak şekilde oluşturulur.

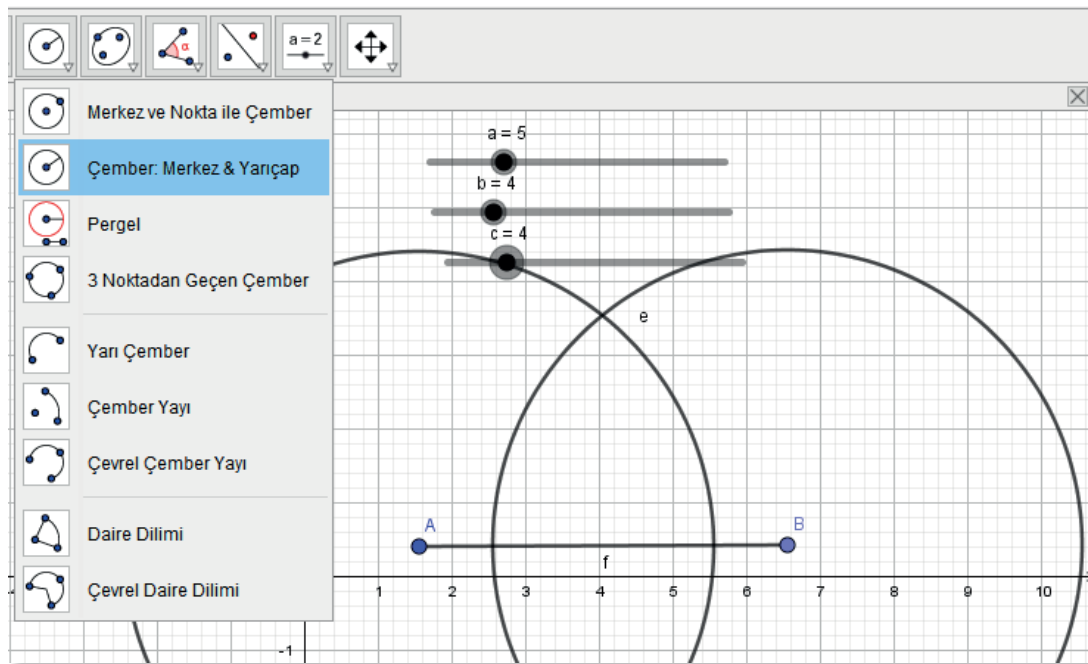




“Verilen uzunlukta Doğru Parçası” seçilip ekranda boşluğa tıklanır. A noktası belirlenince açılan uzunluk penceresine a yazılır. AB doğru parçası a sürgüsüne bağlı olur.



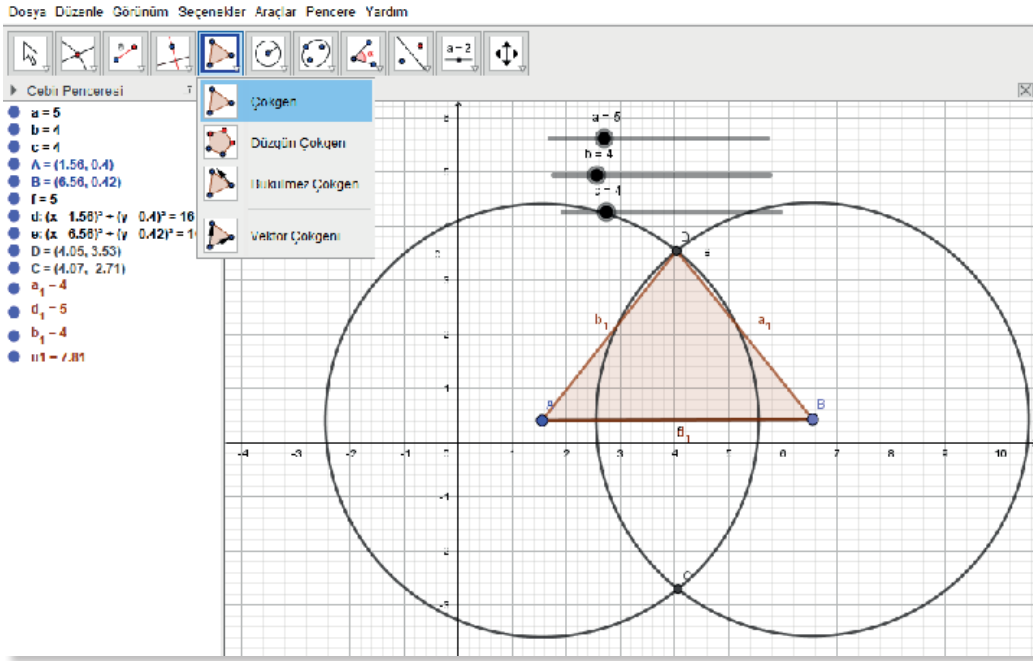
“Çember: Merkezi&Yarıçap” özelliğinden A merkezli b sürgüsüne bağlı b yarıçaplı ve B merkezli c sürgüsüne bağlı c yarıçaplı çemberler oluşturulur.



Çemberler “Kesştir” özelliği ile kesiştirilir ve D noktası oluşturulur. ABD üçgeni a,b,c kenarlarına sahip üçgenin alanı ü1 olarak Cebir Penceresinde belirir.

a, b, c sürgüleri hareket ettirilerek üçgen oluşturma kuralları ve kenarları bilinen üçgenlerin alanları bulma tartışılır.

Artışın 1 seçilmesi üçgenin kenarlarının tam sayı olarak seçilmesi için belirlenmiştir. Artışı boş bırakarak 0,1 hassaslığında ölçümlerde yapabilirsiniz.



Heron Alan Formülü:

Bir üçgenin kenar uzunlukları a, b, c olsun.

Çevrenin yarısı $u = \frac{a + b + c}{2}$ olmak üzere,

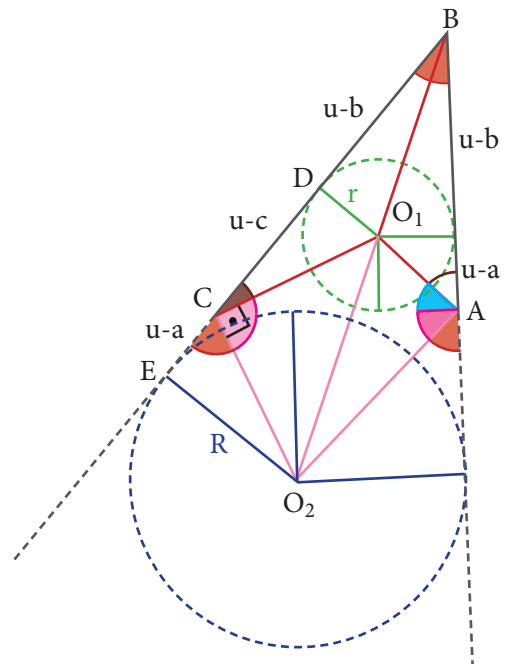
$\text{Alan}(ABC) = \sqrt{u \cdot (u - a)(u - b)(u - c)}$ formülü ile bulunur.

İspat 1:

Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi ile dış teğet çemberini çizelim. Kenarları sırasıyla a, b, c olmak üzere,

Çevrenin yarısı $u = \frac{a + b + c}{2}$ şeklinde tanımlayalım.

u 'yu bu şekilde tanımladığımızda kenar uzunlukları şekil-deki gibi olurlar.





$$O_1DC \sim CEO_2 \text{ olduğundan } \frac{r}{u-a} = \frac{u-c}{R} \dots (1)$$

$$BDO_1 \sim BEO_2 \text{ olduğundan } \frac{r}{R} = \frac{u-b}{u} \dots (2)$$

(1) ve (2) de R'leri eşitlersek;

$$\frac{u \cdot r}{(u-b)} = \frac{(u-c)(u-a)}{r}$$

$$u \cdot r^2 = (u-a)(u-b)(u-c)$$

elde edilir. $\widehat{\text{Alan}}(\triangle ABC) = u \cdot r$ olduğundan

$$(\widehat{\text{Alan}}(\triangle ABC))^2 = u^2 r^2 = u \cdot (u-a)(u-b)(u-c)$$

$$\widehat{\text{Alan}}(\triangle ABC) = \sqrt{u \cdot (u-a)(u-b)(u-c)} \text{ bulunur.}$$

İspat 2:

BC kenarına ait yükseklik h olmak üzere Pisagor bağıntısından;

$$(a-x)^2 + h^2 = b^2 \quad (1)$$

$$x^2 + h^2 = c^2 \quad (2) \text{ bulunur.}$$

(1)'den (2)'yi çıkartırsak;

$$(a-x)^2 - x^2 = b^2 - c^2$$

$$a^2 - 2ax = b^2 - c^2$$

$$x = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)}{2a}$$

x değerini (2) denkleminde yerine yazıp,

h değerini bulalım.

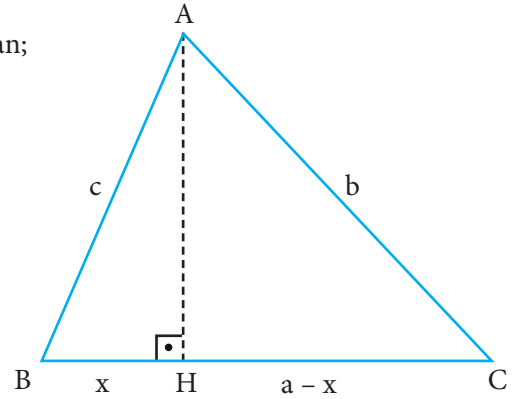
$$\frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2} + h^2 = c^2$$

$$h^2 = c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2}$$

$$4a^2 h^2 = 4a^2 c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$$

$$4a^2 h^2 = ((a+c)^2 - b^2) \cdot (b^2 - (a-c)^2)$$

$$4a^2 h^2 = (a+c+b) \cdot (a+c-b) \cdot (b+a-c) \cdot (b-a+c)$$



$$a + b + c = 2u \text{ olsun.}$$

$$4a^2h^2 = 2u \cdot (2u - 2b) \cdot (2u - 2a) \cdot (2u - 2c)$$

$$4a^2h^2 = 16u \cdot (u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c)$$

$$\frac{a^2h^2}{4} = u \cdot (u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c)$$

$$\left(\frac{ah}{2}\right)^2 = (A(ABC))^2 = u \cdot (u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c)$$

$$\text{Alan}(ABC) = \sqrt{u \cdot (u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c)}$$

Örnek:

Bir üçgenin kenarları 13, 14, 15 birim ise bu üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm

1. Yol:

Heron formülü ile

$$u = \frac{a + b + c}{2} = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \text{ birim}$$

$$\begin{aligned} \text{Alan}(ABC) &= \sqrt{u \cdot (u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c)} \\ &= \sqrt{21 \cdot (21 - 13) \cdot (21 - 14) \cdot (21 - 15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

2. Yol:

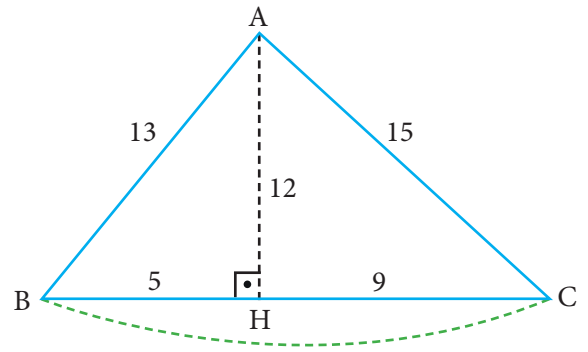
Bu soruyu Heron Formülü kullanmadan çözelim.

ABC üçgeninde $[AH] \perp [BC]$ olacak şekilde

H noktası belirlenirse, ABH 5-12-13 dik

üçgeni ve AHC 9-12-15 dik üçgeni elde edilir.

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84 \text{ birim kare bulunur.}$$



Heron Formülü ile alan hesaplama uygulamalarına yer verilir (Etkinlik Formu Soru 2).

**Trigonometrik Alan Formülü:**

İki kenarı ve bu iki kenar arasındaki açısı verilen bir ABC üçgeni için;

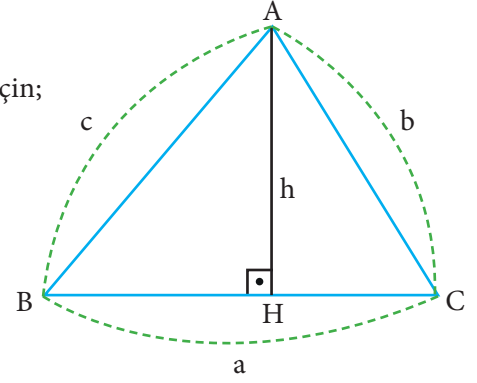
$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$$

İspat:

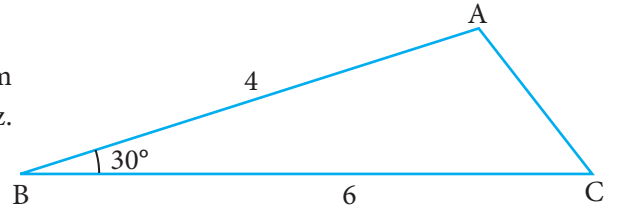
$$\sin B = \frac{h_a}{c} \text{ ve } h_a = c \cdot \sin B$$

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B \text{ bulunur.}$$

Diğer eşitsizlikler de benzer şekilde gösterilir.

**Örnek:**

Şekildeki ABC üçgeninde $m(\angle ABC) = 30^\circ$ ve $|AB| = 4$ cm ve $|BC| = 6$ cm olduğuna göre ABC üçgenin alanını bulunuz.

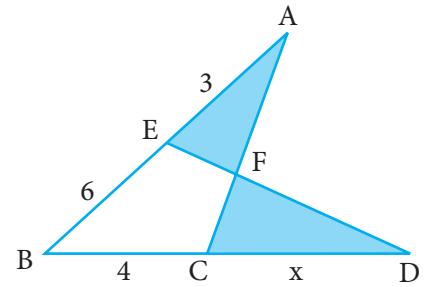
**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \text{Alan}(ABC) &= \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin B \\ &= \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek:

Şekilde $\text{Alan}(AFE) = \text{Alan}(CDF)$ olduğuna göre $|CD| = x$ kaç cm'dir?

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \text{Alan}(ABC) &= \text{Alan}(AFE) + \text{Alan}(BEFC) \\ &= \text{Alan}(BEFC) + \text{Alan}(CFD) \\ &= \text{Alan}(BED) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} |AB| \cdot |BC| \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BD| \cdot \sin B = \text{Alan}(BED)$$

$$\frac{1}{2} 9 \cdot 4 \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (4 + x) \cdot \sin B$$

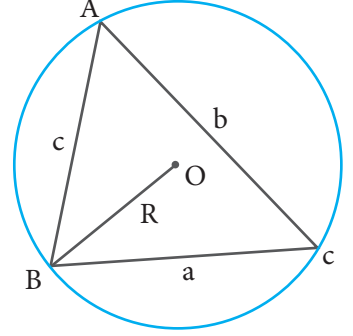
$$x = 2 \text{ cm bulunur.}$$

Trigonometri yardımıyla alan bulma uygulamalarına yer verilir (Etkinlik Formu Soru 4).

Çevrel Çemberinin Yarıçapı Bilinen Üçgenin Alan Bağıntısı

ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R ise;

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \text{ olur.}$$



İspat:

$\frac{a}{\sin A} = 2R$ ve $\sin A = \frac{a}{2R}$ olduğundan trigonometrik alan bağıntısında yerine yazalım.

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin A \text{ ise } \text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2R} \text{ olur. } \text{Alan}(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$|AB| = |AC| = 10$ cm ve $|BC| = 12$ cm olan üçgenin çevrel çemberinin yarıçapını bulalım.

Çözüm:

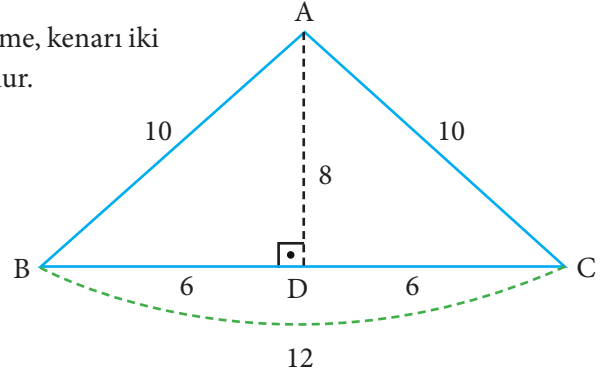
Üçgen ikizkenar olduğundan BC kenarına indirilen dikme, kenarı iki eş parçaya ayırır. Pisagor bağıntısından $|AD| = 8$ cm bulunur.

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Aynı zamanda

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4R} = 48 \text{ olur.}$$

$$R = \frac{25}{4} \text{ cm bulunur.}$$



İç teğet çember ve çevrel çember ile alan bulma uygulamalarına yer verilir (Etkinlik Formu Soru 5).



EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Kenar uzunlukları a, b, c , dışteğet çember yarıçapları sırasıyla r_a, r_b, r_c ve yarı çevresi u olan bir $\text{Alan}(ABC) = r_a \cdot (u - a) = r_b \cdot (u - b) = r_c \cdot (u - c)$ olduğunu gösteriniz.
- Kenar uzunlukları a, b, c , iç teğet çember yarıçapı r ve dış teğet çember yarıçapları r_a, r_b, r_c olan bir ABC üçgeninin alanı $\sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$ olduğunu gösteriniz.
- Bir üçgenin iç teğet çember yarıçapı ile her kenara ait yükseklikler arasındaki ilişki incelenebilir.
- Dış teğet çember yarıçapları ve kenar uzunlukları verilen üçgenin alanının nasıl bulunacağı üzerinde çalışılabilir.
- Her kenar uzunluğu ve alanı tam sayı olan üçgenler üzerinde çeşitli araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Akbulut, H. (2009). *Heron Üçgenleri Üretme Metodları*. Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ceylan, A., & Tombaklar, Ö. H. (2006). *Ölçme Bilgisi (Topoğrafya)*. Selçuk Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Ders Notları Yayın, (56).
- TÜBİTAK(2019). 27. *Ulusal Bilim Olimpiyatları Birinci Aşama Sınavı* - Ortaokul Matematik.
- TÜBİTAK(2020). 28. *Ulusal Bilim Olimpiyatları Birinci Aşama Sınavı* - Ortaokul Matematik Yağcı, M.(2019) My Geometri-1-Altın Nokta Yayınevi.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Dereceleme Ölçeği Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

Etkinlik Formu Cevapları

1. $45/2$

2. a) $4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{195}$

c) 30

d) $20\sqrt{14}$

e) $4\sqrt{3}$

3. $12\sqrt{5}$ $r = \sqrt{5}$

4. 6

5. $r = \sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{3}$

6. $12/5$

7. 2

8. $\frac{24\sqrt{15}}{5}$

**Etkinlik Formu**

1. Kenar uzunlukları 9, 12, 15 birim olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi ile ABC üçgenin köşelerini köşe kabul eden üçgenlerden alanı en büyük olanın alanı kaç birimkaredir?
2. Kenarları uzunlukları verilen üçgenlerin alanlarını bulunuz.
 - a) $a = 4, b = 5, c = 7$
 - b) $a = 7, b = 8, c = 11$
 - c) $a = 5, b = 12, c = 13$
 - d) $a = 12, b = 13, c = 15$
 - e) $a = 4, b = 4, c = 4$
3. Kenar uzunlukları 7, 8 ve 9 birim olan bir üçgeninin alanı kaç birimkaredir? İç teğet çemberinin yarıçapı kaç birimdir?
4. Bir ABC üçgeninde $|AB| = 4$ birim, $|BC| = 6$ birim ve $m(\angle ABC) = 30^\circ$ olduğuna göre ABC üçgenin alanını bulunuz.
5. Bir kenarı 6 birim olan eşkenar üçgenin iç teğet çemberinin ve çevrel çemberinin yarıçapını bulunuz.
6. $s(\angle ABC) = 90^\circ$ ($m(\angle ABC) = 90^\circ$) olan bir ABC dik üçgeninin $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları alınıyor. $2 \cdot |AE| = 3 \cdot |EC|$, $|AB| = 6$ ve $|BD| = 2$ ise BED üçgeninin alanı kaçtır?
 $5/3, 2, 12/5, 5/2, 3$
(2020 TÜBİTAK Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı)
7. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarı üzerinde bir D noktası alınıyor. BC doğrusuna paralel olan bir doğru $\widehat{AC}$ ve $\widehat{AB}$ kenarlarını sırasıyla E ve F noktalarında kesiyor. $\text{Alan}(\triangle BFD) = 1$, $\text{Alan}(\triangle DEF) = 2$ ve $\text{Alan}(\triangle DEC) = 3$ ise $\text{Alan}(\triangle AFE)$ kaçtır?
 $1, 3/2, 2, 5/2, 3$
(2019 TÜBİTAK Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı)
8. Yüksekliklerinin uzunlukları 3, 4 ve 6 birim olan bir üçgenin çevre uzunluğu kaç birimdir?
(2012 TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyatı)



ETKİNLİK ADI	: ÖKLİD DIŞI GEOMETRİLER
MODÜL/KONU	: Geometri/Öklid Dışı Geometriler
KAZANIMLAR	: Öklid dışı geometrilerin ortaya çıkışını neden-sonuç ilişkisi içinde yorumlar.
SÜRE	: 4 ders saati
KULLANILACAK MATERYALLER	: Dünya küresi, balon, Etkinlik Formu

Etkinliğin Amacı

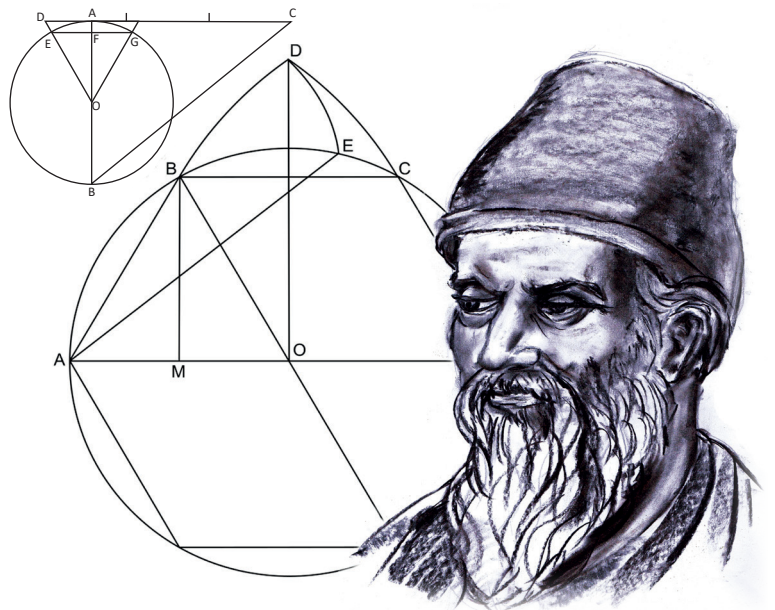
Düzlem geometrisi olarak da adlandırdığımız Öklid geometrisinden başka geometrilerin de olduğunu öğrencilere fark ettirmektir. Günlük hayatta karşılaştığımız geometrik kavramlar aslında Öklid geometrisiyle açıklanamaz. Öklid'in 5. postulatının önemi ve Öklid dışı geometrilerin oluşumu incelenecektir.

Başlarken...

Öklid geometrisi olarak bildiğimiz ve derslerde kullandığımız geometri MÖ 300 yıllarında İskenderiye’de yaşamış büyük matematikçi Öklid tarafından yazılan on üç ciltten oluşan “Elementler” kitabında işlenmiştir. Öklid “Elementler”in başlangıç bölümünde temel ilkeleri tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar olarak vermiştir.

Öklid'in postulatlarını kısaca

- 1) Bir doğru parçası her iki ucundan son-
suza kadar uzatılabilir.
- 2) İki nokta arası en kısa yol bir doğru
parçasıdır.
- 3) Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan nok-
taların geometrik yeri bir çember belir-
tir.

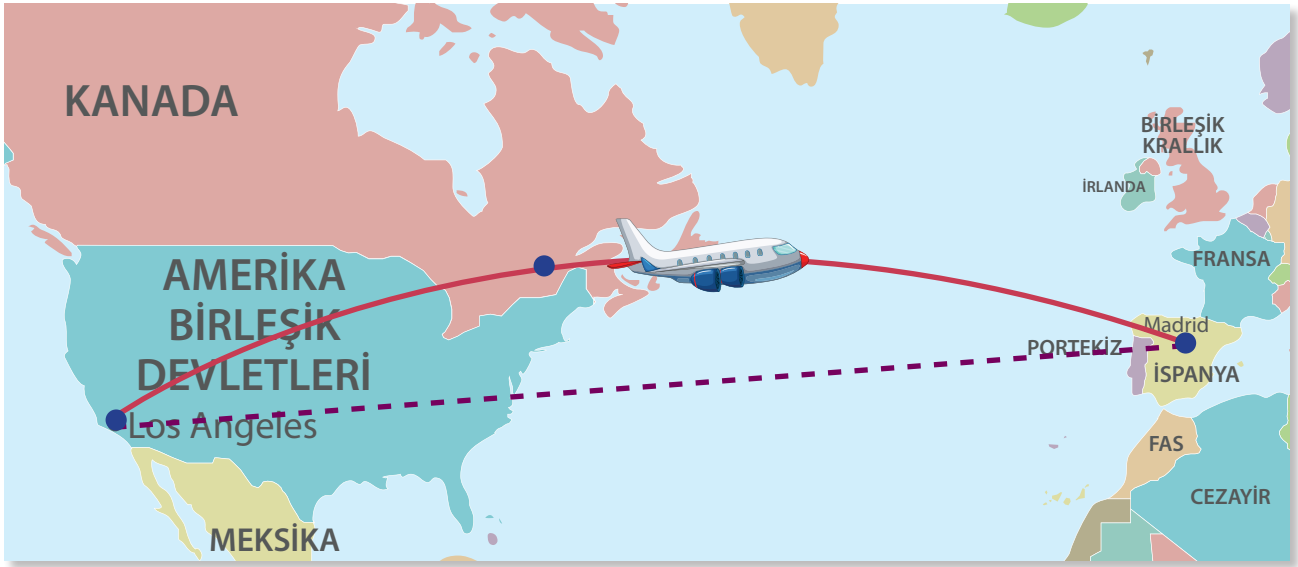




- 4) Bütün dik açılar birbirine eşittir.
 - 5) Düzlemde, bir doğruya dışında bulunan bir noktadan sadece bir tane paralel doğru çizilebilir, şeklinde verebiliriz.
- Sizce beşinci postulatın doğru olmadığı yerler var mıdır?

Öğrenciler Etkinlik Formu Soru 1'e yönlendirilir.

Görselde, Madrid ve Los Angeles arasında bir uçak rotası vardır. Neden bu rota, mor ile çizilen düz çizgi değil de üstteki gibi eğimli çizgiyle gösterilmektedir?



Sorumuza cevap olarak: aktarma yapacaktır, hava akımlarından faydalanmak için, dünya yuvarlak olduğu için, göz yanılması şeklinde cevaplar alınabilir.

Öklid geometrisine göre bir dik üçgende hipotenüs en kısa mesafedir. Haritada Kanada tarafından geçtiğimiz yol üzerinde kırmızı çizgiye bir nokta koysak bir üçgen elde edebiliriz. Bu üçgeni dik üçgen olarak kabul edelim. Düzlem geometrisi kurallarına göre hipotenüs uzunluğu üzerinden hareket edersek daha kısa mesafede varış noktasına ulaşırız. Fakat haritayı merkezinden şişirdiğimizi düşünelim. Şişirilmiş haritada ekvatora yakın yerler arasındaki önceden çizilmiş iki nokta arası mesafe kutuplara yakın yerlerde önceden çizilmiş noktalardan daha uzaktır.

Dünya üzerindeki iki nokta arasındaki en kısa mesafeyi nasıl gösterirsiniz?

Öklid geometrisi düşünce tarzına göre harita üzerinde iki nokta arasında düz bir çizgi çizersiniz. Örnekte Madrid ve Los Angeles arası gösterilmiştir. Uçağın bu çizgi üzerinde yol aldığını düşünürsek 9498 km yol gitmemiz gerekir. Ancak büyük çember boyunca uçarsanız yani kuzeydoğuya yönelip, sonra yavaş yavaş güneydoğuya yönelirseniz gittiğiniz mesafe 9374 km olacaktır. Buna benzer yolların yerküreyi düz gösteren harita üzerindeki görüntüsü aldatıcıdır.

Öğrenciler Etkinlik Formu 2 ve 3'e yönlendirilir.

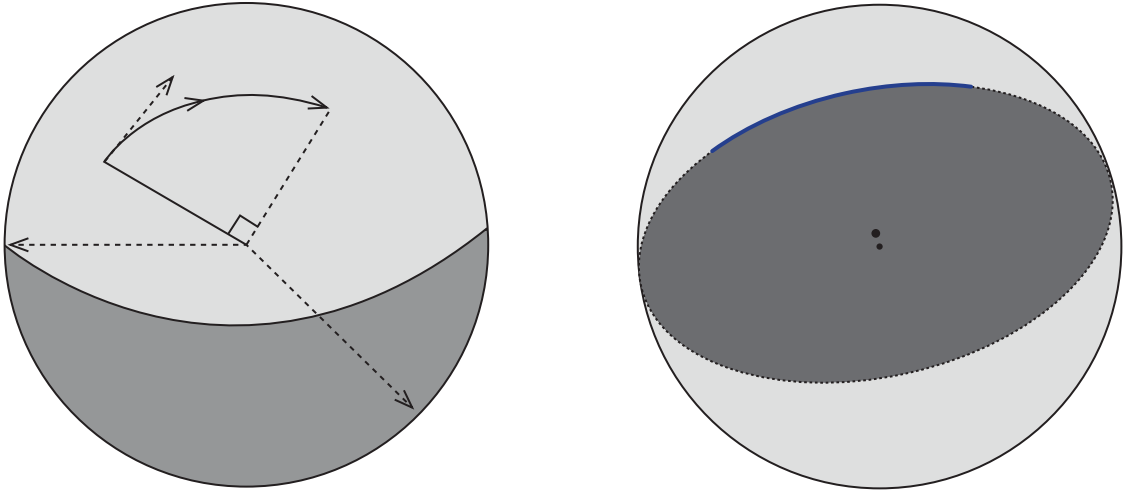
Öklid Dışı Geometriler

MÖ 300 yıllarında Öklid günümüzde kullandığımız geometriyi aksiyomatik olarak oluşturmuştur. Öklid geometrisi düzlemlerde ve eğikliğin göz ardı edilebileceği küçük ölçeklerde doğru işlemekle birlikte gerçek hayatta karşılaşılan geometri problemleri daha çok Öklid dışı geometrinin konusunu oluşturur. Macar matematikçi Bolyai, Rus matematikçi Lobachewsky ve Alman matematikçi Riemann tarafından Öklid geometrisinden farklı geometriler geliştirilmiştir. Bu geometriler sırasıyla küresel geometri ve hiperbolik geometri olarak bilinir. Öklid dışı geometrilerin başlangıç noktası, “Düzlemde bir doğruya dışında bulunan bir noktadan sadece bir tane paralel doğru çizilebilir.” postulatına dayanır. Küresel geometride postulat “Bir doğruya dışındaki bir noktadan hiçbir paralel çizilemez.” ve hiperbolik geometri “Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir.” aksiyomlarına dönüşür. Öklid metriğinin dışında tanımlanan metriklerin yardımıyla yeni geometriler geliştirilmiştir. Lorentz ve Minkowski geometrileri bu geometrilerin en yaygın olanlarıdır.

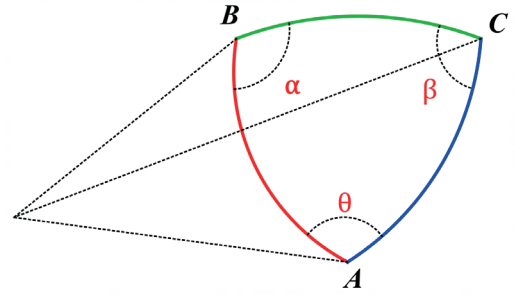
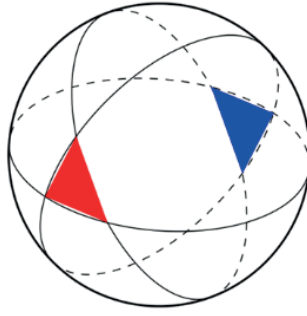
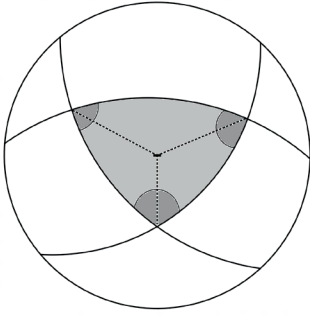
Öğrenciler Etkinlik Formu 4'e yönlendirilir.

Küresel Geometri

Yarıçapı R olan bir küre düşünelim. Küre yüzeyinde geometri oluşturmak mümkündür. Küresel geometri tanımı buradan gelmektedir. Üç boyutlu uzayda başlangıç noktasına uzaklığı sabit olan noktaların kümesine küre denir. Bu kürenin noktalarına küresel geometrinin noktaları denir. Küre yüzeyinde bildiğimiz şekilde bir doğru ve doğru parçasından bahsedemeyiz. Doğru parçası düzlemde iki nokta arasındaki en kısa yol olarak tanımlanabilir. Küresel geometride küresel iki nokta arasındaki en kısa yol; bu iki nokta ve başlangıç noktasından geçen düzlemin küreyle kesişiminden elde edilen çemberin kısa yayıdır.



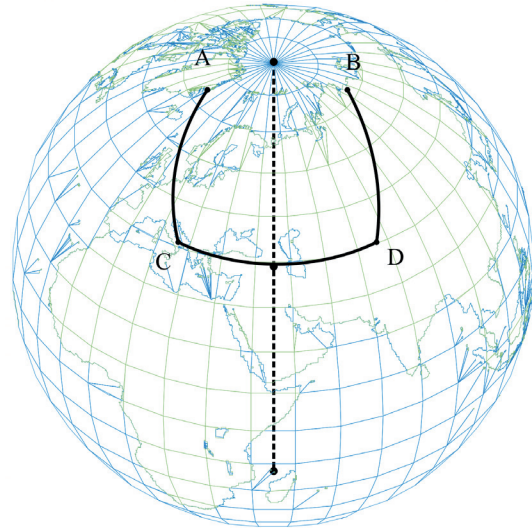
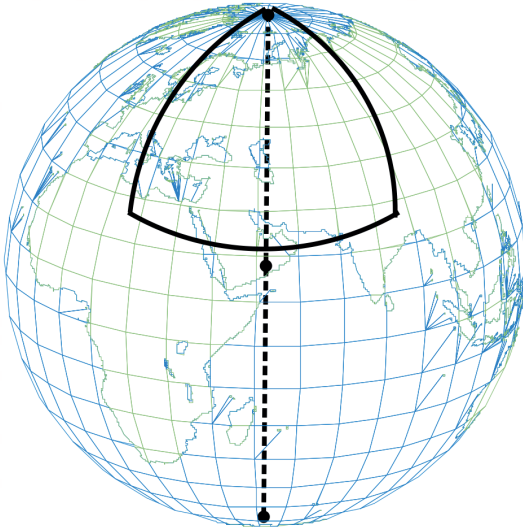
Küresel geometride bir noktadan dışındaki bir doğruya hiçbir paralel doğru çizilemez ve doğrular iki noktada kesişen çemberlerdir. Bu şekilde tanımlanan üç çember tarafından oluşturulan üçgenlerden her birine küresel üçgen denir. Bu durumda sekiz tane küresel üçgen oluşmaktadır. Bir karpuzu her seferinde iki yarım küre olacak şekilde üç defa kestirirsek kalan parçaların kabukları üçgensel bölge oluşturmaktadır.



Öğrenciler Etkinlik Formu 5'e yönlendirilir.

Örnek: Dünya üzerindeki bir noktadan 100 km güney yönde hareket edip, sonra 100 km doğu yönünde hareket edip sonra da 100 km kuzey yönde hareket eden bir hareketlinin aynı noktaya vardığı kaç farklı nokta ya da noktalar vardır?

Kuzey Yarım Küre'de seçilen herhangi bir noktadan, verilen adımlar takip edildiğinde Kuzey Kutup Noktası hariç aynı noktaya gelinmediği görülebilir.



- Acaba Güney Yarım Küre'de böyle nokta veya noktalar var mıdır?
- Ekvator ve paraleller üzerinde sürekli aynı yöne gitsek başlangıç noktasına ulaşır mıyız?
- Ekvator çizgisi hangi geometrik şekle karşılık gelir?

Örneğin paralellerden 100 km uzunluğunda, olan paralelin 100 km kuzeydeki herhangi bir A noktasından güneye doğru 100 km ilerlersek B noktasına ulaşırız. Sonra 100 km doğuya gidince paralele tam bir tur atıp B noktasına tekrar gelmiş oluruz. 100 km kuzeye gidersek başladığımız noktaya dönmüş oluruz.

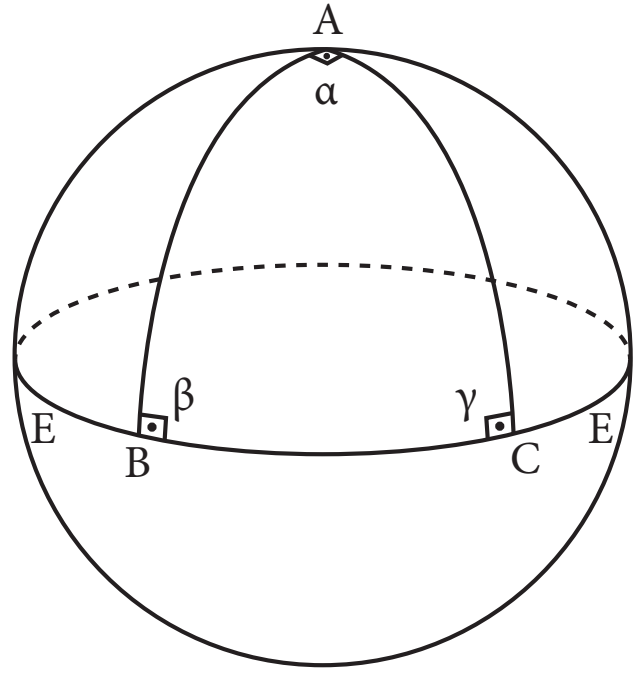
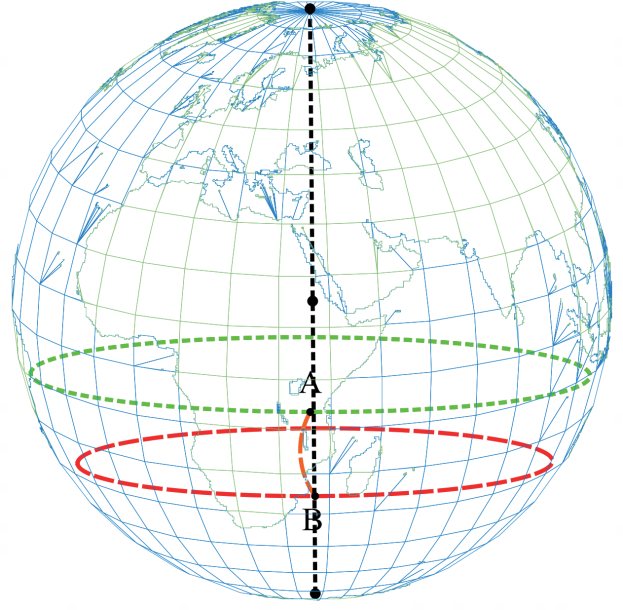
Çevresi 50 km veya 25 km olan paraleller için de aynı durum geçerli midir? Tartışınız.

Öğrencilere “Üçgenin iç açılar toplamı kaç derecedir?” sorusu sorulur. Alınan cevapların çoğunluğu 180 derece olacağından düzlemde denilmediği hatırlatılır.

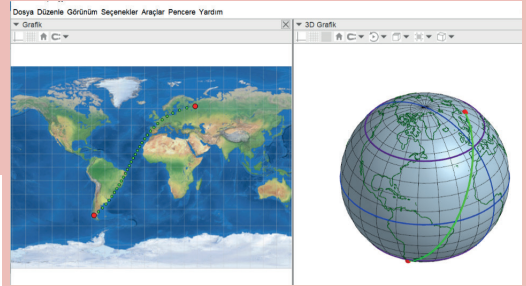
Küresel üçgenlerin iç açılar toplamı kaç derece olabilir? Dünyayı tam bir küre olarak düşünelim. A noktasını Kuzey Kutup Noktası, B noktasını Greenwich boylamı üzerinde ve C noktasını 90° boylamı üzerinde düşünersek oluşan küresel üçgenin iç açılar toplamı $\alpha + \beta + \gamma = 270^\circ$ olarak bulunur.

Bir küre üzerindeki küresel üçgenin iç açılarının toplamı 180° den büyüktür. Meridyenler enlemlere dik (burada ekvator paraleli) olduklarından β ve γ açılarının toplamı 180° dir. Bu durumda $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ olur. Olay, kürenin pozitif eğriliğinden ileri gelir. Küresel üçgenin iç açıları toplamı 180° den büyük, 540° den küçüktür. Küresel üçgenin iç açıları toplamı ile 180° arasındaki farka küresel üçgenin fazlası denir ve ε ile gösterilir. Alanı ise kürenin yarıçapı R ve küresel üçgenin fazlası ε olmak üzere

Küresel Üçgenin Alanı = $\frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot R^2}{180}$ olarak bulunabilir. Burada alanın ve küresel fazlalığın büyümesinin yarıçapla doğru orantılı olduğu söylenebilir.



Öğrenciler karekodu okutarak Dünya yüzeyindeki uzaklıkları simüle eden etkinliğe yönlendirilir.





Öğrenciler Etkinlik Formu 7'ye yönlendirilir.

Hiperbolik Geometri

Öklid geometrisinden bir farkla ayrılır. Öklid'in paralellik aksiyomunun tersini doğru olarak kabul eden geometride bir doğrunun dışındaki bir noktadan birden çok (sonsuz) paralel doğru geçebilir. Ayrıca bir üçgenin iç açıları toplamı her zaman iki tane dik açıdan küçüktür.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ

Araştırma Soruları

- Üç boyutlu küresel cisimleri iki boyutlu düzlemlere aktarabilmek zordur. Bu sebepten haritalar çizilirken “projeksiyon yöntemleri” kullanılır. Projeksiyon yöntemleri Öklid dışı geometriler kapsamında araştırılır.
- Salih Zeki'nin Lobaçevski geometrisi hakkındaki çalışmaları araştırılır.
- Möbius şeridi ve Klein şişesi incelenebilir.
- Poincaré diski araştırılabilir.
- Mimaride kullanılan pendentif ve Mimar Sinan'ın eserlerinde geçen geometrik kavramlar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Can S.,(2018). *Euclid Dışı Geometriler*. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Seminerleri.

Kökcü, A., (2017) Euclid Dışı Geometrilerin Matematik Tarihi ve Felsefesindeki Yeri. *Özne Dergisi*. Çizgi Kitabevi, Konya.

Wolfe, H. E. (2012). *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. Courier Corporation.

ÖLÇME DEĞERLENDİRME

Bu etkinliğe ait Kontrol Listesi Değerlendirme Formu'na etkinlik karekodunu okutarak ulaşabilirsiniz.

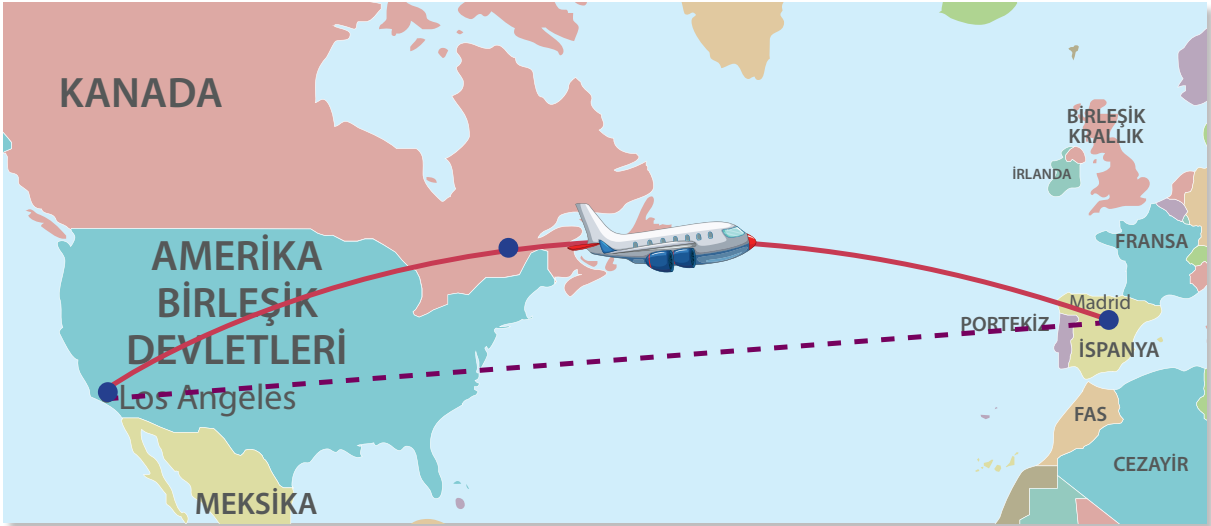
Etkinlik Formu Cevapları

1. **a.** Küresel geometri
b. Eğimli kırmızı çizgi
2. Üç boyutlu görsellerin düzlemde çizilmesi
3. Tartışma
4. Balonun ortasındaki çizgiler en uzak konumdadır.
5. Üçgenlerin kenarları doğru değil, eğri şeklindedir. Alan artmıştır. İç açıları toplamı büyümüştür.
6. Uygulama
7. İç açıları küçülmüştür.

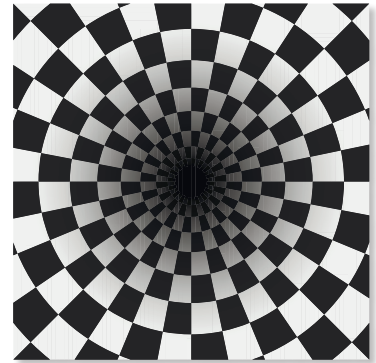


Etkinlik Formu

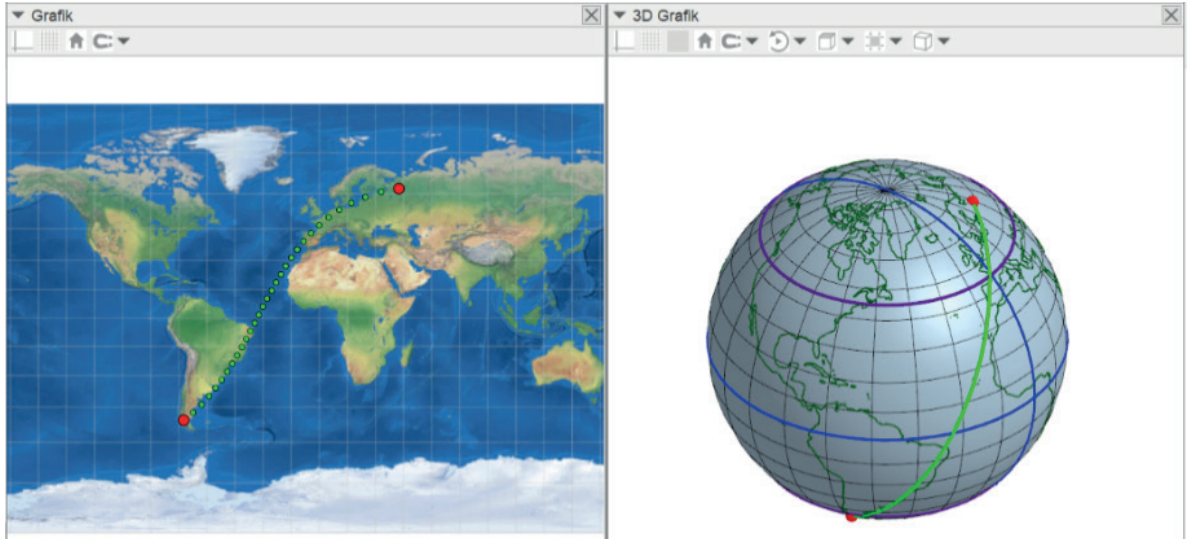
1. Görselde Madrid ve Los Angeles arasında bir uçak rotası Toronto'dan noktadan geçecek şekilde çizilmiştir.
 - a. Neden bu rota mor ile çizilen düz çizgi değil de üstteki gibi eğimli çizgiyle gösterilmektedir?
 - b. Sizce uçak bu iki çizgiden hangisinden giderse daha az yol alır?



2. Resim dersinde perspektif çalışması yaparken öğretmen, tahtaya yandaki çukur resmini yansıtmıştır. Görüntüdeki bütün karolar eşit olmasına rağmen neden kenar uzunlukları birbirinden farklı görünmektedir?
3. Resimde 360 derece panoramik çekilmiş bir fotoğrafta köprünün fotoğrafı vardır. Acaba köprünün düz bir doğru şeklinde olan korulukları neden eğilmiştir?



4. Elimizdeki balonlara birbirine paralel üç doğru çizelim ve balonu şişirdikten sonra paralel doğruların durumlarındaki değişimleri tartışalım.
5. Elimizdeki balonlara şişirmeden önce üçgen çizelim ve balonları şişirelim.
 - a. Üçgenlerde nasıl değişiklikler olduğunu gözlemleyiniz.
 - b. Kenarlarındaki değişim miktarına göre alanı ne oranda değişti?
 - c. Üçgenlerin iç açılarının toplamı düzlemde çizdiğimiz üçgenlerle aynı mıdır?
6. Telefonunuzdan ya da bilgisayarınızdan karekodu okutarak Dünya yüzeyindeki uzaklıkları simüle eden etkinlikte kırmızı noktaları sürükleyerek değişimleri inceleyiniz.



7. Okul gezisinde Mimar Sinan'ın eserlerini gezen Erhan, çektiği fotoğrafta bir üçgen olduğunu ancak bu üçgenin düzlemdeki üçgenden farklı olduğunu görmüştür. Sizce farklar nelerdir?





GÖRSEL KAYNAKÇA

Aşağıda ID numaraları verilmiş olan görseller telif bedeli ödenerek www.shutterstock.com sitesinden alınmıştır. ID numaraları olmayan görseller yayınevi ressamı ve grafikeri tarafından oluşturulmuştur.

Sayfa No	ID						
31	797198503	120	304694597	256	1492621616	456	4366282
32	1021369375	120	588099152	258	1728704218	457	651531505
42	1464188354	120	336792239	262	1912270927	459	69753550
44	1720876849	124	1708545433	270	1815403934	460	2012953004
44	1851850156	125	1050343436	270	86437507	467	1026674575
46	1936479643	128	214967452	271	693811093	471	2012953004
46	1954198486	131	1708545433	271	343394063	474	1643825584
46	1909312528	132	1050343436	288	1477915262	492	1909523326
46	1123858610	133	1920904877	304	1451618132	493	72076165
47	1097246282	135	1896662020	335	377181817	507	1049052164
50	1386755645	135	1400808002	336	1181447131	507	1655382583
50	1216514677	141	1749425153	340	1039048876	516	1493995862
52	1936184023	146	1896662020	340	1718973463	516	238334089
53	1144192253	147	1400808002	362	518870542	553	104441588
58	1721971603	149	437862145	367	1714996837	563	1475424956
59	1335305081	159	1816773023	374	1442173577	564	627142544
62	367540553	185	1826057804	385	1450419122	570	627142544
66	520631995	186	561371551	388	1559549183	570	1653653302
76	1566550258	198	1603297483	389	1335557597	570	559673662
90	1897467700	199	252218710	389	675219493	571	647979475
104	88369741	200	253063261	391	1686316402		
105	446106637	201	253063261	399	1335557597		
105	1641135547	208	253063261	399	675219493		
117	176251925	212	253063261	400	1686316402		
118	1726494685	213	253063261	409	473601430		
119	69646192	215	253063261	436	90925013		
120	660642778	223	528898111	440	1819957961		
120	1143719438	224	1263803224	444	4366282		
		247	509910508	445	69753550		
		253	117662134	446	1718687947		